مراجعة 207

الفصل الأول 36/35

س الثاني

$f\in C^2$ مشتقاتها الجزئية من الرتبة الثانية متصلة

$x=3u+2v$, $y=6u-4v$ برهن: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=6\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-24\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

الحل:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}3+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot 6=3\frac{\partial w}{\partial x}+6\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial w}{\partial x}+6\frac{\partial w}{\partial y}\right)2+\frac{\partial}{\partial y}\left(3\frac{\partial w}{\partial x}+6\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot(-4)$$

$$=6\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}-12\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-24\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

وبما أن $w=f$ لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة فإن $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$

وبالتالي:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=6\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-24\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$

3. لتكن f معرفة على D، ومشتقاتها الجزئية من الدرجة الأولى متصلة
و f دالة متجانسة من الدرجة k.
برهن أن $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=kf(x,y)$ لكل $(x,y)\in D$

<u>الحل</u>: f متجانسة من الدرجة k يعني:
لكل $(x,y)\in D$ ، لكل $t>0$ فإن $(tx,ty)\in D$
و $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$

نشتق المعادلة حسب t:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\cdot\frac{\partial(tx)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\cdot\frac{\partial(ty)}{\partial t}=kt^{k-1}f(x,y)$$

فإن:

$$\boxed{x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=kt^{k-1}f(x,y)\text{ ، لكل } t>0}$$

نأخذ <u>$t=1$</u>

$$x\cdot f_x(x,y)+yf_y(x,y)=kf(x,y)$$

<u>ملاحظة</u>: <u>$t=2$</u>

$$xf_x(2x,2y)+yf_y(2x,2y)=k2^{k-1}f(x,y)$$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\cdot e^{u(x)}$$

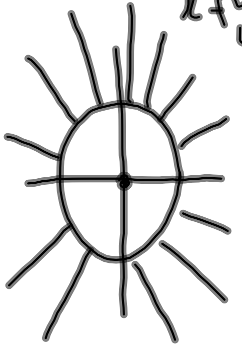
$$\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

الفصل الثاني 35|34

$$f(x,y) = e^{x^2} + x^2y^2 + \ln(x^2+y^2-1)$$

(أ) مجال الدالة f:

f معرفة إذا، فقط إذا كان $x^2+y^2-1>0$



إذن المجال للدالة f هو: $\iff x^2+y^2>1$

خارج القرص مركزه (0,0) نصف قطره 1: $D_f = B_{((0,0),1)}$

(ب) ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = 2x\,e^{x^2} + 2xy^2 + \frac{2x}{x^2+y^2-1}$$

$$f_y(x,y) = 2x^2y + \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

(ج)

$$f_{x^2}(x,y) = 2\,e^{x^2} + 2x\,2x\,e^{x^2} + 2y^2 + \frac{2(x^2+y^2-1)-2x(2x)}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$$f_{x^2}(x,y) = 2\left(1+2x^2\right)e^{x^2} + 2y^2 + \frac{2(-x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x\,2y + \frac{-2x\,2y}{(x^2+y^2-1)^2} = 4xy\left(1-\frac{1}{(x^2+y^2-1)^2}\right)$$

$$f_{yx}(x,y) = 2x\,2y + \frac{-2y(2x)}{(x^2+y^2-1)^2} = 4xy\left(1-\frac{1}{(x^2+y^2-1)^2}\right)$$

$$f_{y^2}(x,y) = 2x^2 + \frac{2(x^2+y^2-1)-2y\,2y}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$$f_{y^2}(x,y) = 2x^2 + \frac{2(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$$\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} = \left(r\sin\theta\right)_r = \sin\theta$$

$$\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} = \left(r\sin\theta\right)_\theta = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} = \left(r\cos\theta\right)_r = \cos\theta$$

$$\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} = \left(r\cos\theta\right)_\theta = -r\sin\theta$$

م 01:30-24 مارس

النطاق:

(أ)

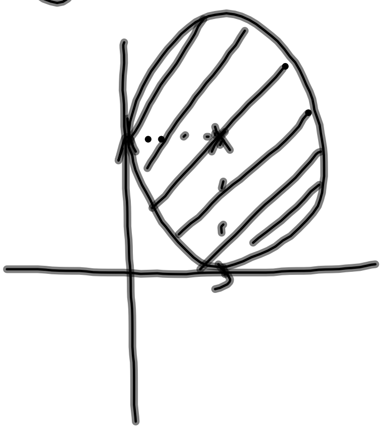
$$f(x,y)=\sqrt{1-(x-1)^2-(y-1)^2}$$

$f(x,y)$ معرفة إذا، وفقط إذا كان:

$$1-(x-1)^2-(y-1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1 = 1^2$$

مجال الدالة f هو: القرص المغلق مركزه $(1,1)$، ونصف قطره 1.



(ب) $f(x,y)=\ln\left(1-(x-1)^2-(y-1)^2\right)$

f معرفة إذا وفقط إذا كان: $1-(x-1)^2-(y-1)^2>0$

$\iff (x-1)^2+(y-1)^2<1$

مجال الدالة f هو: القرص المفتوح مركزه $(1,1)$ ونصف قطره 1.

(ج) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2-1}}$

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان: $(x-1)^2+(y-1)^2-1>0$

فإن: $(x-1)^2+(y-1)^2>1$

بأن مجال الدالة f هو خارج القرص مركزه $(1,1)$ ونصف قطره 1.

(د) $f(x,y)=9-(x-1)^2-(y-1)^2$

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

(لأن $f(x,y)$ كثيرة الحدود)

وبالتالي $D_f=\mathbb{R}^2$

الفصل الثاني 34/35

(3) نهاية الدالة $f(x,y)=\frac{2xy+y^4}{x^2+y^2}$ عندما (x,y) تقترب من $(0,0)$ حسب المسار $y=x$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x^4}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2+x^2)}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x^2}{2}=1$$

(4) نهاية الدالة f عندما (x,y) تقترب من $(0,0)$

حيث $f(x,y)=\frac{2xy+y^4}{x^2+y^2}$

لدينا: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$

وبما أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=1$ فإن $\lim_{(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة.

الاختبار 36/37 الفصل الأول

س2:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^4} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(1) نطاق الدالة f هو $D_f=\mathbb{R}^2$

$(x,y)\longmapsto \dfrac{xy^2}{x^4+y^4}$: دالة كسرية معرفة ومتصلة على مجالها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

ونعلم أن f معرفة عند $(0,0)$

وبالتالي f معرفة على $\mathbb{R}^2$.

(2) • $(x,y)\longmapsto \dfrac{xy^2}{x^4+y^4}$ هي دالة متصلة عند كل نقطة من مجالها $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ، لأنها دالة كسرية

• عند النقطة $(0,0)$: لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\,x^2}{x^4+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}=\pm\infty$$

فإن f ليست متصلة عند $(0,0)$

وبالتالي f ليست متصلة عند كل نقطة من نطاقها.

(3

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^4}-0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

إذن $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^4}-0}{y}=0$$

إذن $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

(4 عند النقطة $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{y^2(x^4+y^4)-xy^2\,4x^3}{(x^4+y^4)^2}=\frac{y^2(-3x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{2xy(x^4+y^4)-xy^2\,4y^3}{(x^4+y^4)^2}=\frac{2xy(x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2}$$

وبالتالي ,

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(-3x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases};\quad f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy(x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ه) $f_{xy}(0,0)$ ؟ إن وجدت لدينا:

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(0,0) = \lim_{y\to0} \frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to0}\frac{\frac{y^6}{y^8}}{y} = \lim_{y\to0}\frac{1}{y^3} = \pm\infty$$

فإن $f_{xy}(0,0)$ غير موجودة.

$f_{yx}(0,0)$ ؟ إن وجدت لدينا:

$$f_{yx}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^8}-0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

فإن $f_{yx}(0,0)=0$

س3: لتكن w دالة لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة عند كل النقاط في مجالها

$x = 2u + v \quad , \quad y = u - v$

أثبت أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

لأن w دالة لها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة

الحل:

لدينا:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot 2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot 1 = \underbrace{4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$

ولدينا:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot(-1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$

وبالتالي

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$