المحاضرة الرابعة

فائض المستهلك وفائض المنتج

فائض المستهلك:- هو الفرق بين المبلغ الذي يكون المستهلك مستعدا لدفعه للحصول على كمية معينة من السلعة، والمبلغ الذي دفعه فعلا لتلك الكمية.

فائض المستهلك = المبلغ الذي يكون المستهلك مستعدا لدفعه ــ المبلغ الذي دفعه فعلا

من الشكل السابق يتبين انه لو فرضنا أن سعر التوازن في السوق هو OP^*فان المستهلك سيشتري الكمية Oq^* اي ان المستهلك سيدفع المبلغ $(OP^*)(Oq^*)$ في حين انة كان مستعد لان يدفع السعر op_1مقابل الوحدة الواحدة من oq_1 وان يدفع السعر op_2 مقابل الوحدة الواحدة من الكمية oq_2 وان يدفع السعر op_3 مقابل الوحدة الواحدة من oq_3 اي ان المستهلك مستعد أن يدفع سعر لكل وحدة من وحدات الكمية Oq^* يفوق السعر التوازني OP^*

كما يتضح أن المستهلك مستعد أن يدفع سعر أعلى من سعر التوازن في حين انه يدفع فعلا السعر O^* والفرق بين السعرين أو المبلغين يسمى **فائض المستهلك** والذي تم تمثيله بيانيا بالمساحة المضللة في الشكل أعلاه

ورياضيا فإننا نحسب فائض المستهلك بمكاملة دالة الطلب ضمن المدى Oq^* اي ان فائض المستهلك

فائض المستهلك $\int_o^{q^*} \mathrm{f(Q)dQ} - Q^*\mathrm{P}^*$

بافتراض أن دالة الطلب كالأتي :-

P=a-bq

المبلغ الذي سيكون المستهلك مستعد لدفعة هو

$$\int_{o}^{q^*} (\mathrm{a} - \mathrm{bq})\mathrm{dq} = \left[aq - \frac{bq^2}{2}\right]$$

$$= \left[\mathrm{a}q^* - \frac{bq^{*2}}{2}\right] - \left[a(0) - \frac{b}{2}(0)\right] = \mathrm{a}q^* - \frac{bq^{*2}}{2}$$

فائض المنتج

فائض المنتج:- هو الفرق بين المبلغ الذي استلمه المنتج لقاء الكمية التي أنتجها وباعها، وبين المبلغ الذي كان يمكن أن يقبل به كثمن لإنتاج وبيع نفس الكمية

من الشكل اعلاة يتبين انه لو فرضنا أن سعر التوازن في السوق هو OP^*فان المنتج سيبيع الكمية OQ^*ويستلم السعر OP^*في حين ان المنتج كان مستعد لان يقبل السعر op_1 مقابل الكمية oQ_1وان يقبل السعر op_2 مقابل الكمية oQ_2 وان يقبل السعر op_3
مقابل الكمية oQ_3 والفرق بين السعر المستلم فعلا والسعر الذي يكون المنتج مستعد بقبولة يسمى **فائض المنتج** وبيانيا يمثل فائض المنتج بالمساحة المظللة في الشكل أعلاه

ورياضيا فإننا نكامل دالة العرض ضمن المدى OQ^* كالتالي :

فائض المنتج $P^*Q^* - \int_0^{Q^*} G(q)dq$

مثـــــــــــــال:-
إذا أعطيت دالة الطلب $p=110-q^2$ومفترضا أنة عند توازن السوق $Q^*=9$
$p^* = 29$ ،

أوجد فائض المستهلك

الحـــــــــــــل:-

فائض المستهلك $= \int_0^9 (110 - q^2)dq - (q^*)(p^*)$

$$=\left[110q - \frac{q^3}{3}\right] - (9)(29)$$

$$\left[110(9) - \frac{(9)^3}{3}\right] - \left[110(0) - \frac{(0)^3}{3}\right] - (9)(29)$$

$$= [(990 - 243)] - [(0 - 0)] - (261)$$

=(747- 0)- (261)=486

مثـــــــــال(٢)

إذا أعطيت دالة العرض^2(Q+6) =pومفترضا أنة عند توازن السوق 3=q^*،

$p^* = 81$ أوجد فائض المنتج

الحل:-

فائض المنتج= $(q^*)(p^*) - \int_0^{q^*}(Q+6)^2 dq$

=(3)(81) -$\int_0^3 (Q+6)^2 dq$

$$=243- \left[\frac{(q+6)^3}{3}\right]_0^3$$

$$=243 - \left[\frac{(3+6)^3}{3} - \frac{(0+6)^3}{3}\right]$$

=243-[243 − 72]

=243- 171=72

مسألة(١)

ارسم الشكل البياني للدوال التالية وقدر المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة .

من x=0 إلى x=5 ، $y_1 = x$ ، $y_2 = 3$

الحـــــــــــل :-

الرسم البياني :-

-ـــ تقدير المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة:

$$A=\int_0^3 (3-X) + \int_3^5 (X-3)dx$$

$$=\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5$$

$$\left[\left(\mathbf{3}(\mathbf{3}) - \frac{(\mathbf{3})^2}{\mathbf{2}}\right) - \left(\mathbf{3}\ (\mathbf{0}) - \frac{(\mathbf{0})^2}{\mathbf{2}}\right)\right] + \left[\left(\frac{(\mathbf{5})^2}{\mathbf{2}} - \mathbf{3}(\mathbf{5})\right) - \left(\frac{(\mathbf{3})^2}{\mathbf{2}} - \mathbf{3}(\mathbf{3})\right)\right]$$

$$= \left(\left(9 - \frac{9}{2}\right) - (0) - (0)\right) + \left(\left(\frac{25}{2} - (15)\right) - \left(\frac{9}{2}\right) - (9)\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right) + (-2.5) - \left(\frac{9}{2}\right) =$$

=4.5+(-2.5)-(-4.5)=4.5-2.5+4.5=6.5

مسألة(٢)

ارسم الشكل البياني للدوال التالية وقدر المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة .

من x=0 إلى x=3 ، $y_1 = 6x$ ، $y_2 = 2x^2 - 8x + 12$

الحل:-

_ الرسم البياني

تقدير المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة

$$A=\int_0^1 (2x^2 - 8x + 12) - (6x)dx + \int_1^3 (6x) - (2x^2 - 8x + 12)dx$$

$$=\int_0^1 (2x^2 - 14x + 12)dx + \int_1^3 (-2x^2 + 14x - 12)dx$$

$$=\left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{14x^2}{2} + 12x\right) \right]_0^1 + \left[\left(\frac{-2x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 12x\right) \right]_1^3$$

$$=\left(\left\langle\frac{2(1)^3}{3} - \frac{14(1)^2}{2} + 12(1)\right\rangle - \left\langle\left\langle\frac{2(0)^3}{3} - \frac{14(0)^2}{2} + 12(0)\right\rangle\right\rangle\right) +$$

$$\left(\left\langle\frac{-2(3)^3}{3} + \frac{14(3)^2}{2} - 12(3)\right\rangle - \left\langle\frac{-2(1)^3}{3} + \frac{14(1)^2}{2} - 12(1)\right\rangle\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3} - 7 + 12 - 0 - 0 + 0\right) + \left(\left\langle\frac{-54}{3} + \frac{126}{2} - 36\right\rangle - \left\langle\frac{-2}{3} + 7 - 12\right\rangle\right)$$

$$=5\frac{2}{3} + \left(\langle -18 + 63 - 36\rangle - \left\langle\frac{-2}{3} - 5\right\rangle\right)$$

$$=5\frac{2}{3} + (9) - \left(\frac{-2}{3} - 5\right)$$

$$A=5\frac{2}{3} + \left(9 + \frac{2}{3} + 5\right)$$

$$A=5\frac{2}{3}+14\frac{2}{3} = 20\frac{1}{3}$$

مسألة(٣)
ارسم الشكل البياني للدوال التالية وقدر المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة.

من x=0 إلى x=6 $y_{1=x+2}$ ، $y_2 = 12 - 1.5x$

الحـــــــــل:-
الرسم البياني

تقدير المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة

$$A=\int_0^4 \left[(12 - 1.5x) - (x + 2)\right]dx + \int_4^6 [(x + 2) - (12 - 1.5x)]dx$$

$$=\int_0^4 (-2.5x + 10)dx + \int_4^6 (2.5x - 10)dx$$

$$=\left(\frac{-2.5x^2}{2} + 10x\right)\Big|_0^4 + \left(\frac{2.5x^2}{2} - 10x\right)\Big|_4^6$$

$$=(-1.25x^2 + 10x)|_0^4 + (1.25x^2 - 10x)|_4^6$$

$$=\big(\langle -1.25(4)^2 + 10(4)\rangle — 1.25(0)^2 + 10(0)\rangle\ \big) +$$
$$(\ \langle 1.25(6)^2 - 10(6)\rangle - \langle\ 1.25(4)^2 - 10(4)\rangle\ )$$

$$A=(\langle -1.25(16) + 40\rangle - \langle\ 0 + 0\rangle\ ) + (\langle 1.25(36) - 60\rangle - \langle 1.25(16) - 40\rangle)$$

$$=(\ \langle -20 + 40\rangle - (0)\ ) + (\ (45 - 60) - (20 - 40)\ )$$

A=(20) + ((-15) –(-20))

A=20+5=25

التطبيق الرابع

١)- أوجد فائض المنتج لكل من منحنيات العرض التالية عند المستوى المحدد:-

$p=Q^2+40Q+60$ $p^*=85$ ، $Q^*=5$

٢)- أوجد فائض المستهلك لكل من منحنيات الطلب التالية عند المستوى المحدد:-

$p=375-3Q^2$ $p^*=75$ ، $Q^*=10$

٣)- ارسم الشكل البياني للدوال التالية وقدر المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة .

$y_1=x^2+10$ $y_2=-x^2+4x+2$

من$x=0$ إلى $x=3$

الحـــــــــل:-

الرسم البياني