- بافتراض أن سوق الموارد غير المتجددة سوق منافسة كاملة وكل شخص يملك تلك الموارد يحاول أن يعظم أرباحه (ريعه) من تلك الموارد عبر الزمن.

وبطبيعة الحال فإن المنتج الرشيد يحاول توقع الأسعار المستقبلية للمورد (P_t) وكذلك تكاليف الاستخراج extraction cost (MC_t) وبالتالي العوائد أو الأرباح ($R_t = P_t - MC_t$).

وعند بيع الوحدة الآن ($t = 0$) فإن المنتج يحصل على ربح R_0 ولكن في نفس الوقت ذلك يشمل تكلفة الفرصة البديلة والتي يطلق عليها أحياناً تكلفة الاستخدام الحدية (Marginal user cost) والتي تمثل أعلى عائد تم التضحية به لو تم الاحتفاظ بالوحدة المباعة لبيعها في وقت آخر.

وبمقارنة العوائد الحالية مع العوائد المستقبلية فإن المنتج سيبيع المورد في حالة تحقق الشرط التالي:

$$R_0 \geq R_t/((1+r)^t$$

لجميع الفترات الزمنية المستقبلية.

* (قاعدة هوتلينج Hotelling's Rule)

~~المنتج~~ في حالة تزايد العائد المتوقع سنوياً بمعدل يساوي معدل الخصم فإن المنتج سيحقق نفس العائد بغض النظر عن الفترة الزمنية لبيع المورد في السنة الحالية أو السنوات القادمة ويمكن صياغة ذلك رياضياً كالتالي:

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة .... الموضوع: ....

$$R_0 = \frac{R_1}{1+r} = \frac{R_2}{(1+r)^2} = \dots\dots = \frac{R_T}{(1+r)^T}$$

وعليه فإن المنتج إذا توقع أن العائد (Rent) سيزيد بمعدل أعلى من معدل الخصم فإن المنتج الرشيد سيحجب المورد من السوق وبالتالي تزيد الأسعار الحالية للمستوى الذي يؤدي لزيادة العائد بنفس معدل الخصم. أما إذا كان العائد المتوقع سوف يزداد بمعدل أقل من معدل الخصم فإن المنتج الرشيد سيبيع كميات أكبر في الوقت الحاضر وبالتالي تقل الأسعار للمستوى الذي يؤدي لتساوي العائد مع معدل الخصم.

مثال: نموذج استخراج المورد بتكاليف حدية ثابتة:

بافتراض أن إجمالي المخزون من المورد = ٣٠ وحدة وأن
دالة الرغبة في الدفع (~~منحنى~~ منحنى الطلب العكسي) $WTP_t = 10 - Q_t$
وأن دالة الرغبة في البيع (منحنى العرض العكسي) $MC_t = 2$
وأن معدل الخصم $r = 0.1$

المطلوب:
(١) احسب العائد الأمثل والسعر وكذلك الجدول الزمني للاستخراج؟
(٢) حدد الفترة الزمنية المثلى لاستخراج المورد.

الحل:

لحل هذه المسألة فإن الطريقة المثلى هو حلها بطريقة رجعية من الفترة الزمنية الأخيرة عودة مع البداية كما يلي:

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة .... الموضوع: ....

* بطبيعة الحال لا نعلم كم عدد السنوات الممكنه استخراج المورد فيها ولكننا نعلم أنه في السنة الأخيرة سيكون الكميه المستخرجة من المورد تساوي صفر $Q_T = 0$ وبالتعويض في معادلة الطلب العكسيه يمكن معرفة السعر $WTP_T = 10 - 0 = 10$

وبالتالي فإن العائد يمكن حساب $R_T = P_T - MC_T$

(التكاليف ثابته مع مدى السنوات) $= 10 - 2 = 8$

الآن علمنا العائد في السنة T وباستخدام قاعدة هوتلنج نعلم أن الشرط هو:

$$\frac{R_{T-1}}{(1+r)^{T-1}} = \frac{R_T}{(1+r)^T}$$

وبالتالي فإن العائد في السنة السابقه يمكن حسابه بقسمه العائد R_T على معدل الخصم

$$R_{T-1} = \frac{R_T}{1+r} = \frac{8}{1.1} = 7.27$$

وحيث أن $P_{T-1} = R_{T-1} + MC$

يمكن حساب السعر في السنه $T-1$ ويكون

$$P_{T-1} = \cancel{8}\,7.27 + 2 = 9.27$$

وعند حساب السعر يمكن حساب الكميه المستخرجه خلال تلك السنه

$$WTP_{T-1} = 10 - Q_{T-1}$$

$$\Rightarrow Q_{T-1} = 10 - P_{T-1}$$

$$= 10 - 9.27 = \boxed{0.73 \text{ Unit}}$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب السنة السابقة R_{T-2}

$$R_{T-2} = \frac{R_{T-1}}{1.1} = \frac{7.27}{1.1} = \boxed{6.61}$$

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة .... الموضوع : ....

نحسب السعر للسنة T-2

$$P_{T-2} = R_{T-2} + MC$$
$$= 6.61 + 2 = 8.61$$

ويمكن حساب المخزون المستخرج لسنة T-2 كالتالي :

$$Q_{T-2} = 10 - 8.61 = 1.39$$

وهكذا يمكن الاستمرار في الحساب حتى نصل إلى المخزون بمقدار ٣٠ وحدة حيث تم حل المسألة بطريقة عكسية ويمكن إيضاح ذلك في الجدول التالي :

	الزمن (Time)	R_t	MC_t	P_t	Q_t	المخزون X_t
المستقبل	10	8	2	10	0	0
	9	7.27	2	9.27	0.73	0.73
	8	6.61	2	8.61	1.39	2.12
	7	6.01	2	8.01	1.99	4.11
	6	5.46	2	7.46	2.54	6.64
	5	4.97	2	6.97	3.03	9.67
	4	4.52	2	6.52	3.48	13.16
	3	4.11	2	6.11	3.89	17.05
	2	3.73	2	5.73	4.27	21.32
	1	3.39	2	5.39	4.61	25.93
الحاضر	0	3.08	2	5.08	4.92	30.84

ملاحظة يمكن حل هذه المسألة باستخدام برنامج (Excle).

مثال (٢): نموذج الاستخراج خلال فترتين زمنيتين:

Two-Period Resource extraction model.

نفترض أنه لدينا المعطيات التالية:

$Q_D = 200 - 2P$ دالة الطلب للمورد

$Q_S = 10 + P$ ~ العرض للمورد

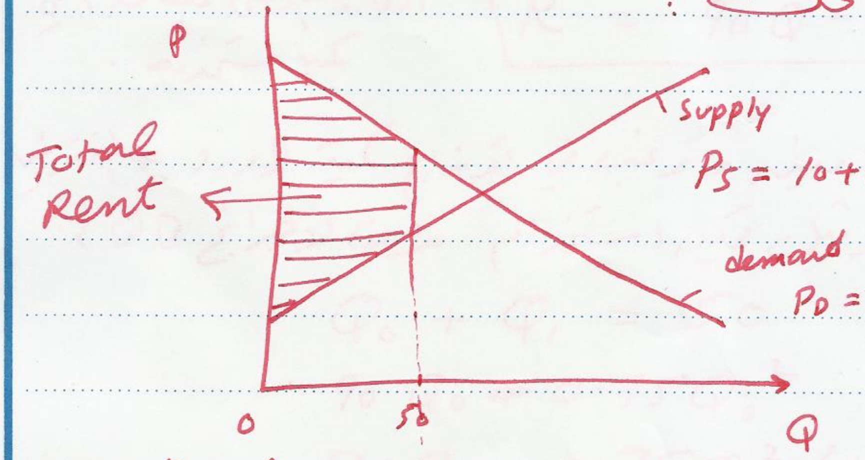
معدل الخصم $r = 0.1$ وإجمالي المخزون $X = 50$ وحدة.

المطلوب:

حدد الكميات المثلى للفترتين Q_0 ، Q_1 والأسعار P_1 ، P_0 وكذلك R_0 ، R_1 والتي تحقق أقصى عائد ممكن.

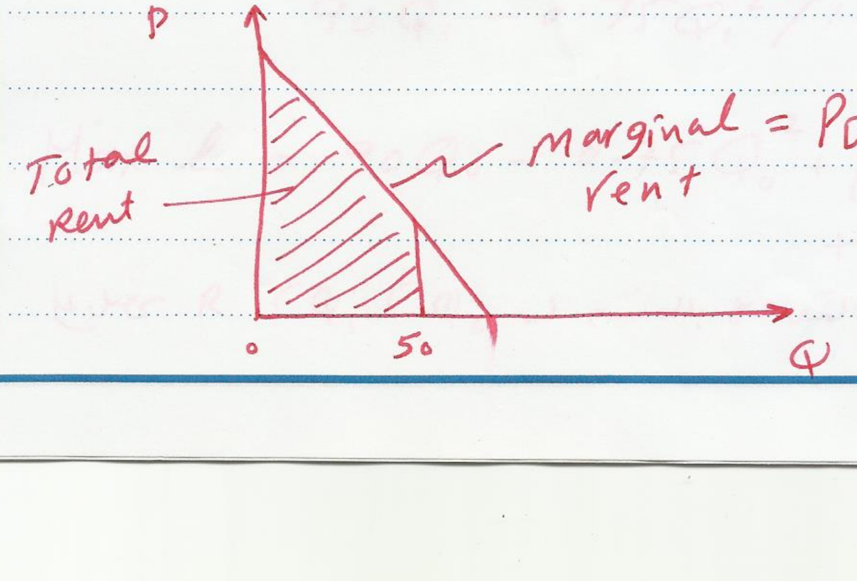
الحل:

العرض البياني للمسألة:



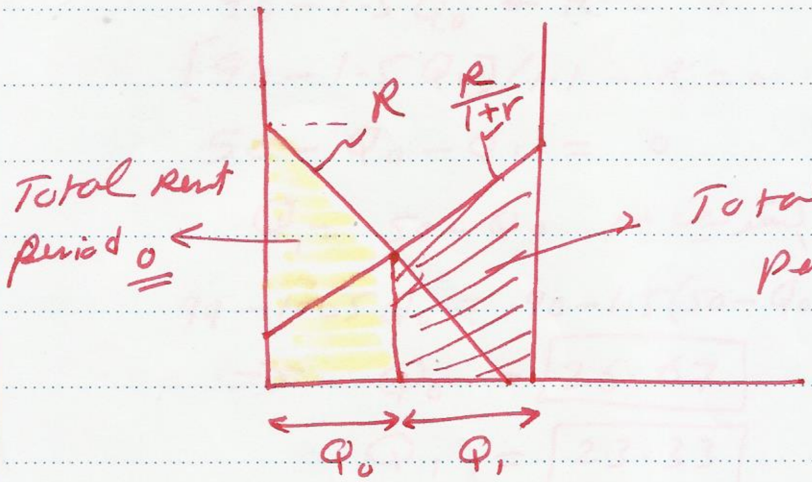
$P_S = 10 + Q$

$P_D = 100 - 0.5Q$



marginal rent $= P_D - P_S = 90 - 1.5Q$

في حالة فترتين زمنيتين



يمكن حل ذلك رياضياً باستخدام التكامل حيث :

$$\text{Total Rent} = \int_0^Q (90 - 1.5Q)\,dQ$$

وبالتالي $\boxed{R = 90Q - 0.75Q^2}$ العائد الإجمالي المتحصل عليه لأي كمية ستنتجه .

وحيث أنه لدينا فترتين زمنيتين ونرغب في توزيع كمية المورد على الفترتين بما يحقق العائد الأمثل يمكن استخدام طريقة لاجرانج كالتالي:

$$Q_0 + Q_1 = 50$$

$$90Q_0 - 0.75Q_0^2$$

$$90Q_1 - 0.75Q_1^2 / 1.1$$

$$\text{Max } L = 90Q_0 - 0.75Q_0^2 + [90Q_1 - 0.75Q_1^2]/1.1 + R[50 - Q_0 - Q_1]$$

ويتم حل المعادلات الثلاثة بالتفاضل بالنسبة لـ Q_0 ، Q_1 ، R يتحصل على

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة .... الموضوع: ....

$$90 - 1.5Q_0 - R = 0 \rightarrow (1)$$

$$[90 - 1.5Q_1]/1.1 - R = 0 \rightarrow (2)$$

$$50 - Q_0 - Q_1 = 0 \rightarrow (3)$$

وبحل المعادلة (1) ، (2) وبالتعويض عن $Q_1 = 50 - Q_0$

نحصل على المعادلة $99 - 1.65Q_0 = 90 - 1.5(50 - Q_0)$

$$\Rightarrow Q_0 = \boxed{26.67} \qquad P_0 = \boxed{86.67}$$

$$Q_1 = \boxed{23.33} \qquad P_1 = \boxed{88.33}$$

$$R_0 = \boxed{50} \qquad R_1 = \boxed{55}$$