تطبيقات على التوزيعات الاحتمالية

أولاً: *التوزيعات الاحتمالية المتقطعة(المنفصله) (Discrete Probability Distributions):*

سوف نقوم بدراسة بعض التوزيعات المتقطعة الخاصة لأهميتها في الحياة العملية لتفسير كثير من الظواهر التطبيقية، كما نبين في الجدول التالي بعض الدوال الإحصائية للتوزيعات الاحتمالية المتقطعة وصيغها المتوفرة في إكسل:

دالة إكسل	دوال إحصائية
BINOMDIST()	BINOMIAL
Poisson()	Poisson

توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

في كثير من التجارب تكون النتيجة فيها أحد أمرين إما نجاح أو فشل وتتألف هذه التجارب من تكرار وإعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض، فمثلا عند رمي زهرة النرد فإن النتيجة تكون إما عددا فرديا أو عدداً زوجياً وتكون نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى واحتمال النجاح p مقدار ثابت في كل محاولة.

والدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين كالتالي :

$$f(x) = p(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

$$0 < P < 1$$

من خواصه :

الــتوقـــــع (المتوسط)	np
التبــــايـــن	npq

حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين

$$P(X \le a) = f(0) + f(1) + \ldots + f(a)$$

$$P(X \ge a) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(n)$$

مثال

في مصنع لإنتاج شرائح البطاطس لوحظ أن ٣٠% من البطاطس المنتجة معيبة . تم اختيار عينة عشوائية حجمها ٥ عبوات من أحد خطوط الإنتاج بغرض فحصها ما احتمال وجود وحدة واحدة على الأقل معيبة $P(X \ge 1)$.

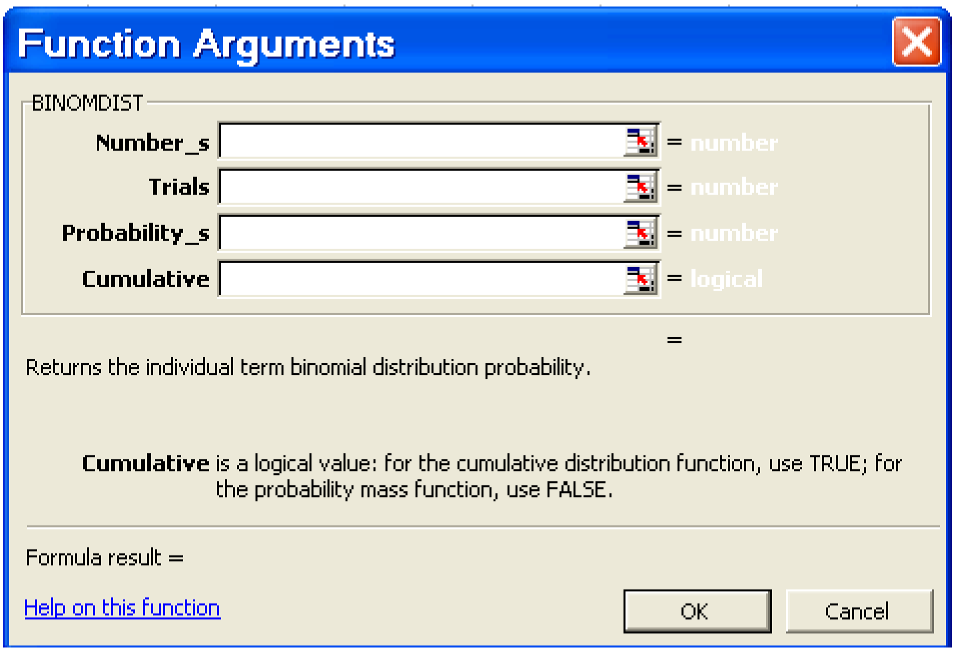
الحل باستخدام اكسل

الاحتمال هو

$$P(X \ge 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$
$$= 1 - f(0)$$

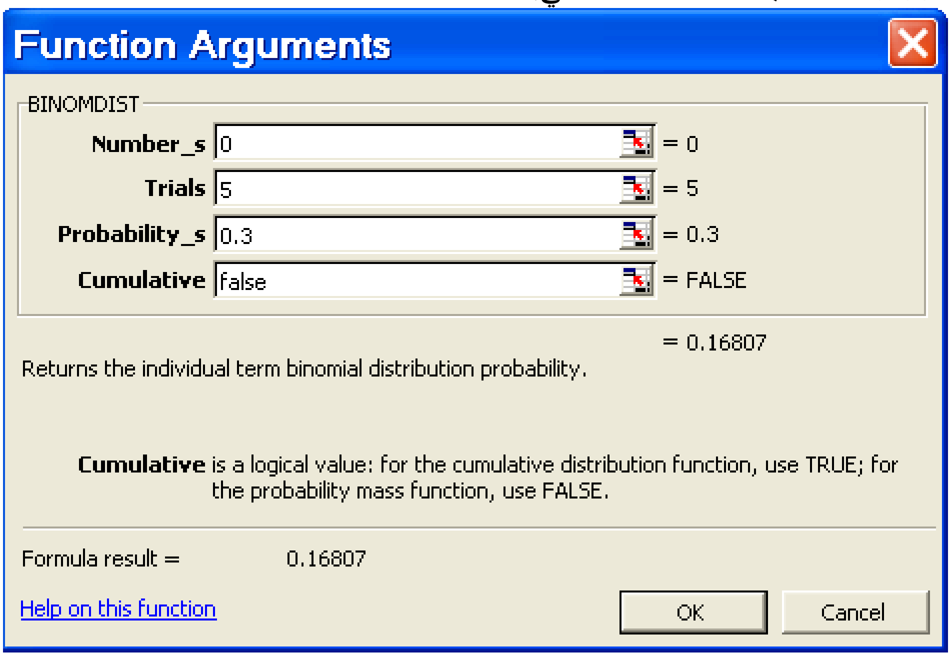
سوف نقوم بحساب $f(0)$

نختار الأمرBINOMDIST كالتالي:



يظهر في المربع السابق

- Number_s وهو المتغير العشوائي X=0,1,…,5 أو عدد تجارب النجاح، حيث في هذا المثال تساوي 0
- Trials عدد التجارب المستقلة وفي هذا المثال تساوي 5
- Probability_s احتمال النجاح ويساوي 0.3
- Cumulative وهي الدالة التراكمية، نضع أما True لحساب الدالة التراكمية أو نضع False لحساب دالة الكثافة كالتالي:



الناتج في مربع الحوار السابق $f(0) = 0.16807$ ويكون احتمال وجود وحدة معيبة على الأقل هي $P(X \geq 1) = 1 - 0.16807 = 0.83$

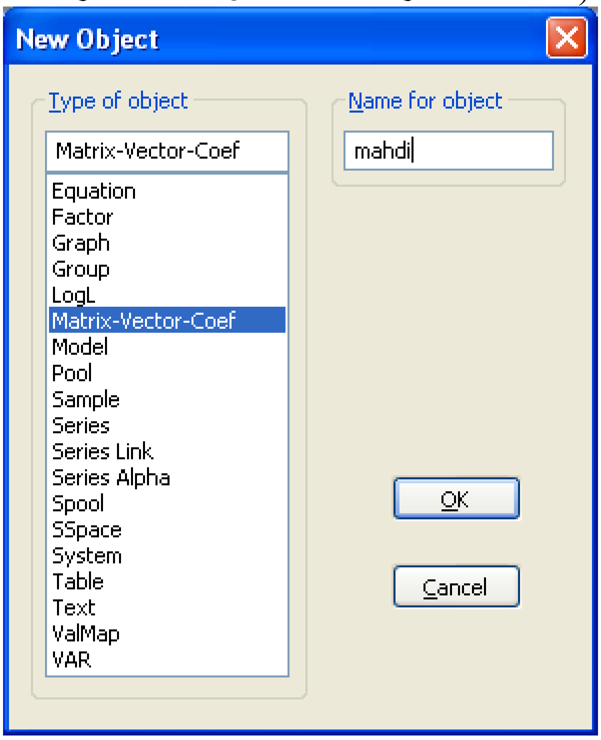
الحل باستخدام برنامج Eviews:

(١) ننشئ ملف في برنامج Eviews لبيانات غير مؤرخة عدد ١٠مشاهدات ونسمي الملف Dis 326 ثم نحفظ الملف.

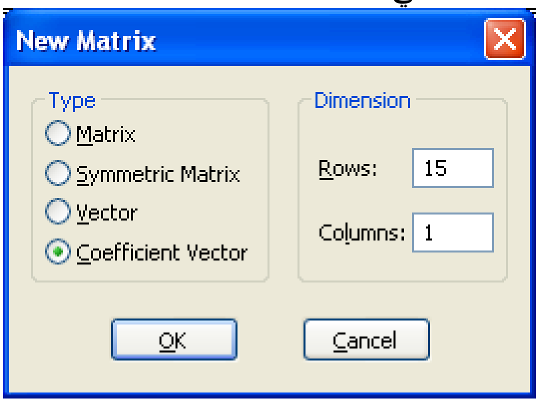
(٢) ننشئ متجه لحفظ النتائج فيه بإتباع الخطوات التالية:

Objects/new object

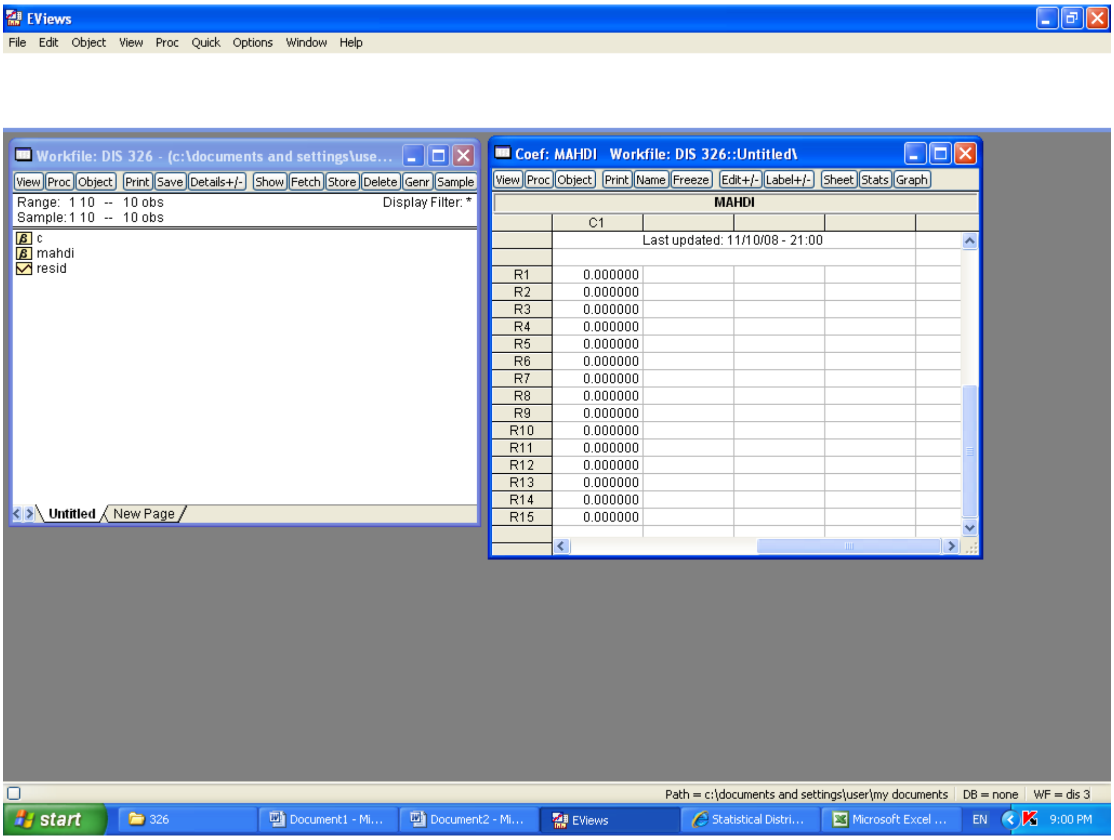
يظهر لك الشكل التالي (لاحظ أننا اخترنا Matrix وسمينا المتغير Mahdi



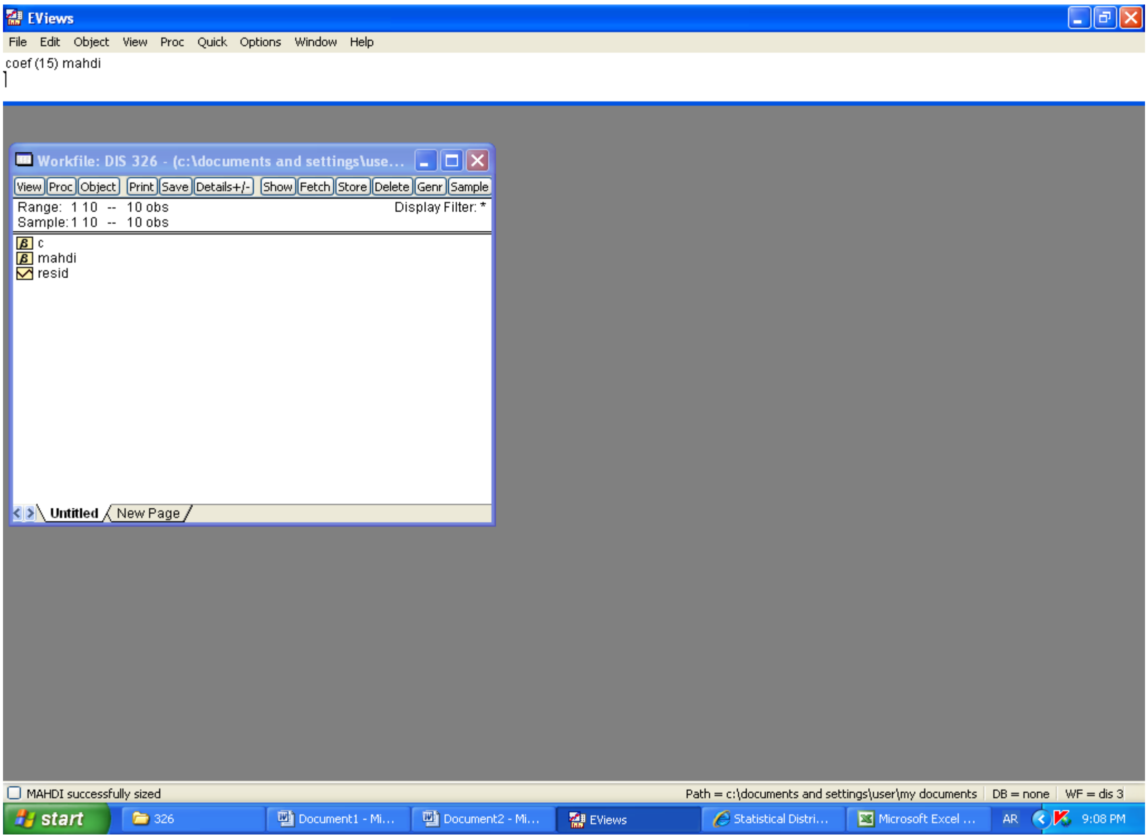
بعد نختار Ok يظهر لك الشكل التالي



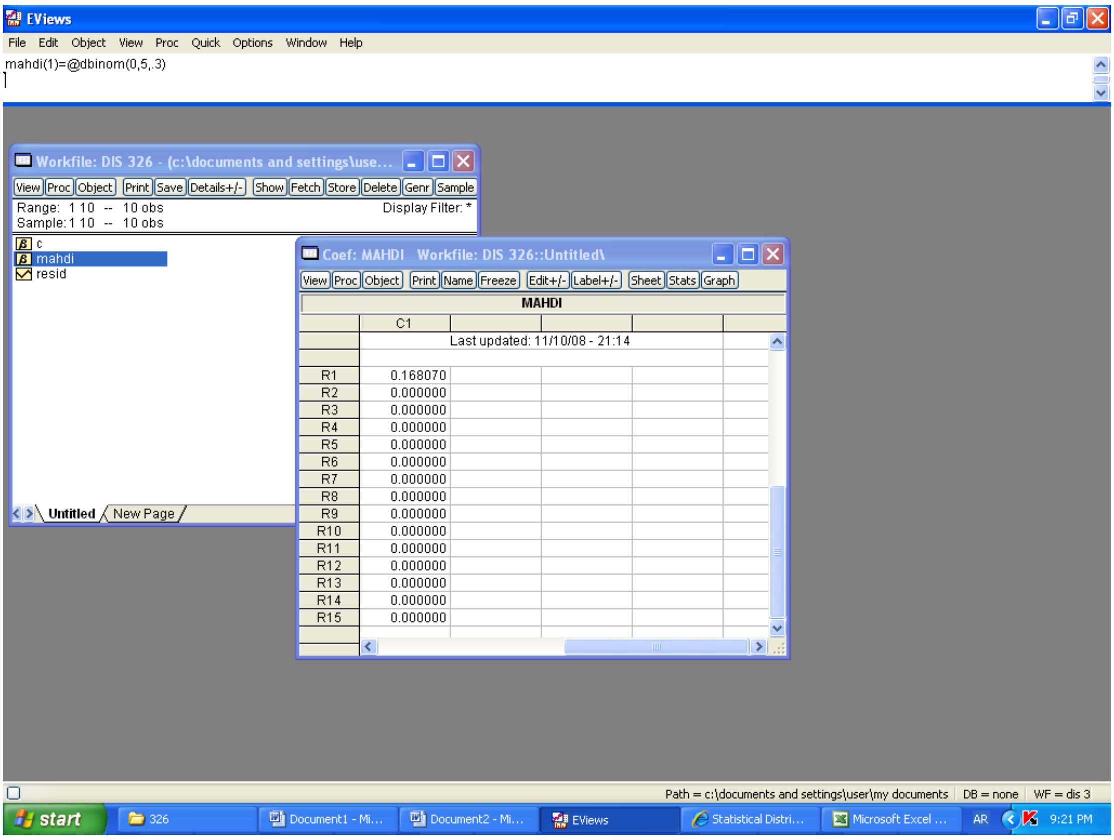
لا حظ أننا حددنا عدد الصفوف بـ ١٥ واخترنا متجه معاملات Coefficient Vector ثم نختار Ok يظهر لنا التالي:



ملاحظة: (بدلا من الخطوات السابقة لإنشاء المتجه يمكن عمل المتجه بخطوة واحدة بكتابة الأمر التالي   coef (15) mahdi   في شاشة الأوامر ثم الضغط على enter تظهر لنا



ولحساب احتمال x=0 نكتب **الأمر** التالي في شاشة الأوامر mahdi(1)=@dbinom(0,5,.3) حيث mahdi تشير لأسم الملف الذي ستخزن فيه النتيجة في الصف رقم ١ و dbinom تشير للكثافة الاحتمالية للتوزيع ثنائي الحدين و الأرقام بين الأقواس (0,5,.3) تشير لقيمة المتغير العشوائي x=0 و n=5 و p=0.3. نحصل على النتيجة كما في الشكل التالي حيث أن الاحتمال يساوي 0. 16807 وهي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها ببرنامج اكسل



Distribution التوزيع	**Functions** الدالة	**Density/Probability Function** دالة الكثافة الاحتمالية
Binomial ثنائي الحدين	@cbinom(x,n,p), الدالة التوزيع التراكمية (CDF) @dbinom(x,n,p) الدالة التوزيع الاحتمالي (bdf) @qbinom(s,n,p), عكس (CDF)	$\Pr(x, n, p) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$ if $x = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, and 0 otherwise, for $0 \le p \le 1$.

توزيع بواسون (Poisson Distribution)

إن التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة تسمى تجارب بواسون، فعدد مرات الاستهلاك في الأسبوع وعدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مكتب كل عشرة دقائق وعدد الطلبات التي تتم في أحد المطاعم خلال نصف ساعة جميعها أمثلة على تجارب بواسون.

ودالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون كالتالي:

$$p(x;\lambda) = f(x) = p(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \qquad x = 0,1,2,\ldots;\lambda > 0$$

من خواصه:

الــتوقـــــع	λ
التبـــايــن	λ

حساب الاحتمالات باستخدام توزيع بواسون:

$$P(X \le a) = f(0) + f(1) + \ldots + f(a)$$

$$P(X \ge a) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots\ldots$$
$$= 1 - f(0)$$

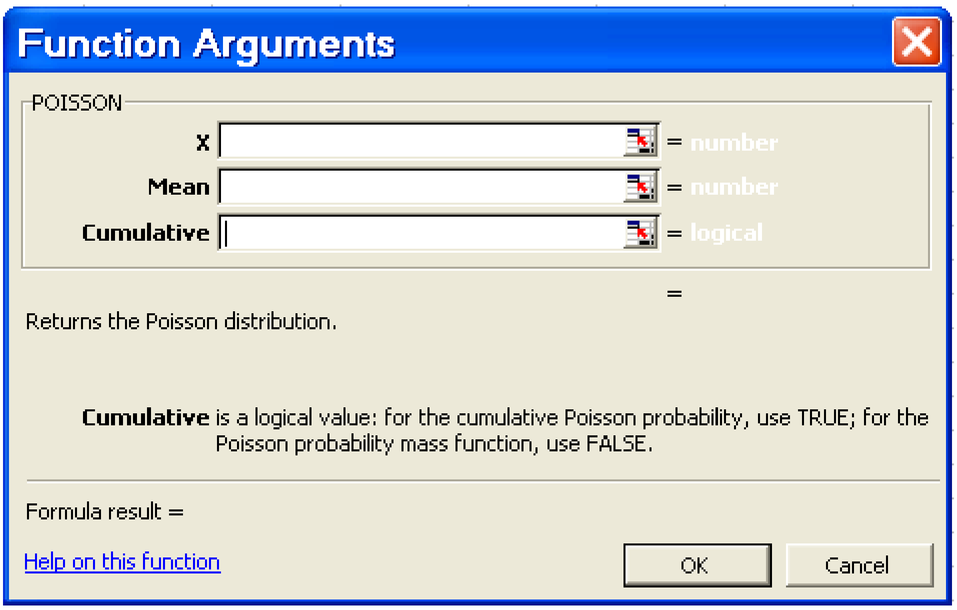
مثال

إذا كان المعدل الأسبوعي لاستهلاك التمور في مدينة الرياض يساوي ٧ كجم أسبوعيا ما احتمال استهلاك ٢كجم في اليوم التالي

الحل باستخدام اكسل

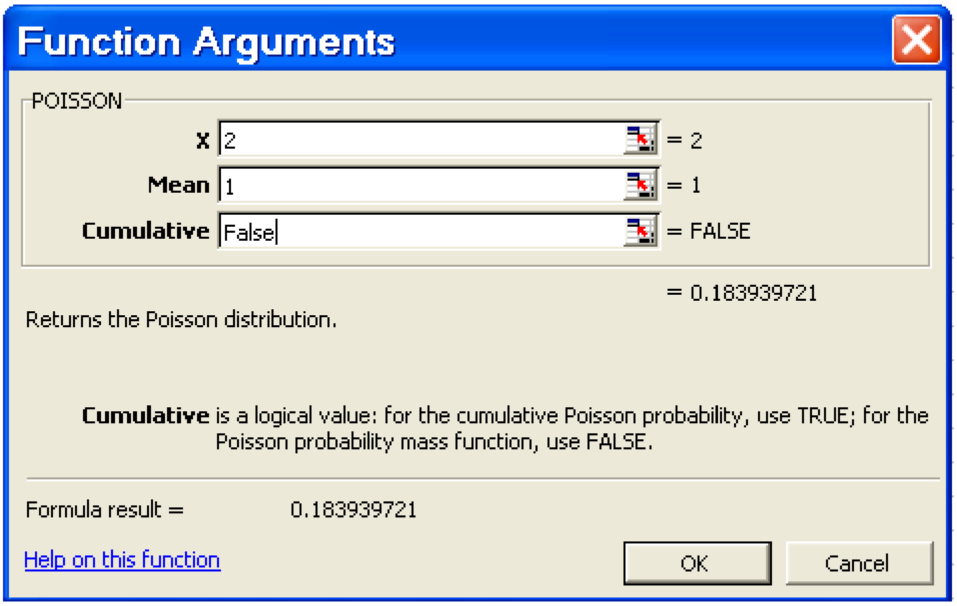
نريد حساب احتمال $P(X = 2) = f(2)$ ويكون المتوسط $\lambda = \frac{7}{7} = 1$

نختار الأمر Poisson كالتالي:



نجد من مربع الحوار السابق:

- X هي كمية الاستهلاك
- Mean المتوسط
- Cumulative تقوم بحساب الدالة التراكمية عند وضع True ودالة الكثافة عند وضع False كالتالي:



تظهر قيمة الاحتمال تساوي 0.18 أي أن $f(2) = 0.18$

ملاحظة: عندما نريد حساب $P(X < 2)$ فلابد أن ننقص قيمة الاحتمال فتصبح $P(X = 1)$ ثم نقوم بعد ذلك بحسابها في اكسل وذلك لعدم وجود التساوي

<u>الحل باستخدام Eviews:</u> الأوامر في حالة التوزيع هي:

Distribution التوزيع	**Functions** الـدال	**Density/Probability Function** دالة الكثافة الاحتمالية
Poisson بواسون	`@cpoisson(x,m)`, `@dpoisson(x,m)`, `@qpoisson(p,m)`, `@rpoisson(m)`	$\Pr(x, m) = m^x e^{-m}/x!$ if $x = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, and 0 otherwise, for $m > 0$.

على نفس الملف الذي سبق عمله قم بالاتي:

ولحساب احتمال x=2 نكتب **الأمر** التالي في شاشة الأوامر mahdi(2)=@dpoisson(2,1) حيث mahdi تشير لأسم الملف الذي ستخزن فيه النتيجة في الصف رقم 2 و dpoisson تشير للكثافة الاحتمالية للتوزيع ثنائي الحدين و الأرقام بين الأقواس (2,1) تشير لقيمة المتغير العشوائي ٢ و المتوسط λ ١ نحصل على النتيجة حيث أن الاحتمال يساوي 0.183940 وهو نفس النتيجة التي تم الحصول عليها ببرنامج اكسل

ثانياً: التوزيعات الاحتمالية المتصلة :(Continuous Probability Distributions)

سوف نعرض في هذا الجزء بعض من التوزيعات المتصلة التي لها أهمية في التطبيقات العملية، كما نبين في الجدول التالي بعض الدوال الإحصائية للتوزيعات الاحتمالية المتصلة وصيغها المتوفرة في إكسل:

دوال إحصائية	دالة اكسل
NORMAL	NORMDIST ()
STANDARDNORMAL	NORMSDIST ()
T distribution	TDIST ()
Chi-Square Distribution	CHIDIST ()
The F Distribution	FDIST ()

ملاحظة: هناك بعض التوزيعات المتصلة الأخرى المتوفرة في اكسل مثل التوزيع الآسي (EXPONDIST) وتوزيع جاما (GAMMADIST) وتوزيع ويبل (WEIBULL) ويمكن معالجتها بنفس طريقة التوزيعات التي نستعرضها في هذا الجزء

التوزيع الطبيعي (NORMAL Distribution)

كثير من الظواهر العشوائية التي تنتج عن تجمع متغيرات كثيرة تعطي توزيع تكراري ،فأوجد جاوس صيغة رياضية لدالة كثافة احتمالية تسمى دالة التوزيع الطبيعي تنطبق على أي توزيع تكراري معطى لكثير من القياسات المختلفة وتمثل توزيعاً مثالياً لها.

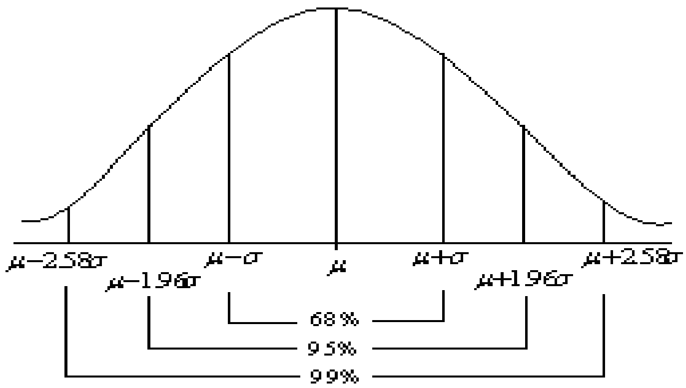
ودالة الكثافه الاحتمالية للتوزيع الطبيعي كالتالي :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty<x<\infty \quad ; \quad -\infty<\mu<\infty, \sigma>0.$$

<u>من خواصه</u>

الـــتوقـــــع	μ
التبـــايـــن	σ^2

المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي يشبه الجرس من حيث الشكل، ومن خصائصه انه متماثل حول المحور الرأسي الذي يمر بقمته، أي يقسم المنحنى الطبيعي إلى قسمين متناظرين (متماثلين) في الشكل والمساحة، كما أن المنحنى له نقطة انقلاب عند $X=\mu\pm\sigma$ ونلاحظ أن 99% من قيم المتغير العشوائي X تقع داخل الفترة $[\mu-2.58\sigma,\mu+2.58\sigma]$ أي انه نادرا ما نجد قيمة من قيم X خارج هذه الفترة، كما أن 95% من قيم المتغير X تقع داخل الفترة $[\mu-1.96\sigma,\mu+1.96\sigma]$، وان 68% منها تقع داخل الفترة $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$، ونوضح ذلك بالشكل التالي:



ويمكن حساب احتمال X في أي فترة نريدها، وذلك بإيجاد قيمة تكامل الدالة الاحتمالية $f(X)$ داخل هذه الفترة، أي إيجاد المساحة المحصورة تحت منحنى هذه الدالة داخل هذه الفترة باستخدام التكامل، ولكن باستخدام حزمة اكسل لن نحتاج إلى حساب ذلك حيث تستطيع الوصول إلى ذلك مباشرة.

مثال

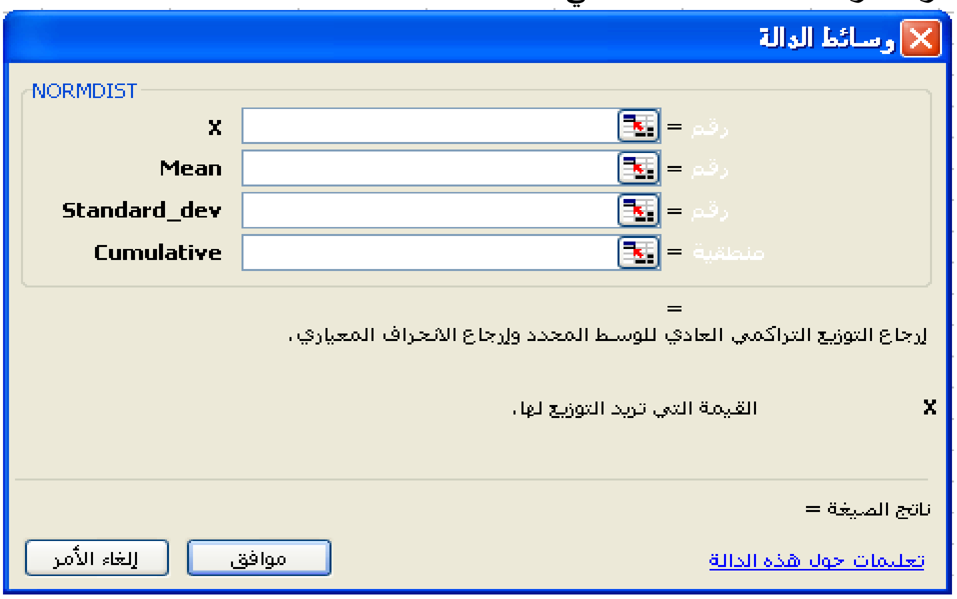
إذا كان $X \sim N(2,25)$ أوجد قيمة a لكلاٍ مما يلي:

$$(1) \qquad P(X < 1) = a$$

$$(2) \qquad P(X < a) = 0.421$$

الحل باستخدام اكسل

(١) نختار الأمر NORMDIST كالتالي :



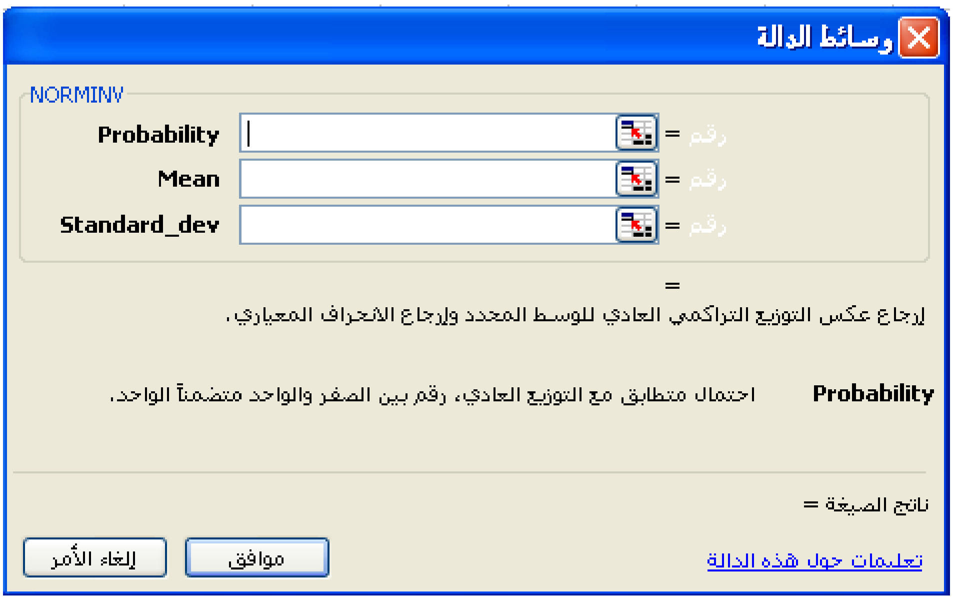
نجد من مربع الحوار السابق:

- X القيمة التي نريد التوزيع لها
- Mean المتوسط
- Standard_dev الانحراف المعياري

- Cumulative تقوم بحساب الدالة التراكمية عند وضع True ودالة الكثافة عند وضع False كالتالي

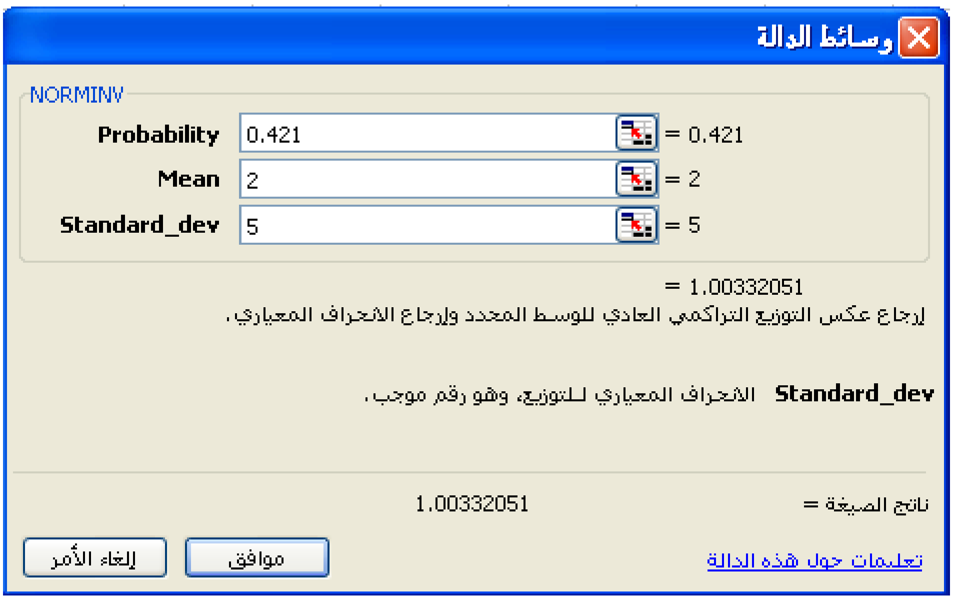
يظهر من مربع الحوار السابق أن $a = 0.421$

(٢) نختار الأمر NORMINV (لإيجاد قيمة x عند معرفة الاحتمال)كالتالي:



من مربع الحوار السابق نجد الأتي

- Probability قيمة الاحتمال
- Mean المتوسط
- Standard_dev الانحراف المعياري



من مربع الحوار السابق يظهر أن $a = 1$

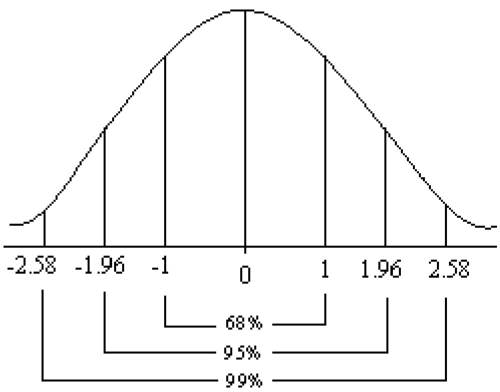
التوزيع الطبيعي القياسي (STANDARD NORMAL Distribution)

في السابق كان دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع الطبيعي يعتمد على قيم μ، σ^2 وتتغير قيمته بتغير هما، لهذا كان من الضروري إيجاد طريقة لاتعتمد على قيم μ، σ^2 لهذا الغرض يستخدم المتغير العشوائي Z التالي:

إذا كان المتغير العشوائيX له توقع $E(X) = \mu$ وتباين $V(X) = \sigma^2$ فإن المتغير العشوائي $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ يكون له توقع $E(Z) = 0$ وتباين $V(Z) = 1$ وتكون الدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Z كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty < z < \infty$$

الشكل التالي يوضح المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي القياسي، والنسب للاحتمالات تحت المنحنى



ومن خواصه :

الــتوقـــــع	0
التبــــايــن	1

والدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي القياسي كالتالي:

$$F(z) = p(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt, \qquad -\infty < z < \infty$$

حساب الاحتمالات باستخدام التوزيع الطبيعي القياسي

قام الإحصائيون بعمل جداول لحساب المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي ووضعها في جدول، بحيث تتمكن من حساب الاحتمالات بالرجوع إلى الجدول ولكن باستخدام حزمة اكسل لن نحتاج الرجوع إلى الجدول بل سنحصل على القيم مباشرة.

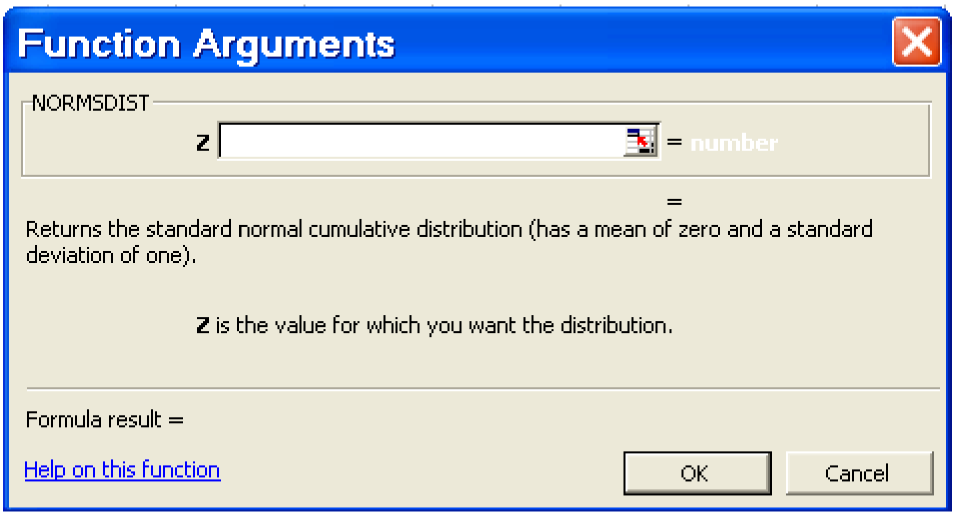
مثال

أوجد قيمة a لكلاٍ مما يلي:

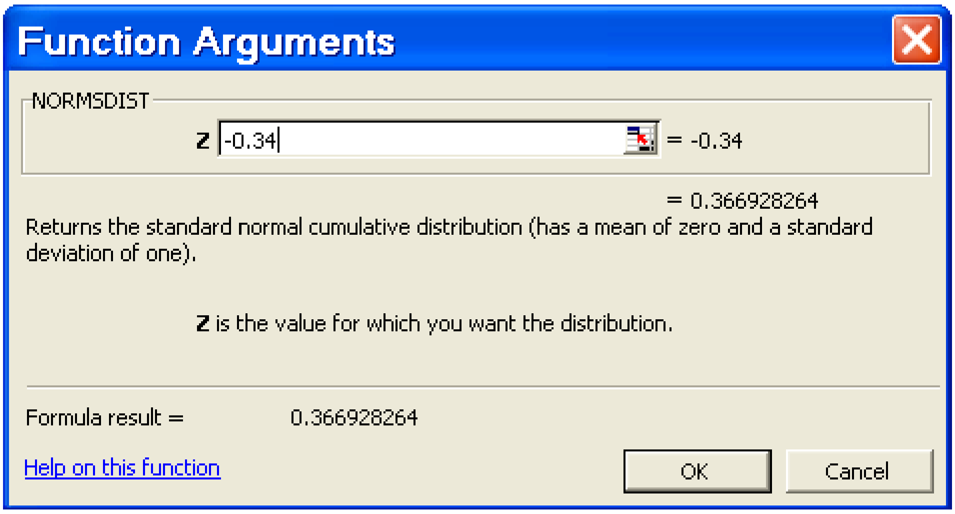
$$(1) \qquad P(Z \leq -0.34) = a$$
$$(2) \qquad P(Z \leq a) = 0.3669$$

الحل باستخدام اكسل

(١)نختار الأمر NORMSDIST يظهر المربع التالي :

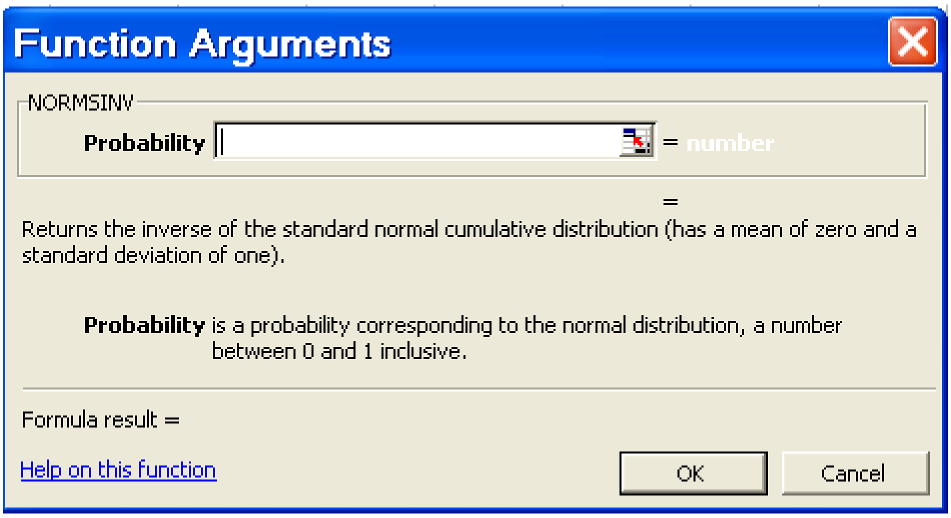


نضع القيم التي نريد حساب احتمالها كالتالي:

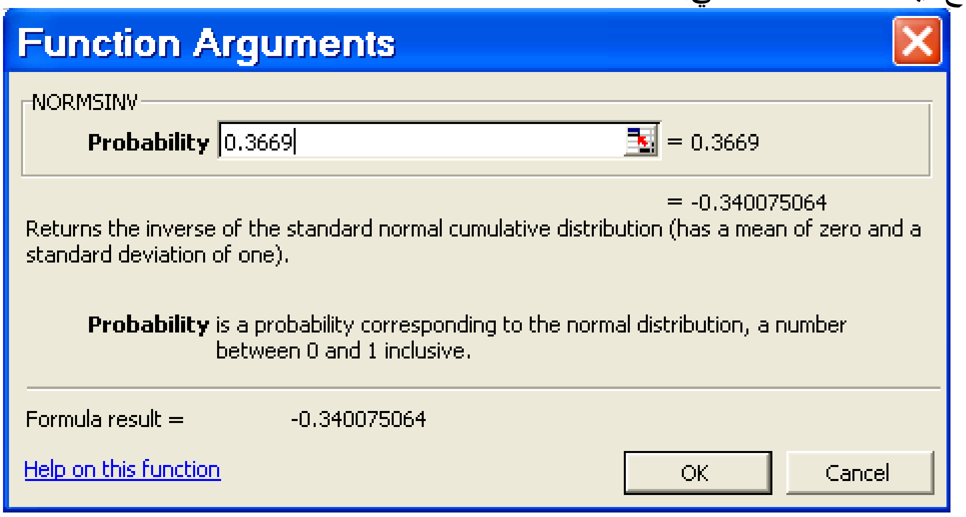


يظهر لك قيمة الاحتمال كما هو واضح يساوي $a = 0.3669$ و هي القيمة التي تظهر نفسها لو استخدمنا جدول التوزيع الطبيعي القياسي.

(٢)نختار الأمر NORMSINV يظهر المربع التالي:



نضع قيمة الاحتمال كالتالي:



نكون بذلك حصلنا على القيمة $a = -0.34$

<u>الحل باستخدام Eviews: (المتوفر في البرنامج هو التوزيع الطبيعي القياسي)</u>

الأوامر في حالة التوزيع الطبيعي القياسي هي:

Distribution **التوزيع**	**Functions** **الـدالـة**	**Density/Probability Function** **دالة الكثافة الاحتمالية**
Normal (Gaussian) **الطبيعي القياسي**	`@cnorm(x)`, `@dnorm(x)`, `@qnorm(p)`, `@rnorm, nrnd`	$f(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ for $-\infty < x < \infty$.

على نفس الملف الذي سبق عمله قم بالاتي:

ولحساب احتمال z=-0.34 نكتب **الأمر** التالي في شاشة الأوامر
mahdi(3)=@ **cnorm** (-0.34) حيث mahdi تشير لأسم الملف الذي ستخزن فيه النتيجة في الصف رقم 3 و**cnorm** تشير للكثافة الاحتمالية للتوزيع القياسي و الرقم بين الأقواس يشير لقيمة z نحصل على النتيجة حيث أن الاحتمال يساوي0.3669 وهي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها ببرنامج اكسل.
لحساب قيمة Z عند معرفة الاحتمال يمكن استخدام الأمر التالي:
mahdi(4)=@ **qnorm** (0.3669) نجد أن قيمة z تساوي -0.34 .

توزيع t (t distribution)

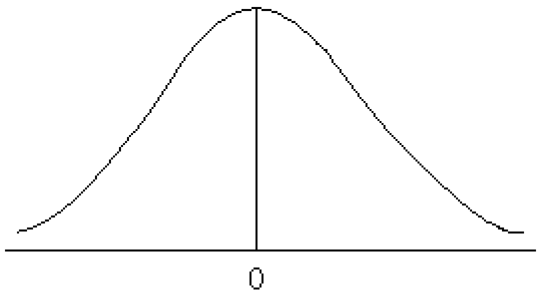
يرجع الفضل في اشتقاق توزيع t إلى العالم الايرلندي Gosset الذي نشر بحث به اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع t تحت اسم مستعار هو توزيع طالب(students distribution)
ويسمى باختصار باسم التوزيع t للمتغير العشوائيT وله درجة حرية v وهي عبارة عن $v = (n-1)$، دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{v}B(1/2, v/2)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{\left(\frac{-v}{2}-\frac{1}{2}\right)}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

<u>من خواصه:</u>

0	الـــتوقـــــع
$\frac{v}{v-2}$	التبـــايـــن

منحنى التوزيع t يشبه الناقوس ومتناظر حول المحور t=0 ، كالتالي:



<u>حساب الاحتمالات باستخدام توزيع t</u>

ولحساب أي احتمالات حول المتغير T يلزم وجود جدول يبين المساحات المختلفة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لكل من قيم v المختلفة، ولكن سيمكننا اكسل من الحصول على الاحتمالات دون الحاجة للرجوع للجداول.

<u>مثال</u>

اوجد قيمة a في كلا من ما يلي:

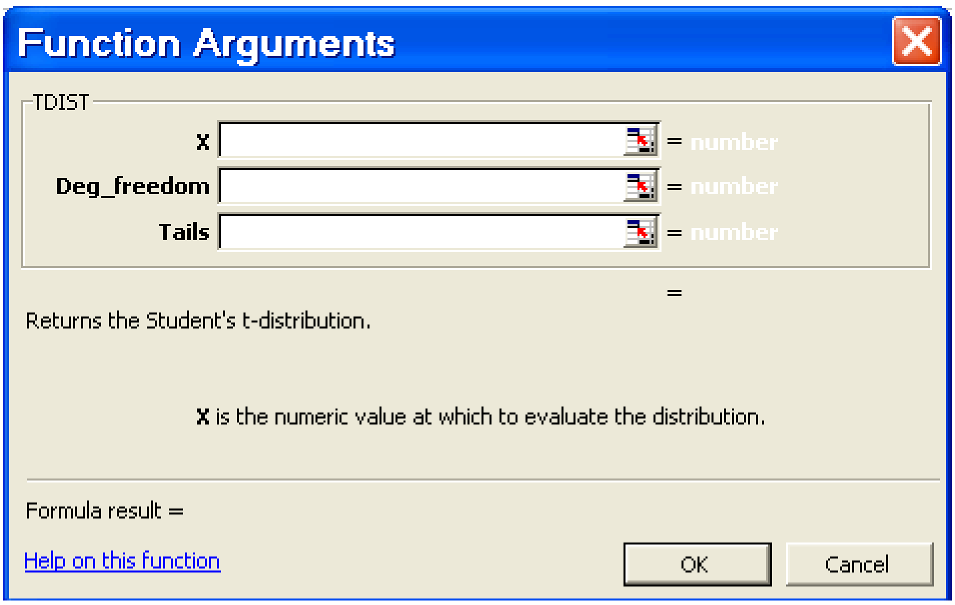
علماً بأن $v = 25$

$$(1) \qquad P(T_v \geq 1.7) = a$$

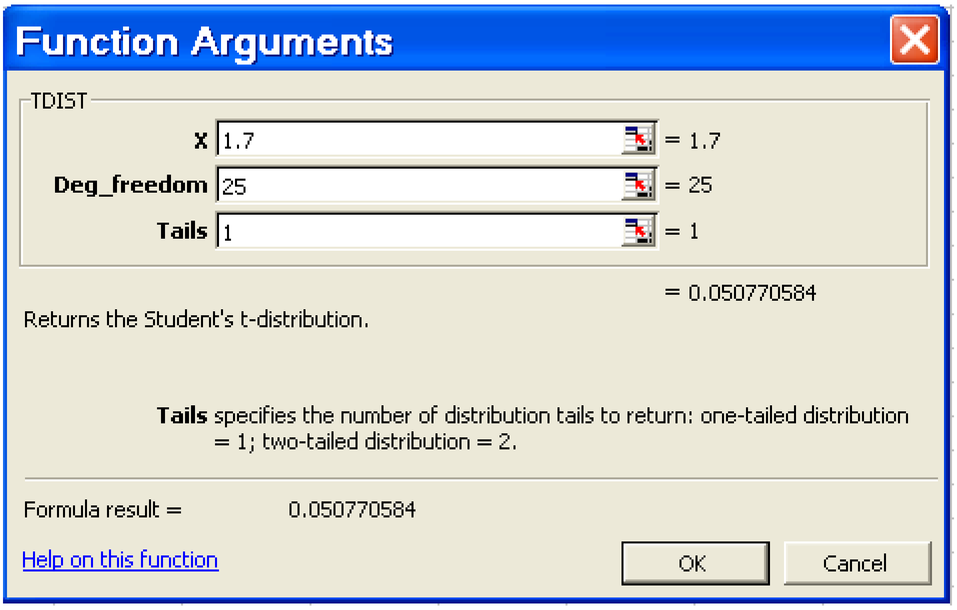
$$(2) \qquad P(T_v \geq a) = 0.05$$

<u>الحل باستخدام اكسل</u>

(١)نختار الأمر TDIST من مربع الخيار كالتالي:

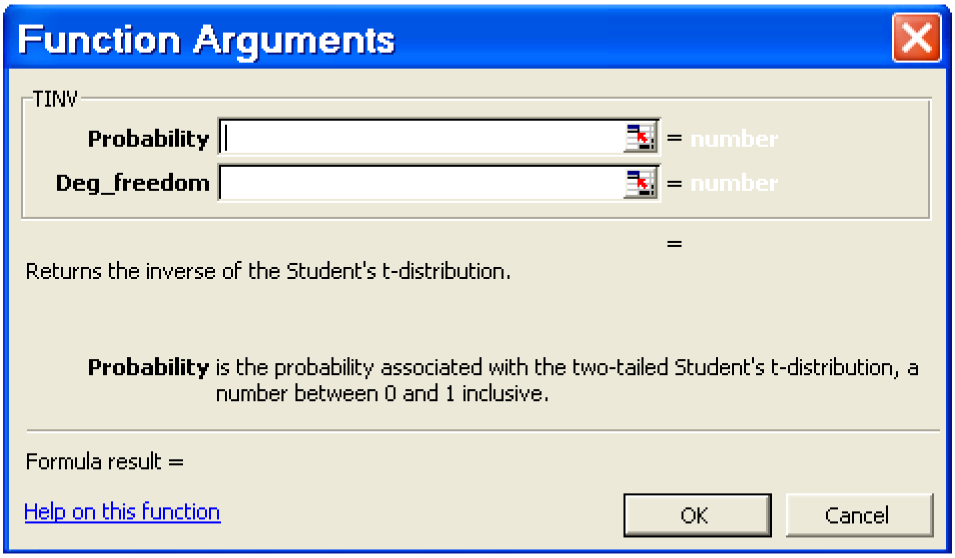


ندخل القيمة التي نريد حساب الاحتمال عندها 1.7 ودرجة الحرية25 ،حيث في مربع الحوار السابق نجد Tails تأخذ القيمة 1 عند حساب الاحتمال لطرف واحد وتأخذ القيمة 2 لحساب الاحتمال لطرفين

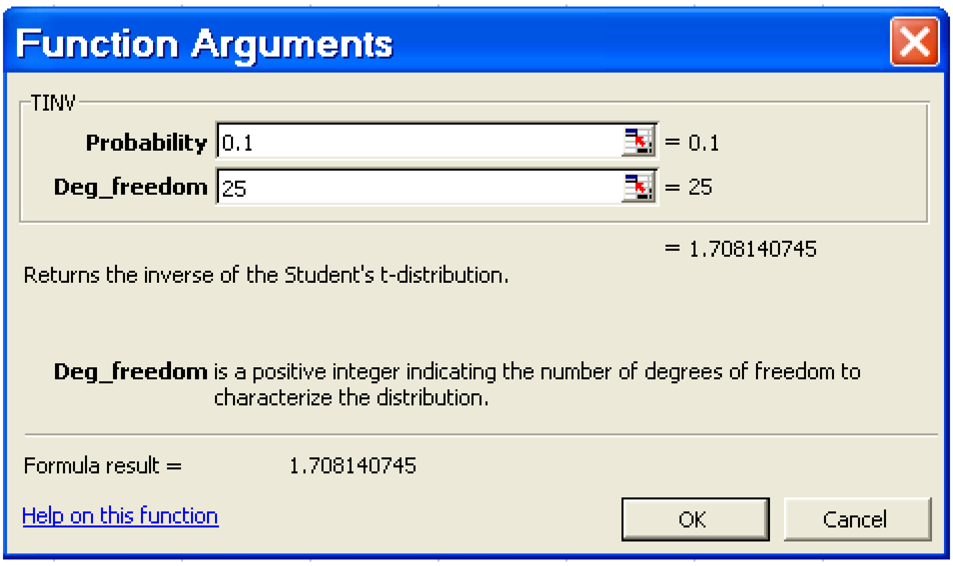


في مربع الحوار السابق قيمة a تساوي 0.05

(٢)نختار الأمر TINV يظهر الشكل كالتالي:



ندخل قيمة الاحتمال 0.1 بدلاً من 0.05 لأن هذا الخيار يقوم بحساب الاحتمال من طرفين ونحن نريده من طرف واحد فلذلك نقوم بضرب الاحتمال في 2 ، $\frac{\alpha}{2} = 0.05 \longrightarrow \alpha = 0.1$ كالتالي:



من مربع الحوار السابق قيمة a تساوي 1.7 و هي القيمة $t_{25,0.05}$ من جدول t

<u>الحل باستخدام Eviews</u>

الأوامر في حالة توزيع T هي:

Distribution التوزيع	Functions الـدالـة	Density/Probability Function دالة الكثافة الاحتمالية
Student's t-distribution توزيع T	@ctdist(x,v), @dtdist(x,v), @qtdist(p,v), @rtdist(v)	$f(x, v) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{(v\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\left(\frac{x^2}{v}\right)\right)^{\frac{-(v+1)}{2}}$ for $-\infty < x < \infty$, and $v > 0$. Note that $v = 1$, yields the Cauchy distribution.

على نفس الملف الذي سبق عمله قم بالاتي:

ولحساب احتمال t =1.7 بدرجة حرية ٢٥نكتب **الأمر** التالي في شاشة الأوامر
mahdi(4)=@ **ctdist** (-1.7,25) حيث mahdi تشير لأسم الملف الذي ستخزن فيه النتيجة في الصف رقم 4 و**ctdist** تشير للكثافة التراكمية لتوزيع t و الرقم بين الأقواس يشير لقيمة t (لاحظ لابد وضع – امام القيمة) نحصل على النتيجة حيث أن الاحتمال يساوي0.05077 و هي نفس النتيجة التي تم الحصول عليها ببرنامج اكسل.

لحساب قيمة t عند معرفة الاحتمال يمكن استخدام الأمر التالي:
mahdi(4)=@ **qtdist** (0.05,25) نجد أن قيمة t تساوي -1.7 .

توزيع F (The F Distribution)

توزيع F يعتبر من التوزيعات الاحتمالية الهامة في علم الإحصاء وتطبيقاته وقد سمي باسم العالم الانجليزي فيشر(Sir Ronald Fisher) ودالة كثافته الاحتمالية للمتغير العشوائيF كالتالي:

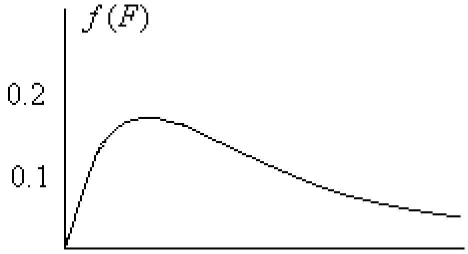
$$f(F) = \frac{\Gamma(v_1/2 + v_2/2)}{\Gamma(v_1/2)\Gamma(v_2/2)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{(v_1/2)} F^{v_1/2-1}\left(1+\frac{v_1}{v_2}F\right)^{-(v_1+v_2)/2} \qquad ,0 < F < \infty$$

حيث v_1, v_2 درجات الحرية لتوزيع F

<u>من خواصه</u>

الـــتوقـــــــع	$\frac{v_1}{v_2 - 2} \quad ,v_1, v_2 > 2$
التبـــــايـــن	$\frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)} \quad ,v_2 > 4$

منحنى توزيع F يظهر بالشكل التالي:



<u>حساب الاحتمالات باستخدام التوزيعF</u>
هناك جدول لتوزيع F يعطي قيم F بدرجات حرية(v_1, v_2) التي توجد على يمينها مساحة قدرها α ، سوف يتيح لك اكسل إمكانية الحصول على الاحتمالات مباشرة، ويتضح ذلك بالمثال التالي:

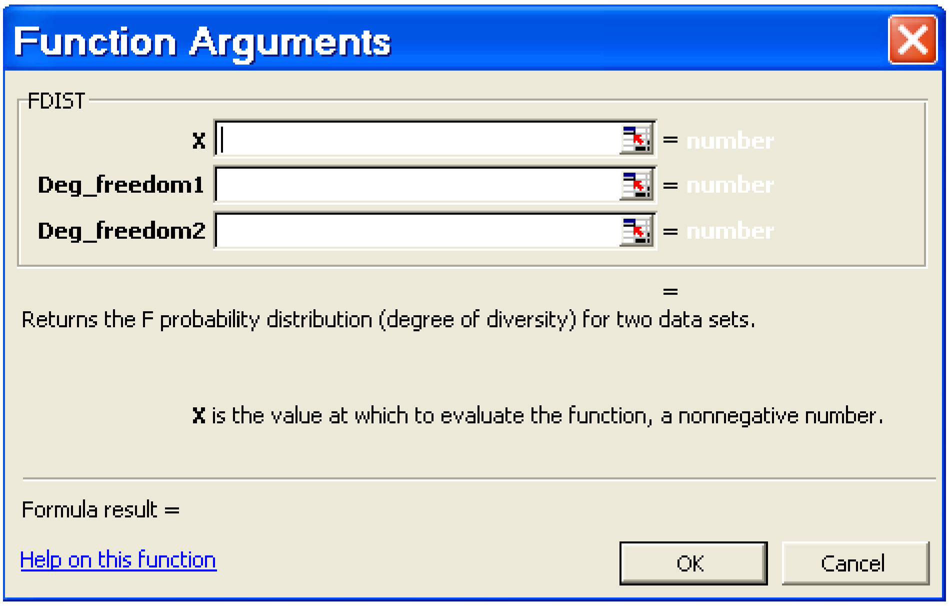
<u>مثال</u>
أوجد قيمة a في كلاً مما يلي:

(1) $P(F_{8,6} \geq 4.14) = a$

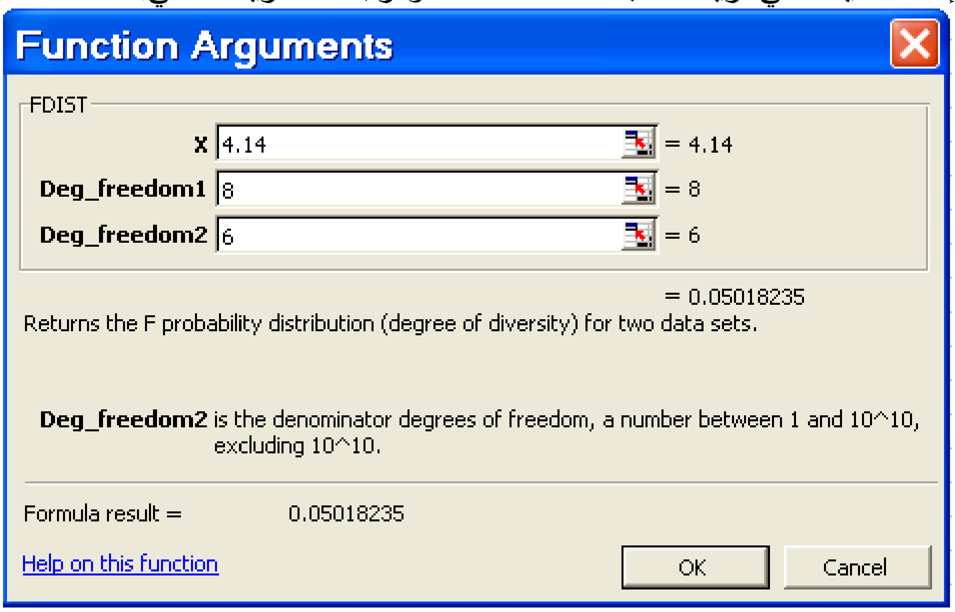
(2) $P(F_{8,6} \geq a) = 0.05$

<u>الحل باستخدام اكسل</u>

(١)باختيار الأمرFDIST من مربع الحوار يظهر الشكل التالي:

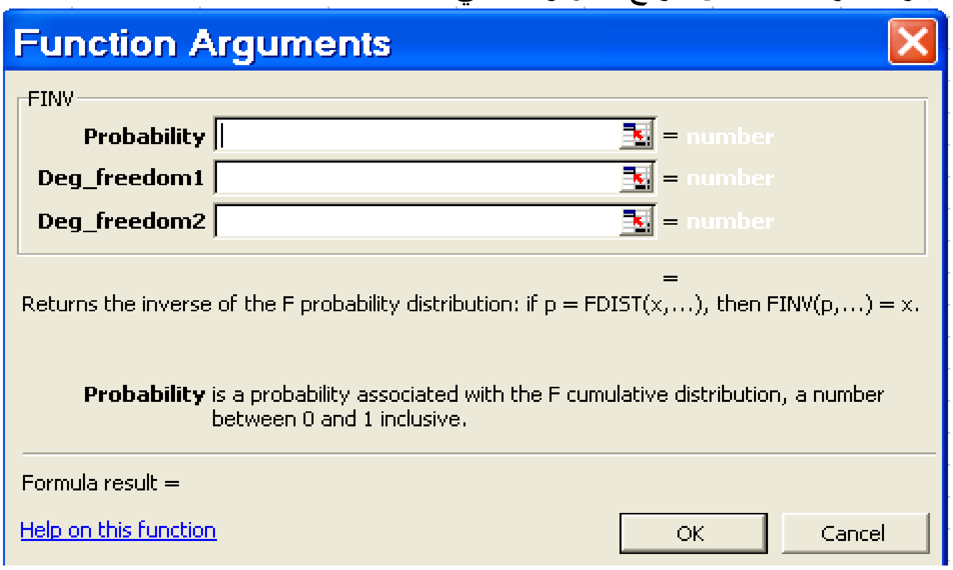


و بإدخال القيمة التي نريد حساب الاحتمال عندها ودرجات الحرية كالتالي:

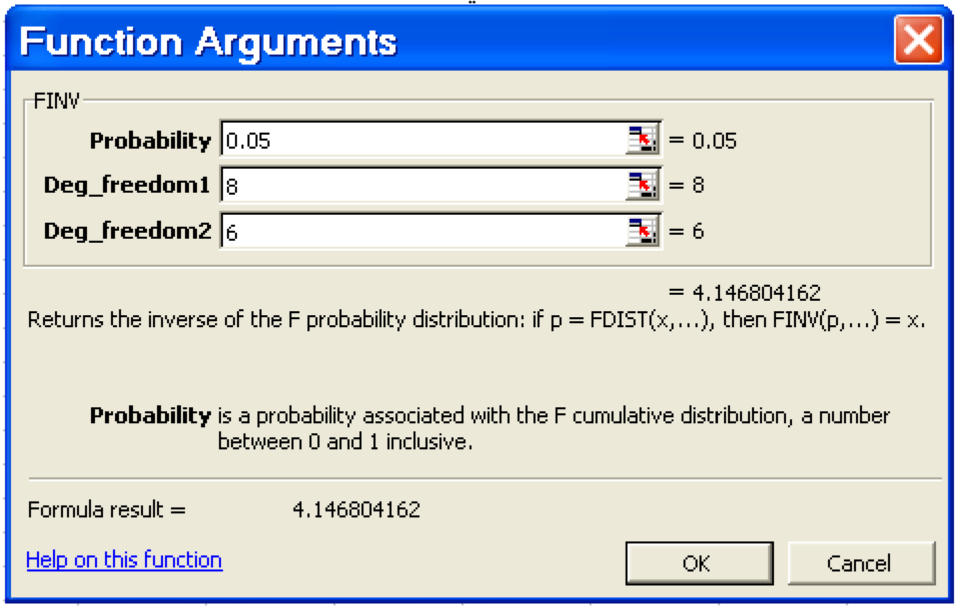


من المربع السابق قيمة $a = 0.05$

(٢)باختيار الأمر FINV من مربع الحوار كالتالي:



ثم ندخل قيمة الاحتمال ودرجات الحرية كالتالي



من المربع السابق $a = 4.14$ حيث a هنا تساوي القيمة المقابلة للجدول

الحل باستخدام Eviews

الأوامر في حالة توزيع F هي:

Distribution **التوزيع**	**Functions** **الـدالـة**	**Density/Probability Function** **دالة الكثافة الاحتمالية**
F-distribution	`@cfdist(x,v1,v2)`, `@dfdist(x,v1,v2)`, `@qfdist(p,v1,v2)`, `@rfdist(v1,v1)`	$f(x, v_1, v_2) = \frac{v_1^{v_1/2} v_2^{v_2/2}}{B(v_1/2, v_2/2)}$ $x^{(v_1-2)/2}(v_2 + v_1 x)^{-(v_1+v_2)/2}$ where $x \geq 0$, and $v_1, v_2 > 0$. Note that the functions allow for fractional degrees of freedom parameters v_1 and v_2.