المحاضرة الثالثة (215 قصر )

اقتصاديات الموارد الطبيعية

## الفائدة المركبة Interest Compounding :

يعبر عن الفائدة المركبة بشكل عام بدلالة الدوال الآسية فالفرد يقرض أصل القرض $p$ عند معدل فائدة مركبة r فمثلا القيمة A سنويا , التي سوف نحصل عليها في نهاية السنة الأولى تساوي

$$A_1 = p + rp \; = (1 + r\,)$$

وفي نهاية السنة الثانية فإن الفرد سيحصل على $A_1$ بالإضافة إلى مبلغ الفائدة على A

$$A_2 = A_1 + \; rA_1 = p(1 + r\,) + r[p(1 + r\,)]$$

نأخذ $p(1 + r\,)$ عامل مشترك

$$A_2 = [p(1 + r\,)](1 + r\,)$$

$$= p(1 + r\,)^2$$

عند نهاية $t$ من السنوات نتبع نفس الإجراء

$$A_t \; = p(1 + r\,)^t \qquad (1)$$

إذا كانت الفائدة المركبة تحسب عدة مرات $m$ في السنة فإن الفرد يستلم فائدة $(\frac{r}{m})$ عدة مرات $m$ في السنة أثناء السنة ومن ثم في نهاية عدد من السنوات $t$ فإن

$$A_t \; = p(1 + \frac{r}{m})^{mt} \qquad (2)$$

وإذا كانت الفائدة المركبة تحسب بصفة مستمرة فإن $\infty$

$$A_t \; = \lim_{m \to \infty} p(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

وبنقل $p$ وضرب الأس في $r$

$$A_t \; = \mathrm{plim} \qquad (1 + \frac{r}{m})^{)(\frac{m}{r})^{rt}}$$

وبوضع $\frac{m}{r} = n$

$$A_t = p \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{nrt}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1+\frac{1}{n}\right]^2 = e$$

$$A_t = p_e{}^{rt} \qquad (3)$$

مثال (1)

احسب القيمة $A$ لأصل قرض قدره *1000* دولار عند معدل فائدة $r = 6\%$

لمدة خمس سنوات $t = 5$ عندما تحسب الفائدة

a) سنويا
b) ربع سنوي
c) شهريا
d) على نحو مستمر

الحل

a) نعوض بالقيم المناسبة في المعادلة (1) :

$$A = 1000(1+0.06)^5$$

$$= 1000(1.06)^5 = 1000\,(1.33833) = 1338.22\$$$

b) قيمة الأصل عند حساب الفائدة بشكل ربع سنوي $m = 4$

$$A_t = p(1+\frac{r}{m})^{mt} = 1000(1+\frac{0.06}{4})^{4(5)}$$

$$= 1000(1+0.015)^{20} = 1000(1.015)^{20}$$

$$= 1000(1.346855) = 1346.86\$$$

*c*) قيمة الأصل عند حساب الفائدة شهريا $m = 12$

$$A = p(1+\frac{r}{m})^{mt} = 1000(1+\frac{0.06}{12})^{12(5)}$$

$$= 1000(1+0.005)^{60} = 1000(1.005)^{60}$$

$$= 1000(1.34885) = 1348.85\$$$

d) قيمة الأصل عند حساب الفائدة بشكل مستمر:

$$A_t = p_e{}^{rt} = 1000\, e^{0.06(5)} = 1000e^{0.3}$$

$$A = 1000(1.34986) = 1349.86\$$$

مثال(2)

: أوجد القيمة A لمبلغ قدره 100 دولار لقرض بمعدل فائدة r=12% لمدة سنة (t= 1)
عندما تحسب الفائدة

A) سنويا
B) نصف سنوي
C) ربع سنوي
D) على نحو مستمر
E) ميز بين معدل الفائدة الاسمي ومعدل الفائدة الفعلي

الحل

A) نوجد قيمة $A$ عند حساب الفائدة بشكل سنوي :

$$A = p(1+r)^t = 100\,(1+0.12) = 100(1.12) = 112\$$$

B) نوجد قيمة $A$ عند حساب الفائدة بشكل نصف سنوي : $m = 2$

$$A = p(1+\frac{r}{m})^{mt} = 100\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(1)} = 100(1.06)^2 =$$
$$100(1.1236) = 112.36\$$$

C) نوجد قيمة $A$ عند حساب الفائدة بشكل ربع سنوي : $m = 4$

$$A = p(1+\frac{r}{m})^{mt} = 100\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4(1)} = 100(1.03)^4 =$$
$$100(1.1255088) = 112.55\$$$

D) نوجد قيمة $A$ عند حساب الفائدة بشكل مستمر :

$$A = pe^{rt} = 100\, e^{(0.12)(1)} = 100\, e^{(0.12)} =$$
$$100(1.1275) = 112.75\$$$

E) التمييز بين معدل الفائدة الاسمي ومعدل الفائدة الفعلي:

في الحالات الأربع السابقة فإن معدل الفائدة الاسمي هو نفس المعدل ويساوي 12% أما الفائدة الفعلية المكتسبة فهي تتغير طبقا لكيفية حساب الفائدة بمعدل الفائدة الفعلي هو 12.36 عند الحساب بشكل نصف سنوي و12.55عندما تحسب الفائدة بشكل ربع سنوي و 12.75 عندما تحسب على نحو مستمر .

مثال(3)

أوجد صيغة حساب معدل الفائدة الفعلي reللطرق المتعددة للفائدة عندما r>1

الحـــــــــــــــل:

من تفسير معدل الفائدة الفعلي في المثال رقم (2) يمكننا كتابة :

$$p(1+re)^t = p(1+\frac{r}{m})^{\mathrm{mt}}$$

$$\frac{p(1+re)^t}{p} = \frac{\mathrm{p}(1+\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{m}})^{mt}}{\mathrm{p}} = (1+re)^t = (1+\frac{r}{m})^{\mathrm{mt}}$$

بأخذ الجذر t لكل طرف

$$((1+re)^t)^{\frac{1}{\mathrm{t}}} = ((1+\frac{r}{m})^{\mathrm{mt}})^{\frac{1}{\mathrm{t}}}$$

$$=1+re=(1+\frac{r}{m})^m$$

$$re = (1+\frac{r}{m})^m - 1$$

للطريقة (نصف وربع سنوية )

وللـــــــــــــــطريقة المستمرة للفائدة

$$p(1+re)^t = pe^{rt}$$

بقسمة الطرفين عاـــــى p واحذ الجذر t لكل طرف

$$(1+re) = e^r$$

$$re= e^r - 1$$

مثال (4):

كم عدد السنوات (t) التي يستغرقها مبلغ من النقود p لكي يتضاعف عند معدل فائدة سنوي قدرة 6%

الحـــــــــــل:

$$A=p(1+0.6)^t$$

ولكي يتضاعف النقود فان A=2P وبتعويض عند A

$$2p = (1+0.6)^t$$

بقسمة الطرفين علىp

$$2=(1+0.6)^t$$

باخذاللوغارتم الطبيعي

lin2=t Lin 1.o6

0.69315=0.058268t

بقسمة الطرفين على0.058269

$$\frac{0.058269t}{0.058269} = \frac{0.69315}{0.058269} = t \approx 12$$ سنة

مثال (5)

ا ذا كان معدل الفائدة الاسمي لأصل قرض r= 8% أوجد معدل الفائدة الفعلي حينما تحسب الفائدة بشكل (a) نصف سنوي (b)ربع سنوي (c) على نحو مستمر

الحـــــــــــــــــــــــل:

(a)معدل الفائدة الفعلي عندما تحسب الفائدة بشكل نصف سنوي

Re=(1+$\frac{r}{m}$)$^{m}$_ 1

Re=(1+ $\frac{0.08}{2}$)$^{2}$_ 1 = (1+ 0.04 )$^{2} - \ 1 = 1.0816 - 1 = 0.0816 = 8.16\%$

(b) معدل الفائدة الفعلي عندما تحسب الفائدة بشكل ربع سنوي

Re=(1+$\frac{r}{m}$)$^{m}$_ 1

Re=(1+ $\frac{0.08}{4}$)$^{4}$_ 1 = (1+ 0.02 )$^{4} - \ 1 = 1.08243 - 1 = 0.08243 = 8.24\%$

معدل الفائدة الفعلي عندما تحسب الفائدة على نحو مستمر

$$re = \ e^{r} - \ 1 = e^{0.08} - \ 1 = 1.08329 - 1 = 0.08329 = 8.329\%$$

مثال (6):

كم عدد السنوات (t) التي يتطلبها مبلغ من النقود لكي يبلغ ثلاثة اضعا ف عند معدل فائدة 12%يحسب بشكل ربع سنوي ؟

الحـــــــــــــــل :

A=$p(1 + \frac{0.12}{4})^{4(t)} = p(1 + 0.03)^{4t}$

وكي يتضاعف النقود فان $A=3p$ وبالتعويض عن قيمة A

$$3p= p(1+0.03)^{4t}$$

وبقسمة الطرفين على p

$$\frac{3P}{\mathrm{P}} = \frac{p(1+0.03)^{4t}}{P}$$

$$=3=(1+0.03)^{4t}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي

$$\ln 3 = 4T \ln 1.03$$

$$=1.09861=4(0.02956)t$$

$$=1.09861=0.11824t$$

وبقسمة الطرفين على 0.11824

$$\frac{0.11824t}{0.11824} = \frac{1.09861}{0.11824} = t = 9.3$$ سنة

# الخصم Discounting

الخصم هو عملية تحديد القيمة الحالية p لمبلغ من النقود A يستلم في المستقبل

مثال :أوجد معادلة الخصم حينما تحسب الفائدة :-

1- سنويا   2- بشكل متعدد   3- على نحو مستمر

الحـــــــــــــــــل:

1- في حالة الحساب السنوي

$$A=P(1+r)^{t}$$

بقسمة الطرفين على $(1+r)^{t}$

$$\frac{A}{(1+r)^{t}}=\frac{P(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}}$$

$$=p=\frac{A}{(1+r)^{t}}=A(1+r)^{-t}$$

2- في حالة تعدد مرات الحساب

$$A=p(1+\frac{r}{m})^{mt}$$

بقسمة الطرفين على $p(1+\frac{r}{m})^{mt}$

$$\frac{A}{(1+\frac{r}{m})^{mt}}=\frac{p(1+\frac{r}{m})^{mt}}{(1+\frac{r}{m})^{mt}}$$

$$p=\frac{A}{(1+\frac{r}{m})^{mt}}=A(1+\frac{r}{m})-^{mt}$$

3- في حالة الحساب المستمر :

$$A=pe^{rt}$$

$$P=\ A\ e^{-rt}$$

مثال:- أوجد القيمة الحالية لمبلغ 1000ريال يدفع بعد أربع سنوات من ألان عندما تكون الفائدة 6%إذا تم حساب الفائدة :-

1- سنويا   2- ربع سنويا   3- على نحو مستمر

الحـــــــــــــــــل :-

1- القيمة الحالية عندما تحسب الفائدة سنويا

$$p = A(1+r)^{-t}$$

$p = 1000(1+0.06)^{-4}$ =1000(0.79209)=792.09

2- القيمة الحالية عندما تحسب الفائدة بشكل ربع سنويا

$$P = (1+\frac{r}{m})^{-mt} = 1000(1+\frac{0.06}{4})^{-4(4)}$$

$$p = 1000(1+0.015)^{-16}$$

P=1000(1.015)$^{-16} = 1000(0.78803) = 788.03$ريال

3 - القيمة الحالية عندما تحسب الفائدة على نحو مستمر

P= A $e^{-rt}$

p=1000$e^{-(0.06)(4)}$

p=1000$e^{-.24} = 1000(0.78663) = 786.63$ريال

## التطبيق الثالث:-

1- ) حدد لكل ممایاتي القيمة المستقبلية لمبالغ الأصول المحددة عندما تحسب الفائدة

1- سنويا 2- نص سنوي 3- ربع سنوي 4- على نحو مستمر

A)مبلغ قدرة 1000ريال بمعدل فائدة 8%لمدة خمس سنوات

B) مبلغ قدرة 2500ريال بمعدل فائدة 6%لمدة أربع سنوات

C) مبلغ قدرة 500ريال بمعدل فائدة 12%لمدة ست سنوات

D) كم عدد السنوات Tالتي يتطلبها مبلغ من النقود لكي يتضاعف عند معدل فائدة 8%يحسب بشكل نصف سنوي

E) كم عدد السنوات Tالتي يتطلبها مبلغ من النقود لكي يبلغ ثلاثة إضعاف معدل فائدة 8%يحسب بشكل نصف سنوي

2- )حدد القيمة الحالية لمبلغ 5000ريال سيدفع بعد ثمان سنوات إذا كانت الفائدة الجارية %15 إذا تم حساب الفائدة

1- سنويا

2- - نصف سنوي 3- ربع سنوي 4- على نحو مستمر

3ــ ) إذا كان معدل الفائدة الاسمي لأصل قرض هو %10 اوجد معدل الفائدة الفعلي (re) حينما تحسب الفائدة بشكل

1- - نصف سنوي 2- ربع سنوي 3- على نحو مستمر