تطبيقات على الاحتمالات والمتغيرات العشوائية

مثال (١):

في دراسة قام بها احد الباحثين بالقسم لمعرفة العلاقة بين مستوى التعليم واستهلاك اللحوم باحد المناطق تحصل الباحث على التوزيع التكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من المستهلكين

المهنة / التخصص	متوسط	ثانوي	جامعي	Sum
لحوم حمراء	15	5	10	30
لحوم اسماك	8	17	10	35
لحوم دواجن	12	10	13	35
المجموع	35	32	33	100

فإذا اختير احد المستهلكين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

١ ما احتمال ان يكون من مستهلكي اللحوم الحمراء و يحمل المؤهل الثانوي.

٢ ما احتمال ان يكون من حملة المتوسط او من مستهلكي لحوم الاسماك.

٣ ما احتمال ان يكون من مستهلكي لحوم الاسماك او لحوم الدواجن.

٤ إذا علم ان المستهلك من مستهلكي لحوم الاسماك، ما احتمال ان يكون ممن يحملون المؤهل الجامعي.

الحل:

اولا: نرمز للمؤهل بالرمو A، ولنوع اللحوم بالرمز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

المهنة / التخصص		متوسط A_1	ثانوي A_2	جامعي A_3	Sum
لحوم حمراء	B_1	15	5	10	30
لحوم اسماك	B_2	8	17	10	35
لحوم دواجن	B_3	12	10	13	35
Sum		35	32	33	100

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد المستهلكين لنوع اللحم حسب المؤهل، اي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

١ حساب احتمال ان يكون من مستهلكي اللحوم الحمراء و يحمل المؤهل الثانوي.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

٢ حساب احتمال ان يكون من حملة المتوسط او من مستهلكي لحوم الاسماك.

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

٣ حساب احتمال ان يكون من مستهلكي لحوم الاسماك او لحوم الدواجن.

هذان حادثان متنافيان، لاننا سنفترض ان استهلاك الشخص يكون لنوع واحد من اللحوم فقط، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

٤ إذا علم ان المستهلك من مستهلكي لحوم الاسماك، ما احتمال ان يكون ممن يحملون المؤهل الجامعي ، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال ان المستهلك من يحملون المؤهل الجامعي A_3 بشرط انه من مستهلكي لحوم الاسماك B_2 ، اي ان الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

مثال (٢):

إذا كان من المعلوم ان نسبة مبيعات احد المراكز التجارية من التفاح الامريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الانواع الاخرى للتفاح 0.40، اشترى احد العملاء عبوتين، والمطلوب:

١ كون فراغ العينة.

٢ إذا عرف المتغير العشوائي X بانه عدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي، فاوجد الاتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X = 1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$

٣ احسب الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الامريكي:

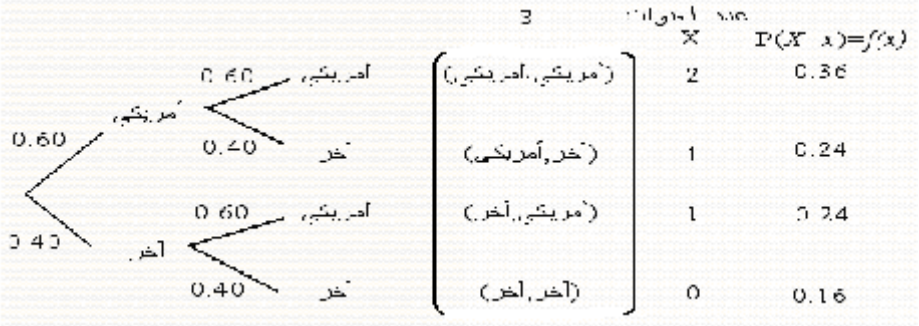
٤ احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الامريكي.

٥ اوجد معامل الاختلاف النسبي:

الحـ ـل:

تكوين فراغ العينة:

التجربة هنا هو شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من اربع نتائج، هي:



- التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي X

من المعلوم ان العميل اشترى عبوتين، وان المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$ إذا كانت العبوتين من النوع الاخر، اى إذا كانت نتيجة التجربة (اخر، اخر)

$x=1$ إذا كان احد العبوتين من النوع الامريكي، اي إذا كانت نتيجة التجربة (اخر، امريكي) او (امريكي،اخر)

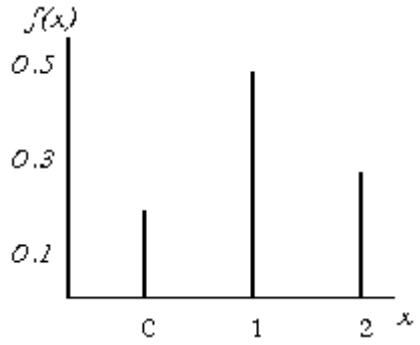
$x=2$ إذا كان العبوتين من النوع الامريكي، اي إذا كانت نتيجة التجربة (امريكي ، امريكي)

ومن تم ياخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين اعلاه، ومن تم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

- رسم دالة الاحتمال $f(x)$:



- تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:

التوزيع التجميعي، هو جدول يشمل الاحتمالات الناتجة من حساب الاحتمال $P(X \le x)$، ويرمز له بالرمز $F(x)$، اي ان دالة التوزيع الاحتمالي التجميعي تاخذ الصورة التالية:

ومن تم يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من التفاح الامريكي كما يلي:

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0) = P(X \le 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \le 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \le 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Σ	1	

- حساب الاحتمالات: $P(X=1)$ ، $P(X\le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\le 1.5)$

$$P(X=1)=f(1)=0.48$$
$$P(X\le 1)=F(1)=0.64$$
$$P(X=1.5)=f(1.5)=0$$
$$P(X\le 1.5)=F(1.5)=F(1)=0.64$$

الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الامريكي:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة (٨ ٣)، (٨ ٤) وهذا يتطلب تكـوين جدول يشمل المجاميع التالية: $\sum x_i\ f(x_i)$, $\sum x_i^2\ f(x_i)$ ، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu=\sum x_i\ f(x_i)=1.20$

ولحساب الانحراف المعياري يجب اولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2=\sum x_i^2\ f(x_i)-\mu^2=1.92-(1.20)^2=0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{0.48}=0.693$$

معامل الاختلاف النسبي هو:

$$C.V=\frac{\sigma}{\mu}\times 100=\frac{0.693}{1.2}\times 100=57.7$$

مثال (٣)

إذا كان الإنفاق الشهري للاسرة بالالف ريال على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تاخذ الصورة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} cx(10-x) & 0<x<10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

١ حساب قيمة الثابت c

٢ احسب احتمال ان إنفاق الاسرة يتراوح ما بين (8,5) الف ريال خلال الشهر.

٣ إذا كان لدينا 600 اسرة، فما هو عدد الاسر المتوقع ان يقل إنفاقها عن 3 الاف خلال الشهر؟

٤ اوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري.

٥ اوجد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$، ثم استخدم هذه الدالة لحساب احتمال ان إنفـاق الاسـرة يقل عن 5 الاف ريال.

الحـــــــل

١ حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1$$

إذا

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\ dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

٢ حساب ان إنفاق الاسرة يتراوح بين (8,5) الف ريال خلا الشهر هو.

$$p(5<x<8) = \int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x)\ dx = 0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right] = 0.006\left[(149.3333)-(83.3333)\right]$$

$$= 0.006(66) = 0.396$$

٣ إذا كان لدينا 600 اسرة، فإن عدد الاسر المتوقع ان يقل إنفاقها عن 3 الاف خلال الشهر هو:

$$number\ of\ \ family = 600\ \ p(x<3)$$

$$= 600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9]-0 = 129.6 \approx 130$$

حوالي 130 اسرة.

المتوسط الحسابي

$$\mu = E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x\left(0.006x(10-x)\right) = 0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3}-\frac{10000}{4}\right)-(0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الاسرة الشهري 5 الاف ريال.

الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$ ، ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\text{var}iance} = \sqrt{5} = 2.236$$

معامل الاختلاف النسبي

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

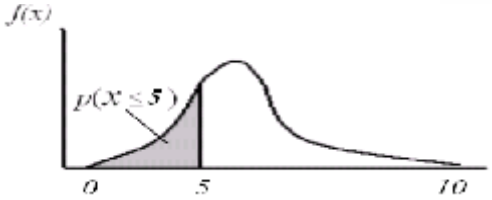
- إيجاد دالة التوزيع التجميعي $C.D.\text{F}$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ dx$$

$$= \int_0^x 0.006x(10 - x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- حساب الاحتمال المطلوب $F(5) = p(x \le 5)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:



ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x = 5$ في الدالة $F(x)$ التي تم التوصل إليها، اي ان:

$$F(5) = P(x \le 5) =$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right]$$

$$= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5$$

اي ان 50% من الاسر يقل إنفاقها عن 5 الاف ريال.