

الطرق الرياضية للإدارة والاقتصاد

تحليل العرض والطلب

يمكن التعبير عن العرض والطلب كمبادئ عامة في الاقتصاد بدلالة الأشكال البيانية حيث تعبر نقطة تقاطع منحنى العرض (S) والطلب (D) عن نقطة التوازن التي عندها يتكون سعر التوازن p_e وكمية التوازن Q_e وتكون الكمية المعروضة مساوية للكمية المطلوبة.

مثال: - الحل البياني لنظام معادلات العرض والطلب التالية في الشكل

$$\text{العرض} \quad P = 1 + \frac{1}{2}Q$$

$$\text{الطلب} \quad P = 10 - \frac{5}{8}Q$$

حيث أن

P (السعر) متغير تابع وتمثل على المحور الراسي Y

Q (الكمية) متغير مستقل وتمثل على المحور الأفقي X

ونقطة تقاطع منحنى العرض S والطلب D تسمى نقطة التوازن والتي عندها يكون سعر التوازن P_e وكمية التوازن Q_e

وعندها تكون الكمية المعروضة Q_s = الكمية المطلوبة Q_d

الحل لنظام معادلات الطلب والعرض يوجد عندما تكون $p=5=P_e$ و $Q=8=Q_e$ ويلاحظ أن عند $P_e = 5$ ،

$Q_e = 8$ فإن $Q_s = Q_d = 8$ وأنة عند $Q_e = 8$ إن سعر الكمية المطلوبة P_d يتساوى مع سعر الكمية المعروضة P_s

1- عند $p > 5$ فإن $Q_s > Q_d$ في هذه الحالة يوجد فائض ، وفي سوق المنافسة الكاملة فان الفائض يميل إلى دفع السعر إلى أسفل نحو سعر التوازن P_e

2- عند $p < 5$ فإن $Q_s < Q_d$ في هذه الحالة يوجد عجز ، وفي سوق المنافسة الكاملة فان العجز يميل إلى دفع السعر إلى أعلى نحو سعر التوازن P_e

3- طالما أن الأسعار في سوق المنافسة الكاملة تتجه نحو سعر التوازن P_e وعالية فأنة يقال أن السوق حقق التوازن .

يمكن أيضا تحليل العرض والطلب بالمعادلات والهدف يتمثل في إيجاد قيمة P_e و Q_e

وبما أن P_e يظهر فيها $Q_s = Q_d = Q_e$ فالمطلوب فقط مساواة معادلة الطلب مع العرض في صيغة تعرض كما يتضح في المثال الآتي:

مثال:-

حل نظام معادلات العرض والطلب جبريا إذا أعطيت مجموعة مختلفة من المعادلات حيث Q يعبر عنها كمتغير تابع

$$\text{العرض } Q = -50 + 6P$$

$$\text{الطلب } Q = 230 - 8P$$

وبما إننا نبحث عن السعر الذي يحقق التوازن في السوق ، والتوازن يوجد عندما $Q_s = Q_d$ فإننا نضع

المعادلات مساوية لبعضها البعض ونوجد قيمة P

ثم نوجد قيمة P_e من خلال التعويض بقيمة $P_e = 20$ في معادلة العرض أو الطلب:	$Q_s = Q_d$
$Q = -50 + 6P$ معادلة العرض	$50 + 6P = 230 - 8P$
$Q_s = -50 + 6(20)$	$6P + 8P = 230 + 50$
$Q_s = -50 + 120 = 70 = Q_e$	$14P = 280$ بقسمة الطرفين على 14
$Q_d = 230 - 8(20)$ معادلة الطلب	$\frac{14P}{14} = \frac{280}{14} \Rightarrow P = 20 = P_e$
$= 230 - 160 = 70 = Q_e$	

تحليل نقطة التعادل

عند التخطيط لأي مشروع تجاري جديد من المهم أن نتعرف على الحجم الأدنى من المبيعات المطلوبة لتحقيق الربح وتعرف نقطة التعادل :- بأنها مستوى المبيعات الذي عندها الربح يساوي صفر أو الإيراد الكلي يساوي التكاليف الكلية ، وتقدير نقطة التعادل عندما تتحرك ميزانية المنشأة من الخسارة إلى الربح يسمى تحليل نقطة التعادل . ونقطة التعادل توجد جبريا وبيانيا للدوال الخطية في المثال الآتي

مثال:-

إذا علمت أن الإيراد الكلي $R(x)=80x$ والتكلفة الكلية $C(x)=30x+2000$ ومن ثم فإن دالة الربح تأخذ

$$\pi(x)=R(x)- C(x) \quad \text{الشكل الآتي :}$$

$$\pi(x)=80x- 30x +2000$$

$$\pi(x)=50x- 2000$$

ويمكن إيجاد نقطة التعادل بأي من الطرق الثلاث التالية:

(1) - بوضع $\pi=0$ وإيجاد قيمة x	(2) - بمساواة $R(x)=C(x)$ وإيجاد قيمة x
$50x+2000=0$	$80x=30x +2000$
$50x=2000$ بقسمة الطرفين على 50 وإيجاد قيمة x	$80x- 30x=2000$
$\frac{50x}{50} = \frac{2000}{50}$	$50x=2000$
$X=40$ وبالتالي يكون مستوى الناتج عند نقطة التعادل $X=40$	إذن مستوى الناتج عند نقطة التعادل $x= 40$

(3) - تمثيل $R(x)$ ، $C(x)$ بيانيا وإيجاد نقطة التعادل كما ي الشكل التالي :-

لاحظ أنه إذا كانت $x < 40$ فإن $C(x) > R(x)$ وهذا يعني خسارة أما إذا كانت $x > 40$ فإن $R(x) > C(x)$ وهذا يعني وجود ربح

النماذج الرياضية والاقتصادية:

يختلف النموذج الاقتصادي عن النموذج الرياضي ولنفترض أن نظام المعادلات الخطية للعرض والطلب على النحو التالي:

$$6p-3Q=36$$

$$8p+2Q=192$$

في النموذج الاقتصادي نعامل السعر على أساس انه متغير تابع طبقا لتقاليد الاقتصادي الانجليزي الفريد مارشال، فان صيغ الميل - الحد القاطع للمعادلات توجد من خلال حل كل معادلة لـ P بدلالة Q أي جعل P دالة في Q

$$\text{العرض} \quad P = \frac{1}{2}Q + 6$$

$$\text{الطلب} \quad P = -\frac{1}{4}Q + 24$$

أما في النماذج الرياضية حيث نعتبر Q متغير تابع كما في درسه الاقتصادي الفرنسي الأصل ليون والرأس ، فان صيغ ميل الحد القاطع للمعادلات توجد من خلال حل كل معادلة لـ Q بدلالة P أي جعل Q دالة P

$$\text{العرض} \quad Q=2P-12$$

$$\text{الطلب} \quad Q=-4P+96$$

وعند التمثيل البياني فان المتغيرات التابعة المختلفة تقاس على المحو (Y) أي على المحور الراسي بينما اغلب الاقتصاديين اليوم يفكرون مثل "والراس " ويتفقون بان السعر يحدد الكمية المطلوبة والكمية المعروضة حيث يضعون Q على المحور الأفقي و p على المحور الراسي وهذا يتضمن أن الكمية المعروضة والكمية المطلوبة تحدد السعر. وعلية يمكن إيجاد سعر وكمية التوازن بيانيا وجبريا كما يلي للمعادلات

السابقة

أولاً: إيجاد سعر وكمية التوازن بيانياً وجبرياً (النموذج الاقتصادي)

$$P = \frac{1}{2}Q + 6 \quad \text{العرض}$$

$$P = -\frac{1}{4}Q + 24 \quad \text{الطلب}$$

الرسم البياني

الحل جبرياً:

$$\text{نضع } S = P_D \text{ وإيجاد قيمة } Q$$

$$\frac{1}{2}Q + 6 = -\frac{1}{4}Q + 24$$

$$\frac{3}{4}Q = 18$$

بقسمة الطرفين على $\frac{3}{4}$ ينتج أن

$$Q = 24 = Q_e$$

وبالتعويض عن قيمة Q في معادلة العرض والطلب ينتج أن

$$= p_d = p_s = p_e = 18$$

ثانياً: إيجاد سعر وكمية التوازن بيانياً وجبرياً (النموذج الرياضي)

$$\text{العرض } Q = 2P - 12$$

$$\text{الطلب } Q = -4P + 96$$

الرسم البياني

الحل جبرياً:

$$\text{نضع } S = Q_D \text{ وإيجاد قيمة } P$$

$$2P - 12 = -4P + 96$$

$$6P = 108$$

$$P = 18 = P_e$$

وبالتعويض عن قيمة P في معادلة العرض والطلب ينتج أن

$$= Q_d = Q_s = Q_e = 24$$

مسائل عن العرض والطلب

1- حدد سعر التوازن P_e وكمية التوازن Q_e للأسواق الآتية مستخدماً المعادلات والرسوم البيانية :-

$$\text{العرض} \quad P=3Q+10$$

$$\text{الطلب} \quad P= -\frac{1}{2} + 80$$

<u>الحل الجبري:-</u>	<u>الحل البياني:-</u>
<p>(1) بوضع $P_d = P_s$ عند التوازن وإيجاد قيمة Q</p> $3Q+10 = -\frac{1}{2} + 80$ $3\frac{1}{2}Q = 70$ $\frac{7}{2}Q = 70$ <p>وبقسمة على الطرفين $\frac{7}{2}$ ينتج أن</p> $Q = 20 = Q_e$ <p>وبالتعويض عن قيمة $Q = 20$ في معادلة العرض أو الطلب</p> $P=70=P_e \quad \text{إذاً} \quad P=3(20)+10$	

2- حل جبرياً كل من النظام التالي لمعادلات العرض والطلب الخطية والمعبر عنها في الشكل الرياضي التالي

$$\text{العرض} \quad Q = 25P - 185$$

$$\text{الطلب} \quad Q = -32P + 1240$$

الحل :-

$$\text{نساوي} \quad Q_s = Q_D \quad \text{وإيجاد قيمة } P$$

$$25P - 185 = -32P + 1240$$

$$57P = 1425$$

بقسمة الطرفين على 57

$$\frac{57P}{57} = \frac{1425}{57}$$

$$P=25 \quad \text{نعوض عن قيمة } P \text{ في معادلة العرض أو الطلب ينتج أن} \quad Q_s = Q_d = 440 = Q_e$$

التطبيق الثاني

الرقم الجامعي :-

الاسم:-

1- حدد سعر التوازن e وكمية التوازن Q_e للأسواق التالية مستخدما :-

(1)- المعادلات (2)- الرسوم البيانية

$$\text{العرض} \quad P = \frac{1}{4} Q + 200$$

$$\text{الطلب} \quad P = - \frac{1}{2} Q + 800$$

2- أوجد سعر كمية التوازن للنماذج الرياضية التالية لعرض والطلب مستخدما

(1) المعادلات (2) الرسوم البيانية

$$\text{العرض} \quad Q = 5P + 10 \quad (1)$$

$$\text{الطلب} \quad Q = -3P + 50$$

العرض

$$Q = \frac{2}{3}P - 12$$

(ب)

الطلب

$$Q = -\frac{1}{3}P + 96$$

(3) - أوجد نقطة التعادل للمشاءات ذات الدوال الخطية للإيراد الكلي $R(X)$ والتكلفة الكلية $C(X)$ التالية عن طريق

(1) - إيجاد دالة الربح πX ومساواتها بالصفر والحل لـ X

(2) - بوضع $R(x) = C(x)$ وإيجاد قيمة x

(3) تمثيل $R(x)$ ، $C(x)$ بيانيا وإيجاد نقطة التعادل

$$R(X) = 55X$$

(أ)

$$C(X) = 30X + 250$$

$$R(X) = 50X$$

(ب)

$$C(X) = 35X + 40$$

