إعداد: د محمود الدريني

المقارنات المتعددة والمتعامدة

مقدمة

من أهداف تطبيق نموذج تحليل التباين إجراء اختبار فرض تساوي متوسطات المعالجات، حيث يعبر الفرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_t = \mu$ عن تساوي المتوسطات، بينما يدل الفرض البديل الشكل $H_1 : Treatment\ means\ not\ all\ equal$ ، على أن هناك متوسطين على الأقل يوجد بينها فرق معنوي. واتخاذ قرار بقبول الفرض البديل ليس معناه إمكانية الباحث تحديد أي من المتوسطين يوجد بينها فرق معنوي. ولذا يجب استخدام أحد الطرق الإحصائية لإجراء اختبار معنوية الفرق بين كل وسطين كخطوة تالية لقرار رفض فرض العدم الخاص بتساوي متوسطات المعالجات. وتسمى المقارنات المتعددة Multicomparisons، والهدف من إجراء هذه المقارنات تحقيق الآتي:

1- مقارنة كل زوج من متوسطات المعالجات لتحديد أي من الوسطين يوجد بينها فرق معنوي.
2- إمكانية مقارنة متوسط كل معالجة بمتوسط المعالجة الضابطة.
3- تحديد أي من المعالجات لها دور هام بعد مناقشة النتائج ويمكن أن توصي الدراسة باستخدامها.

أيضا في كثير من المجالات التطبيقية يهتم الباحث ليس فقط بالمقارنات الثنائية، ولكن أيضا بإجراء مقارنات بين مجموعات من المتوسطات مصمم لها مسبقا وقبل إجراء التجربة، ولإجراء مثل هذه الاختبارات تستخدم طرق التضاد Contrasts، والتي تقوم على أن فروض العدم تعكس مقارنات التضاد ويمكن وضعها في شكل مجموعة من التوليفات الخطية المستقلة في متوسطات المعالجات، وفي هذه الحالة تكون عدد التوليفات الخطية مساوية لدرجات حرية المعالجات.

إذا الفرق بين المقارنات المتعددة ومقارنات التضاد، أن المقارنات المتعددة هي خطوة تالية لقرار رفض الفرض العدم، بينما مقارنات التضاد مخطط لها في البداية قبل التجربة.

يتناول هذا الفصل عرض بعض الطرق الشائعة لإجراء اختبار المقارنات المتعددة، كما يتناول عرض طريقة إجراء اختبار التضاد، وكيفية إنشاء التوليفات الخطية المستقلة وكيفية حساب إحصائية الاختبار المستخدمة في اتخاذ القرار. يهتم هذا الفصل أيضا بكيفية استخدام البرنامج الإحصائي SPSS في الحصول على نتائج تطبيق طرق إجراء الاختبارات المتعددة واختبارات التضاد من خلال بعض التطبيقات.

المقارنات المتعددة Multicomparisons

إذا كان عدد المجتمعات أو عدد المعالجات يساوي t، فإن عدد المقارنات الممكنة بين كل زوج من المتوسطات تساوي $[t(t-1)/2]$ مقارنة ، وينتج عن استخدام اختبارات t كبر احتمال وقوع الخطأ من النوع الأول α^*، حيث أن $\alpha^* = [1-(1-\alpha)^{(t(t-1)/2)}]$، وعلى سبيل المثال إذا كان عدد المعالجات ثلاث معالجات، يكون عدد المقارنات ثلاث مقارنات، وإذا كان مستوى المعنوية في كل مقارنة هو $\alpha = 0.05$، فإن احتمال قبول الفرض العدم في المقارنة الأولى والثانية والثالثة هي $(1-\alpha)^3 = (0.95)^3 = 0.857$، ومن ثم يكون احتمال وقوع خطأ من النوع الأول يساوي $(1-0.857) = 0.143$ وهي أكبر من $\alpha = 0.05$.

لذا تهتم طرق المقارنات المتعددة باختبار معنوية الفرق بين كل متوسطين مع الأخذ في الاعتبار علاج مشكلة ازدياد حجم الخطأ من النوع الأول. وتستند هذه الطرق على الافتراضات التي تقوم عليها نموذج تحليل التباين وهي:

1- أن تكون العينات مستقلة، ويقصد بذلك أن الوحدات التجريبية التي ستستلم معالجة ما ليست هي الوحدات التجريبية التي ستستلم معالجة أخرى.

2- أن كل معالجة تمثل مجتمع له توزيع طبيعي، بمعنى أن المشاهدات على الوحدات التجريبية لكل معالجة مأخوذة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_i، وتباينه σ_i^2، $i = 1,2,...,t$.

3- تباينات الأخطاء التجريبية للمعالجات متجانسة $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_t^2 = \sigma^2$. ويستخدم متوسط مربعات الأخطاء $[MSE = (SSE/(t(r-1)))]$ كتقدير غير متحيز لتباين المعالجة σ_i^2.

كما تشترط بعض طرق المقارنات أن تكون مكررات المعالجات متساوية، أي أن $r_1 = r_2 = ... = r_t = r$، فإذا كانت المكررات ليست كلها متساوية يتم استخدام الوسط التوافقي Harmonic mean ليعبر عن مكرر كل معالجة، ويحسب باستخدام المعادلة التالية:

$$r = \bar{r}_h = \frac{t}{\sum_{i=1}^{t}(1/r_i)} \qquad (1)$$

وفيما يلي عرض لبعض الطرق الشائعة والتي تستند على افتراض تجانس تباينات الأخطاء التجريبية:

- **طريقة أقل فرق معنوي Lest Significant Difference (LSD)**

تعتبر طريقة أقل فرق معنوي من أسهل الطرق وأكثرها استخداما عند إجراء المقارنات الثنائية Pairwise Comparisons، وتعتمد هذه الطريقة على اختبارات t لاختبار معنوية الفرق بين كل وسطين.

بفرض أن $(r_1, r_2, ..., r_t)$ هي مكررات المعالجات، وأن $(r. = r_1 + r_2 + ... + r_t)$ تعبر عن العدد الكلي للمشاهدات. لإجراء اختبار معنوية الفرق $(\mu_i - \mu_{i`})$ باستخدام طريقة LSD تتبع الخطوات التالية:

1- صياغة الفرض العدم والفرض البديل:

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_i = \mu_{i`} \quad or \quad H_0 : \mu_i - \mu_{i`} = 0 \\ &H_1 : \mu_i \neq \mu_{i`} \quad or \quad H_1 : \mu_i - \mu_{i`} \neq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

2- حساب $(\bar{y}_i. - \bar{y}_{i`}.)$ كتقدير غير متحيز للفرق $(\mu_i - \mu_{i`})$، حيث أن $(\bar{y}_i. > \bar{y}_{i`}.)$

3- حساب أقل فرق معنوي LSD عند مستوى معنوية α باستخدام المعادلة التالية:

$$LSD = t_{(1-\alpha/2,\ t(r-1))}\ S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i`})} \tag{3}$$

حيث أن: $t_{(1-\alpha/2,\ t(r-1))}$ هي القيمة المشاهدة من جدول توزيع مئويات t عند مستوى معنوية α، ودرجة حرية $(n-t)$ وتعبر عن درجات حرية الأخطاء في جدول تحليل التباين، $S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i`})}$ : هو الخطأ المعياري للفرق $(\bar{y}_i. - \bar{y}_{i`}.)$، ويحسب في حالة ما إذا كانت المكررات ليست كلها متساوية بالمعادلة التالية:

$$S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i`})} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i`}}\right)} \tag{4}$$

وأما إذا كانت المكررات متساوية $(r_1 = r_2 = ... = r_t = r)$ يحسب $S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i`})}$ بالمعادلة التالية:

$$S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i`})} = \sqrt{MSE\,(2/r)} \tag{5}$$

حيث أن MSE هو متوسط مربعات الأخطاء التجريبية ويستخدم كتقدير غير متحيز لتباين الخطأ.

4- وبمقارنة الفرق $(\bar{y}_i. - \bar{y}_{i`}.)$ بقيمة LSD يمكن اتخاذ قرار بشأن الفرض العدم والفرض البديل ،

إذا كان $(\bar{y}_i. - \bar{y}_{i`}.) \geq LSD$ يرفض الفرض العدم ويقبل الفرض البديل ويستدل على وجود فرق

معنوي بين المتوسطين $(\mu_i , \mu_{i`})$.

- **طريقة دنكن لاختبار المدى المتعدد**

Duncan's Multiple Range Test (DMRT)

اقترح هذا الاختبار Duncan عام 1955 وتتلخص هذه الطريقة في إيجاد عدة فروق معنوية ذات قيم متزايدة والتي يتوقف حجمها على مدى البعد بين المتوسطات بعد ترتبها. وفيما يلي خطوات إجراء هذه الطريقة حتى يسهل لنا فهمها.

1- ترتيب متوسطات (المجموعات) تصاعديا.

2- إيجاد الخطأ المعياري للمتوسطات $S_{\bar{y}_i} = \sqrt{MSE/r}$ ، $i = 1,2,...,t$ ، وإذا كانت (أحجام العينات) غير متساوية ، يستخدم لها وسطا توافقي كما سبق بيان ذلك، ويحسب كالتالي:

$$r = \bar{r}_h = \frac{t}{\sum_{i=1}^{t}(1/r_i)} \tag{6}$$

3- استخراج القيم الجدولية $q_\alpha(k,\nu)$ من جدول "دنكن"، حيث أن $k = 2,...,t$ ، α هي مستوى المعنوية، ν هي درجات الحرية الخاصة بمجموع مربعات الخطأ العشوائي.

4- حساب قيمة أقل مدى معنوي R_k وذلك بالنسبة لكل من $k = 2,...,t$ ، كما يلي:

$$R_k = q_\alpha(k,\nu)\ S.E_{\bar{y}_i}\ ,\ \ for\ k = 2,3,...,t \tag{7}$$

5- مقارنة الفروق بين متوسطات المجموعات (المعالجات) ونبدأ بمقارنة أكبر متوسط مع أقل متوسط بقيمة أقل مدى معنوي R_t ثم نقارن الفرق بين أكبر متوسط وثاني أصغر متوسط بالمدى المعنوي R_{t-1} ، ونستمر هكذا إلى أن يتم مقارنة كل الأزواج وعددها $t(t-1)/2$.

6- إذا كان الفرق المحسوب بين متوسطي معالجتي أعلى من R_k يكون ذلك الفرق معنويا، أي يوجد فرق معنوي بين هذين المتوسطين.

- **طريقة شيفيه Scheffe**

هي إحدى الطرق المستخدمة في إجراء المقارنات المتعددة، وتتميز بالخصائص التالية:

- تعتبر طريقة شيفيه Scheffe أكثر الطرق الإحصائية مرونة وقوة.
- يستخدم هذا الاختبار في حالتي تساوي وعدم تساوي المكررات.
- يمكن استخدامه في المقارنات الثنائية Pairwise Comparisons ، وكذلك المقارنات المركبة Compound Comparisons، ويرجع ذلك إلى سهولة صياغة المقارنة تحت البحث في صورة قيد خطي Linear Constrain مستقل.
- يعالج مشكلة كبر احتمال وقوع خطأ من النوع الأول، ويحافظ على مستوى المعنوية الذي يحدده الباحث دون تغير.

ويستند اختبار شيفيه Scheffe على فكرة تحويل نسبة توزيع t إلى نسبة توزيع F ، ومن ثم إمكانية تقليل المنطقة الحرجة لتوزيع F لاستيعاب جميع المقارنات في آن واحد دون تجاوز معدل الخطأ الافتراضي المرغوب فيه.

وفيما يلي خطوات الاختبار.

1- صياغة الفرض العدم والفرض البديل:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_{i`} \quad or \quad H_0 : \mu_i - \mu_{i`} = 0 \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_{i`} \quad or \quad H_1 : \mu_i - \mu_{i`} \neq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

2- حساب $(\bar{y}_i. - \bar{y}_{i`}.)$ كتقدير غير متحيز للفرق $(\mu_i - \mu_{i`})$، حيث أن $(\bar{y}_i. > \bar{y}_{i`}.)$

3- حساب أقل فرق معنوي عند مستوى معنوية α باستخدام معادلة شيفيه التالية:

$$Q_s = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i`}}\right)} \ \sqrt{(t-1)\, F_{(1-\alpha,\, t-1,\, r.-t)}} \tag{9}$$

حيث أن: $F_{(1-\alpha,\, t-1,\, r.-t)}$ هي القيمة الجدولية المستخرجة من جدول توزيع مئويات F عند مستوى معنوية α، ودرجة حرية بسط $(t-1)$، ودرجات حرية مقام $(r.-t)\,,(r. = r_1 + r_2 + ... + r_t)$ أي أن القيمة $F_{(1-\alpha,\, t-1,\, r.-t)}$ هي القيمة الحرجة المستخدمة في اختبار فرض تساوي متوسطات المعالجات.

وعندما تكون المكررات متساوية $(r_1 = r_2 = ... = r_t = r)$ تحسب قيمة Q_s بالمعادلة التالية:

$$Q_s = \sqrt{MSE\left(\frac{2}{r}\right)} \ \sqrt{(t-1)\, F_{(1-\alpha,\, t-1,\, r.-t)}} \tag{10}$$

4- وبمقارنة الفرق $(\bar{y}_{i}.-\bar{y}_{i'}.)$ بقيمة Q_s يمكن اتخاذ قرار بشأن الفرض العدم والفرض البديل ، إذا كان $(\bar{y}_{i}.-\bar{y}_{i'}.)\geq Q_s$ يرفض الفرض العدم ويقبل الفرض البديل ويستدل على وجود فرق معنوي بين المتوسطين $(\mu_i , \mu_{i'})$.

كما أن هناك العديد من الطرق الأخرى لإجراء اختبارات الفروق المعنوية بين كل وسطين لا يتسع المجال لعرضها، وسيتم التعليق على نتائجها عند التطبيق على برنامج SPSS، وعلى سبيل المثال: اختبار بونفيروني Bonferroni، وتوكي Tukey ، ودنت Dunnett.
ولبيان كيفية الحصول على النتائج بالتطبيق على برنامج SPSS ، يتم عرض التطبيق التالي:

تطبيق

أربعة طرق لعلاج تقرحات الحمى، بما في ذلك العلاج البديل (الكنترول)، وزعت عشوائيا على 24 مريض من المرضى الذين يعانون من تقرحات الحمى، وتبين البيانات التالية لكل طريقة علاجية عدد الأيام من ظهور بثور الحمى وحتى اكتمال الشفاء.

Treatment	عدد الأيام اللازمة للشفاء الكامل					
Placebo(T_1)	5	8	7	7	10	8
T_2	4	5	6	3	5	6
T_3	6	4	4	5	4	3
T_4	9	3	5	7	7	6

والمطلوب

1. كون جدول تحليل التباين.
2. اختبر فرض تساوي متوسطات عدد الأيام اللازمة للشفاء الكامل للمعالجات.
3. إجراء المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات باستخدام طريقة أقل فرق معنويLSD، ثم علق على النتائج التي حصلت عليها.

مناقشة التطبيق:

يلاحظ أن عدد المعالجات $t=4$ ، وأن مكررات المعالجات متساوية $(r_1=r_2=r_3=r_4=r=6)$ ، وفيما يلي الإجابة على الفقرات المطلوبة:

1. تكوين جدول تحليل التباين.

باتباع نفس الخطوات في المحاضرة السابقة يمكن التوصل لجدول تحليل التباين التالي:

ANOVA

S.O.V	*SS*	*df*	*MS*	F^*
Treatments	36.458	3	12.153	5.227
Errors	46.500	20	2.325	
Total	82.958	23		

2. اختبار فرض تساوي متوسطات عدد الأيام اللازمة للشفاء الكامل للمعالجات.

من جدول تحليل التباين أعلاه، يلاحظ أن القيمة المحسوبة لإحصائية الاختبار $F^* = 5.227$ تزيد عن القيمة الجدولية $F_{(0.95,3,20)} = 3.098$ ، لذا نرفض فرض العدم الخاص بتساوي متوسطات عدد أيام امتثال الشفاء للمعالجات الأربعة ، ونقبل الفرض البديل، أي أن هناك متوسطين على الأقل يوجد بينها فرق معنوي، ولتحديد أي من المعالجتين بين متوسطيها فرق معنوي يتم إجراء اختبارات المقارانات الثنائية باستخدام بعض طرق المقارنات الثنائية، ومنها طريقة أقل فرق معنوي LSD

3. إجراء المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات باستخدام طريقة أقل فرق معنويLSD،

- حساب أقل فرق معنوي LSD:

بما أن المكررات متساوية لذا لا نحتاج لحساب متوسط توافقي.

$$LSD = t_{(1-\alpha/2,\ t(r-1))}\ S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'})} = E$$

$$t_{(1-\alpha/2,\ t(r-1))} = t_{(0.975,\ 20)} = 2.086$$

$$S.E_{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'})} = \sqrt{\frac{2MSE}{r}} = \sqrt{\frac{2(2.325)}{6}} = 0.88$$

$$LSD = 2.086 \times 0.88 = 1.836$$

- حساب الفروق بين متوسطات المعالجات $(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'})$ كما هو مبين بالجدول التالي

		T3	T2	T4
		4.333	**4.833**	**6.167**
T1	**7.500**	3.167	2.667	1.333
T4	**6.167**	1.833	1.333	
T2	**4.833**	0.500		

- وبمقارنة الفروق المحسوبة $(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'})$ بقيمة $LSD = 1.836$ يلاحظ الآتي:
  - الفرق $(\bar{y}_1. - \bar{y}_3.) = 3.167$ أكبر من 1.836 لذا نرفض العدم $H_0 : \mu_1 - \mu_3 = 0$ القائل بعدم وجود فرق معنوي بين المتوسطين، ونقبل الفرض البديل $H_1 : \mu_1 - \mu_3 \neq 0$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$
  - الفرق $(\bar{y}_1. - \bar{y}_2.) = 2.667$ أكبر من 1.836 لذا نرفض العدم $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ القائل بعدم وجود فرق معنوي بين المتوسطين، ونقبل الفرض البديل $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$
- يمكن التوصية باستخدام المعالجة الثالثة (T_3) أو المعالجة الثانية (T_2) أيها أقل تكلفة.

المقارنات المصممة Contrasts

في كثير من النواحي التطبيقية يحتاج الباحث إلى إجراء مقارنة بين مجموعتين من متوسطات المعالجات لتحقيق هدف معين من أهداف البحث، وفي هذه الحالة يصعب تطبيق طرق المقارنات الثنائية، لذا يتم استخدام أحد الطرق الإحصائية لإجراء مثل هذه المقارنة تسمى بطريقة المقارنات المصممة Contrasts.

- **تعريف المقارنة المصممة**

المقارنة المصممة هي عبارة عن مجموع متوسطات المعالجات المرجحة، أو هي توليفة خطية في متوسطات المعالجات. بفرض أن L_i تعبر عن المقارنة المصممة رقم i، فإن L_i هي توليفة خطية في المتوسطات $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_t)$ ويعبر عنها رياضيا كما يلي.

$$L_i = c_{i1}\mu_1 + c_{i2}\mu_2 + ... + c_{it}\mu_t = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\mu_j \qquad (11)$$

حيث أن $c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{it}$ تعبر عن معاملا التضاد، وتمثل أوزان للمتوسطات، ولكي تكون علاقة استقلالية independence relation، يجب تحقق القيد التالي:

$$\sum_{j=1}^{t} c_{ij} = c_{i1} + c_{i2} + ... + c_{it} = 0 \qquad (12)$$

- **اشتقاق معاملات التضاد**

تشتق المعاملات $c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{it}$ من خلال صياغة الفرض العدم H_0 في شكل معادلة صفرية، إذا كان هدف الباحث إجراء مقارنة متوسط المعالجة الضابطة μ_1 بمتوسطات المعالجات الأخرى $\mu_2, \mu_3, ..., \mu_t$، فإن الفرض العدم يمكن صياغته على الصورة التالية:

$$H_0 : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + ... + \mu_t}{(t-1)}$$

كما يمكن صياغة الفرض أعلاه في صورة معادلة صفرية كما يلي:

$$H_0 : \mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3 + ... + \mu_t}{(t-1)} = 0$$

ومن ثم تشتق معادلة المقارنة على الصورة التالية:

$$\lambda = \mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3 + ... + \mu_t}{(t-1)}$$
$$= (t-1)\,\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - ... - \mu_t$$

ومن المعادلة أعلاه تأخذ المعاملات الصورة التالية:

μ_t	...	μ_3	μ_2	μ_1	المتوسطات
c_t	...	c_3	c_2	c_1	المعامل
-1	...	-1	-1	$(t-1)$	القيمة

ولتوضيح كيفية اشتقاق معاملات المقارنة يمكن استخدام بيانات التطبيق (11.1) السابق، ونضع المقارنات التي تتفق مع الفروض التالية:

1- استخدام أي من طرق العلاج الثلاث (T_4, T_3, T_2) يعطي متوسط عدد أيام شفاء يختلف عن متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الضابطة (T_1).
2- استخدام أي من المعالجتين الثالثة والثانية (T_3, T_2) يعطي متوسط عدد أيام شفاء يختلف عن متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الرابعة (T_4).
3- متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الثانية (T_2) يختلف عن متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الثالثة (T_3).

ولاشتقاق المعاملات c_{ij} يفترض أن:

μ_1 : متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الضابطة T_1.

μ_2 : متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الثانية T_2.

μ_3 : متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الثالثة T_3.

μ_4 : متوسط عدد أيام الشفاء للمعالجة الرابعة T_4.

ويمكن صياغة الفروض التي تعكس المقارنات أعلاة كالتالي:

1- المقارنة المصممة الأولى: مقارنة متوسط المعالجة الضابطة T_1 بمتوسط المعالجات الثلاث الأخرى (T_4, T_3, T_2). والهدف من ذلك أن استخدام أي من طرق العلاج الأخرى أفضل من المعالجة الضابطة.

ولإجراء هذه المقارنة يصاغ الفرض العدم على الصورة التالية:

$$H_0 : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3}, \quad H_0 : \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3} - \mu_1 = 0$$

ومن ثم تكتب المعادلة التي تمثل هذا الفرض على الصورة الخطية في المتوسطات كما يلي:

$$L_1 = -3\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$$

2- المقارنة الثانية: مقارنة متوسط المعالجة الرابعة (T_4) بمتوسط المعالجتين الثالثة والثانية (T_3, T_2).

$$H_0 : \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = \mu_4, \qquad H_0 : \mu_4 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = 0$$

ومن ثم تكتب المعادلة الخطية كما يلي:

$$L_2 = -\mu_2 - \mu_3 + 2\mu_4$$

والهدف من هذه المقارنة أن استخدام أي من المعالجتين الثانية والثالثة أفضل من استخدام المعالجة الرابعة.

3- المقارنة الثالثة: مقارنة متوسط المعالجة الثانية T_2 بمتوسط المعالجة الثالثة T_3. في هذه الحالة يعبر عن الفرض العدم كالتالي:

$$H_0 : \mu_2 = \mu_3, \qquad H_0 : \mu_3 - \mu_2 = 0$$

ومن ثم تكتب المعادلة كعلاقة خطية في المتوسطين (μ_2, μ_3) كما يلي.

$$L_3 = -\mu_2 + \mu_3$$

والهدف من ذلك أن استخدام أحد المعالجتين لم يكن مفضل عن استخدام المعالجة الأخرى.

والجدول التالي يبين المعاملات c_{ij} في حالة المقارنات الثلاث.

μ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
c	c_1	c_2	c_3	c_4
L_1	-3	1	1	1
L_2	0	-1	-1	2
L_3	0	-1	1	0

ويلاحظ الآتي:

1- مجموع معاملات كل صف يساوي صفرا:

$$L_1 : -3+1+1+1=0,$$
$$L_2 : 0-1-1+2=0,$$
$$L_3 : 0-1+1+0=0$$

2- مجموع حاصل ضرب معاملات كل صفين يساوي صفرا.

$$L_1L_2 : (-3)(0)+(1)(-1)+(1)(-1)+(1)(2)=0,$$
$$L_1L_3 : (-3)(0)+(1)(-1)+(1)(1)+(1)(0)=0,$$
$$L_2L_3 : (0)(0)+(-1)(-1)+(-1)(1)+(2)(0)=0$$

- **توزيع المعاينة لتقدير معادلة المقارنة L_i**

يأخذ التقدير الإحصائي للتوليفة الخطية L_i الصورة التالية:

$$\hat{L}_i = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\hat{\mu}_j = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\bar{Y}_{j}. \tag{13}$$

حيث أن $\bar{Y}_j.$ هو تقدير متوسط المعالجة رقم j ، $\hat{L}_i$ هو التقدير غير المتحيز للتوليفة L_i ، وتحت افتراض أن الصفة محل الدراسة (عدد أيام الشفاء) لها توزيع، فإن التقدير $\hat{L}_i$ يتبع توزيع طبيعي متوسطه L_i وتباينه هو:

$$\sigma^2(\hat{L}_i) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2 / r_j\right) \tag{14}$$

حيث أن σ^2 هو تباين الخطأ التجريبي، وتقديره هو متوسط مربعات الأخطاء MSE ، ومن ثم يكون تقدير التباين $\sigma^2(\hat{L}_i)$ هو :

$$\hat{\sigma}^2(\hat{L}_i) = MSE \sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2 / r_j\right) \tag{15}$$

ومن ثم يأخذ الخطأ المعياري $S.E_{\hat{L}_i}$ الجذر التربيعي الموجب للتباين، ويعبر عنه كالتالي:

$$S.E_{\hat{L}_i} = \sqrt{MSE \sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2 / r_j\right)} \tag{16}$$

وإحصائية الاختبار المستخدمة في اختبار الفرض العدم للمقارنة رقم i تكتب على الصورة التالية:

$$t^* = \frac{\hat{L}_i}{S.E(\hat{L}_i)} = \frac{\hat{L}_i}{\sqrt{MSE \sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2 / r_j\right)}} \tag{9.17}$$

وتحت صحة الفرض العدم تتبع إحصائية الاختبار t^* توزيع t بدرجات حرية $(r.-t)$.

ولكي تكون المقارنات متعامدة Orthogonal أو مستقلة عن بعضها البعض يجب توافر شرطين هما:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t} c_{ij} &= c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{it} = 0 \\ \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\, c_{i`j} &= c_{i1}\, c_{i`1} + c_{i2}\, c_{i`2} + \ldots + c_{it}\, c_{i`t} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

ومن ثم تحقق المعادلات الثلاث شروط التعامد، ومن الممكن إثبات أن التغاير $Cov(\hat{L}_i, \hat{L}_{i'})$ يساوي صفرا.

تطبيق (2)

لدراسة تأثير ثلاث أنواع من السماد T3,T2,T1 بالإضافة إلى حالة عدم استخدام أي نوع T0 على إنتاجية الوحدة التجريبية المنزرعة بمحصول البطاطس بالطن، تم الحصول على البيانات التالية:

	أنواع السماد			
	T0 (لا يستخدم)	T1	T2	T3
1	12	15	18	12
2	11	12	16	15
3	12	14	18	15
4	10	14	17	11
5	9	11	14	14

والمطلوب:

1- كون جدول تحليل التباين.
2- أجري المقارنات المصممة التالية.
   - مقارنة عدم الاستخدام باستخدام أي من أنواع السماد الثلاثة.
   - مقارنة نوع السماد الثاني T2 بالنوعين الأول T1 والثالث T3.
   - مقارنة الأول T1 بالثالث T3.

1- جدول تحليل التباين:

C.F=3645	$\sum\sum y_{ij}^2$=3772
$\sum y_{i.}^2$	18650
SSTo	127
SSTr	85
SSE	42

S.o.V	df	SS	MS	F^*	$F_{(0.95,3,16)}$
Treat	3	85	28.333	10.794	3.239
Error	16	42	2.625		
Total	19	127			

2- إجراء المقارنات

- تكوين جدول المعاملات

Mean	**10.8**	**13.2**	**16.6**	**13.4**	
المقارنات	C_{1j}	C_{2j}	C_{3j}	C_{4j}	$\sum C_{ij}^2$
L1	**-3**	**1**	**1**	**1**	**12**
L2	**0**	**-1**	**2**	**-1**	**6**
L3	**0**	**1**	**0**	**-1**	**2**

- حساب التقديرات $\hat{L}_i$، والأخطاء المعيارية $S.E_{\hat{L}_i}$، وقيم إحصائية الاختبار t^*، وتلخيص النتائج بالجدول التالي:

: $\hat{L}_i = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\hat{\mu}_j = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\overline{Y}_{j}.$ وكذلك الأخطاء المعيارية $\hat{\sigma}(\hat{L}_i) = S.E_{\hat{L}_i} = \sqrt{MSE\sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2/r_j\right)}$

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 &= (-3)\overline{Y}_1. + (1)\overline{Y}_2. + (1)\overline{Y}_3. + (1)\overline{Y}_4.\\ &= (-3)(10.8) + (1)(13.2) + (1)(16.6) + (1)(13.4) = 10.8\end{aligned}$$

$$S.E_{\hat{L}_1} = \sqrt{MSE\sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2/r_j\right)} = \sqrt{\frac{2.625(12)}{5}} = 2.51$$

المقارنات	$\hat{L}_i = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}\overline{Y}_{j}.$	$S.E_{\hat{L}_i} = \sqrt{MSE\sum_{j=1}^{t}\left(c_{ij}^2/r_j\right)}$	$\lvert t^*\rvert = \left\lvert\frac{\hat{L}_i}{S.E_{\hat{L}_i}}\right\rvert$	t
1	10.8	2.51	4.30	2.12
2	6.6	1.77	3.72	2.12
3	-0.2	1.02	0.20	2.12

- القرار:

- بالنسبة للمقارنة الأولى $\left(H_0 : \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} - \mu_0 = 0\right)$

بما أن $|t^*| = 4.3$ أكبر من القيمة الجدولية $t = 2.12$ ومن ثم لا يمكن قبول الفرض العدم عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ويستدل من تقدير التوليفة الخطية $\hat{L}_1 = 10.8$ أن استخدام أي نوع من أنواع السماد (T_3, T_2, T_1) سينتج عنه متوسط إنتاج أعلى معنويا من متوسط الإنتاج في حالة عدم الاستخدام (T_0).

- بالنسبة للمقارنة الثانية $\left(H_0 : \mu_2 - \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} = 0\right)$

بما أن $|t^*| = 3.72$ أكبر من القيمة الجدولية $t = 2.12$ ومن ثم لا يمكن قبول الفرض العدم عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ويستدل من تقدير التوليفة الخطية $\hat{L}_2 = 6.6$ أن استخدام أي من النوعين (T_3, T_1) سوف ينتج عنه متوسط إنتاج أقل من متوسط الإنتاج المتحقق من استخدام النوع الثاني T_2 .

- بالنسبة للمقارنة الثالثة $(H_0 : \mu_1 - \mu_3 = 0)$

بما أن $|t^*| = 0.2$ أقل من القيمة الجدولية $t = 2.12$ ومن ثم لا يمكن رفض الفرض العدم عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، ويستدل من ذلك عدم وجود فرق معنوي بين متوسطي الإنتاج للنوعين (T_3, T_1) ، ونوصي في هذه الحالة باستخدام النوع الثاني T_2 لأنه يحقق أعلى متوسط للإنتاجية مقارنة بالأنواع الأخرى.