

## الانتاج في الاجل الطويل (12)

---

# عناصر الانتاج والمزيج الامثل

لتحقيق اقصى ارباح تحاول المنشأة للحصول على اقصى انتاج باستخدام عناصر الانتاج المتاحة لها معتمدة على اسعار عناصر الانتاج .

ويكون الانفاق الاجمالي (TC) لهذه المنشأة هو مانتفقة على كل عناصر الانتاج.

ففي حالة منشأة تستخدم عنصري انتاج عمل ورأس مال فان :

الانفاق على عنصر رأس المال = حجم رأس المال  $\times$  سعر عنصر رأس المال (ويقاس سعر رأس المال بسعر الفائدة)

الانفاق على عنصر العمل = عدد العمال  $\times$  الاجر (ويقاس سعر عنصر العمل بالاجر )

**Isocost Line دالة التكاليف او خط التكاليف**

$$TC = w.L + r.K$$

حيث (W) اجر العامل ، (r) سعر الفائدة

**تعريف خط التكاليف :** التوليفات او المجموعات المختلفة من عناصر الانتاج التي يمكن شراؤها عند مستوى معين من التكاليف

نلاحظ تشابه بين خط التكاليف وخط الدخل او قيد الميزانية في سلوك المستهلك

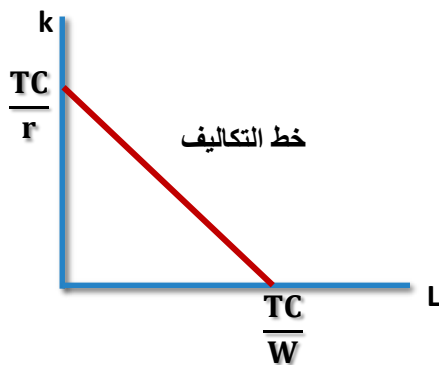
# تابع : عناصر الانتاج والمزيج الامثل

اقصى ما يمكن شراؤه من عنصر العمل اذا وجه كل الانفاق لعنصر العمل ولا شيء لرأس المال

$$L = \frac{TC}{w}$$

اقصى ما يمكن شراؤه من عنصر رأس المال اذا وجه كل الانفاق لعنصر رأس المال ولا شيء للعمل

$$K = \frac{TC}{r}$$



ويوضح خط التكاليف المعدل الذي تستطيع فيه المنشأة استبدال شراء رأس المال بالعمل

$$slope = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{-TC/r}{TC/w} = \frac{-w}{r}$$

$$\left| \frac{\Delta K}{\Delta L} \right| = \frac{w}{r} \rightarrow \text{معدل استبدال شراء رأس المال بالعمل}$$

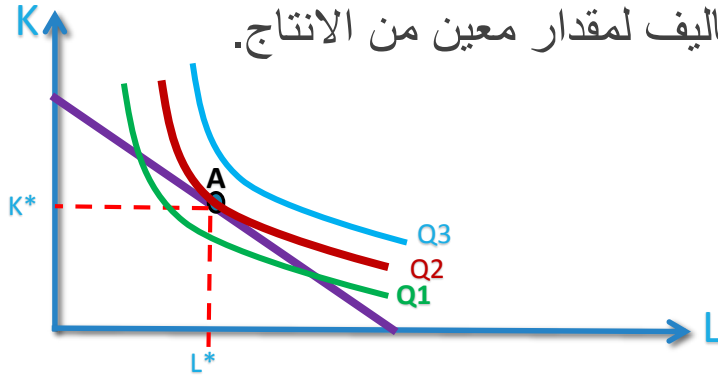
# تابع : عناصر الانتاج والمزيج الامثل

قد يكون هدف المنشأة احد امرين :

□ تختار التوليفة من عناصر الانتاج التي تحقق لها اقصى انتاج ممكن في ظل التكاليف المعطاة

□ تختار التوليفة من عناصر الانتاج التي تحقق لها اقل تكاليف لمقدار معين من الانتاج.

وبدمج منحنيات الناتج المتساوي مع خط التكاليف تحصل



اقصى انتاج تستطيع المنشأة الحصول عليه بالنسبة لخط تكاليف معين واسعار معطاه يتحدد بنقطة تماس خط التكاليف مع اعلى منحنى ناتج متساو ( $Q_2$ ) وبالتالي تتحدد الكميات المثلى لل ( $L^*$ ) و ( $K^*$ )

حيث عند النقطة (A) ميل خط التكاليف يساوي ميل منحنى الناتج المتساوي ( $MRTS_{KL}$ )

## تابع : عناصر الانتاج والمزيج الامثل

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{w}{r}$$

ميل خط التكاليف

ميل منحنى الناتج المتساوي بقيمة المطلقة (معدل الاحلال الحدي الفني)  $MRTS_{KL} = \frac{\Delta K}{\Delta L}$

$$MRTS_{KL} = \frac{MPL}{MPK}$$

مما سبق

$$\frac{MPL}{MPK} = \frac{w}{r}$$

وبالتالي عند التماس (نقطة التوازن)

$$MRTS_{KL} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{w}{r}$$

عند التوازن

تعظيم الانتاج عند مستوى تكاليف معين يتطلب ان تكون النسبة بين الانتاجية الحدية لعنصري الانتاج تساوي النسبة بين اسعار عناصر الانتاج

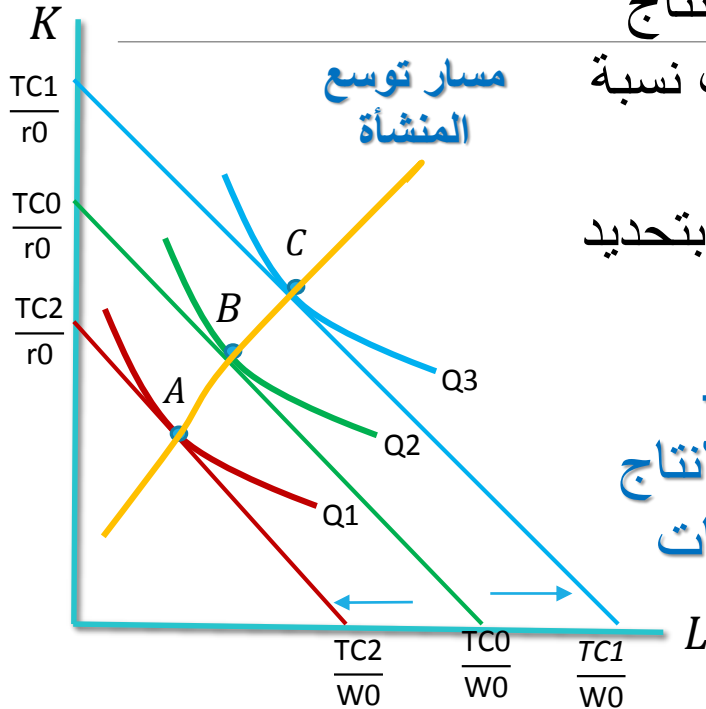
$$\frac{MPL}{w} = \frac{MPK}{r}$$

الانتاج المتولد من اخر ريال صرف على اي عنصر انتاجي بحيث يساوي الانتاج المتولد من اخر ريال صرف على العنصر الاخر. او بمعنى اخر يجب ان تمزج المنشأة عناصر الانتاج بحيث تكون الانتاجية الحدية لكل ريال منفق على جميع العناصر متساوية.

# مسار توسع المشروع

يوضح الطريقة التي يتغير فيها استخدام عناصر الانتاج والتكاليف مع ثبات اسعار عناصر الانتاج (اي ثبات نسبة اسعار عناصر الانتاج) باخذ ثلاث مستويات انتاج متساوي (Q1, Q2, Q3) وبالتحديد التوليفة المناسبة لكل مستوى انتاجي فان :

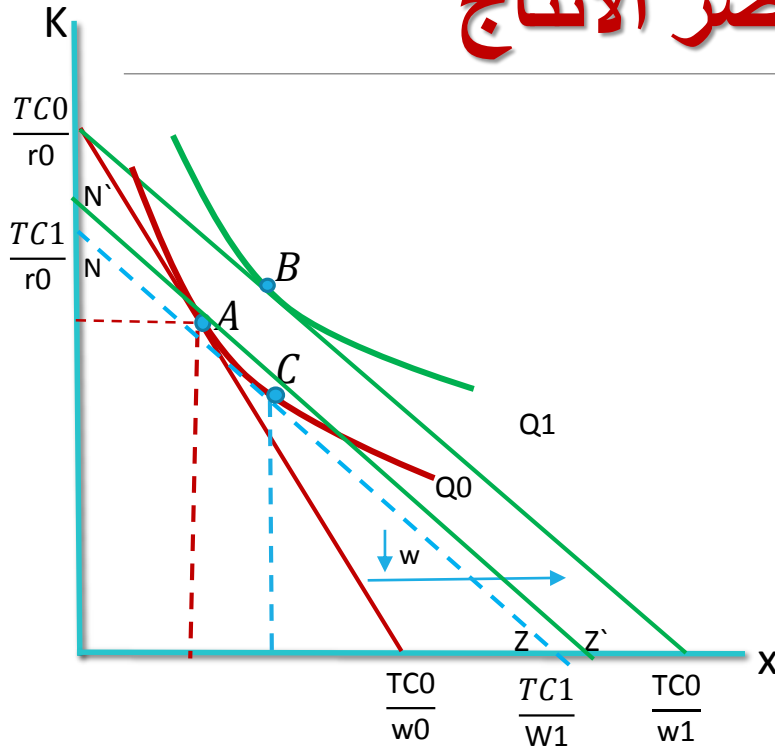
**مسار توسع المنشأة :** هو الخط الذي يصل بين نقاط التوازن التي تعطي التوليفات المثلى من عناصر الانتاج عندما تقرر المنشأة التوسع في انتاجها وذلك عند ثبات اسعار عناصر الانتاج  $(\frac{w}{r})$



## ملاحظات على مسار توسع المشروع

- قد يكون موجب الميل وهذا في عناصر الانتاج العادية وقد يكون سالب الميل اذا كان احد عناصر الانتاج رديء
- قد يكون كذلك افقي راو راسي اذا ثبتنا احد عناصر الانتاج .
- قد يكون خط او منحنى وهذا يعتمد على شكل دالة الانتاج

## التغير في اسعار عناصر الانتاج



بافتراض ان الوضع التوازني للمنشأة هو عند النقطة (A) وانخفض سعر عنصر العمل (W) كيف تتكيف المنشأة؟

□ اذا كانت المنشأة تعمل في المنافسة الكاملة من المحتمل ان تنتقل المنشأة الى النقطة (B) وتزيد انتاجها من  $(Q_0)$  الى  $(Q_1)$ .

□ ولكن اذا لم تكن تعمل في المنافسة الكاملة فسوف تحافظ على مستوى الانتاج السابق  $(Q_0)$  وباقل تكاليف ممكنه فتقوم باحلال عنصر الانتاج الرخيص نسبيا (L) محل عنصر الانتاج الاغلى نسبيا (K) وتستمر في عملية الاحلال حتى تصل الى النقطة (C) وبالتالي تحصل على نفس حجم الانتاج  $(Q_0)$  ولكن بتكاليف اقل من فيما لو استخدمت توليفة (A) لنفس مستوى الانتاج والسبب هو ان خط التكاليف (NZ) المماس للنقطة (C) اقل من خط التكاليف  $(N'Z')$  المماس للنقطة (A)

# مرونة الاحلال بين عناصر الانتاج

## Elasticity of Substitution

تهدف مرونة الاحلال لمعرفة مدى سهولة احلال عنصر انتاجي محل عنصر انتاجي اخر والحصول على نفس مستوى الانتاج .

**تعريف مرونة الاحلال بين عناصر الانتاج :** التغير النسبي في نسب عناصر الانتاج الى التغير النسبي في الاسعار النسبية لهذه العناصر .

$$\sigma = \frac{\% \Delta(K/L)}{\% \Delta(w/r)} = \frac{\Delta(K/L)/(K/L)}{\Delta(w/r)/(w/r)}$$

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{d(w/r)} \cdot \frac{(w/r)}{(K/L)} \longrightarrow \sigma = \frac{d(K/L)}{d(MRTS)} \cdot \frac{(MRTS)}{(K/L)}$$

وتعتمد مرونة الاحلال على شكل منحنى الناتج المتساوي وبالتحديد على درجة انحناءه او تقعره وتبحث في مدى سهولة احلال عنصر انتاجي محل الاخر عند تغير الاسعار النسبية مع البقاء على نفس منحنى الناتج المتساوي

اشارة معامل مرونة الاحلال بين عنصري الانتاج ( $\sigma$ ) دائماً موجبة لان البسط دائماً سالب والمقام دائماً سالب لماذا؟ وتتراوح قيمة ( $\sigma$ ) بين (0) و ( $\infty$ ). تكون ( $\sigma = \infty$ ) عندما يكون منحنى الناتج المتساوي على شكل خط مستقيم ويكون هنالك احلال تام بين عناصر الانتاج، وتصل ( $\sigma = 0$ ) عندما يكون منحنى الناتج المتساوي على شكل زاوية قائمة.



# تمرين 1

إذا اعطيتي دالة الانتاج التالية

$$Q = 24L^2 + 4L - L^3$$

1. هل دالة الانتاج هذه دالة انتاج في الاجل القصير ام الطويل ولماذا؟
2. اوجدي الانتاجية الحدية لعنصر العمل ؟
3. اوجدي الانتاجية الحدية لراس المال ؟
4. هل تخضع الانتاجية الحدية لعنصر العمل لقانون تناقص الغلة ولماذا ؟
5. اوجدي عدد العمال الذي تصل عنده الانتاجية الحدية لاقصى قيمه لها ( نفس اجابة اذا طلب عدد العمال عند بدء قانون تناقص الغلة او عدد العمال عند نقطة الانقلاب )
6. اوجدي عدد العمال عند مرحلة ثبات الغلة (نفس اجابة السؤال اوجدي عدد العمال عندما يصل الانتاج المتوسط لاقصى قيمة او عندما يتساوى الانتاج الحدي للعمل مع الانتاج المتوسط للعمل أو عندما يصل عنصر العمل لاقصى كفاءة )
7. اوجدي عدد العمال عندما يصل الانتاج الحدي للصفر (اوجدي عدد العمال عندما يصل الانتاج الكلي لاقصى قيمة او عدد العمال عندما تصل كفاءة راس المال لاقصى قيمة , عند نهاية المرحلة الاقتصادية
8. مرحلة تزايد الغلة تكون عندما عدد العمال أقل من ؟ حددي في ضوء النتائج التي توصلتي لها مع توضيد مراحل الانتاج على الرسم

# تمرين 2

إذا أعطيتي دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L^{1/2} K^{1/2}$$

$$1500 = 3L + 6K$$

ودالة التكاليف التالية

- أ - ما هي درجة تجانس دالة الإنتاج وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج ؟
- ب - ما هو سعر عنصر العمل وسعر رأس المال
- ج - أوجدني الإنتاجية الحدية لعنصر العمل ، والإنتاجية الحدية لرأس المال
- د - هل تخضع الإنتاجية الحدية لعنصر العمل لقانون تناقص الغلة ؟ ولماذا؟
- هـ - أوجدني الإنتاج المتوسط لعنصر العمل، والإنتاج المتوسط لعنصر رأس المال
- و - أوجدني معدل الإحلال الحدي الفني لعنصري الإنتاج ( $MRTS_{KL}$ ) وتحققي هل هو متزايد أم متناقص بالنسبة لعنصر العمل ولماذا؟ .
- ز - أوجدني الكميات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج أقصى إنتاج ؟

# تمرين 3

---

إذا أعطيتي دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L K$$

$$300 = 15L + 2K$$

ودالة التكاليف التالية

أ - ما نوع هذه الدالة ؟ وما هي درجة تجانس دالة الإنتاج؟ وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج؟

ب - ما هو سعر عنصر العمل وسعر رأس المال ؟

ج - أوجد الكميّات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج أقصى إنتاج باستخدام دالة لانجرانج مع التوضيح بالرسم

ما هو الشرط الكافي؟ وهل تحقق؟

# تمرين 4 واجب

إذا أعطيتي دالة الإنتاج التالية :

$$Q = L^{\alpha} K^{\beta}$$

$$TC = wL + rK$$

ودالة التكاليف التالية

$$\text{حيث } 0 < \beta < 1, 0 < \alpha < 1, \alpha + \beta = 1$$

أ - ما نوع هذه الدالة ؟ وما هي درجة تجانس دالة الإنتاج؟ وفي أي مرحلة من مراحل الإنتاج؟

ب - ما هو سعر عنصر العمل وسعر رأس المال ؟

ج - أوجدي الإنتاجية الحدية لعنصر العمل ، والإنتاجية الحدية لرأس المال

د - هل تخضع الإنتاجية الحدية لعنصر العمل لقانون تناقص الغلة ؟ ولماذا؟

هـ - أوجدي الإنتاج المتوسط لعنصر العمل، والإنتاج المتوسط لعنصر رأس المال

و - أوجدي معدل الإحلال الحدي الفني لعنصري الإنتاج ( $MRTS_{KL}$ ) وتحققي هل هو متزايد أم متناقص بالنسبة لعنصر العمل ولماذا؟ .

ز - أوجدي الكميات من عنصري الإنتاج التي تحقق لهذا المنتج أقصى إنتاج إذا علمتي أن أجر العامل 2 وسعر رأس المال 3 واجمالي التكاليف 60 ؟