

الفصل الرابع الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

أ. لولوه بن سعيد

مقدمة

- ▶ من أبرز عيوب استخدام تحليل الانحدار البسيط في المنهج التجريبي هو أنه من الصعب جداً التوصل إلى استنتاجات واقعية حول كيفية تأثير المتغير التابع بمتغير مستقل واحد مع بقاء العوامل الأخرى التي تؤثر به فعلياً باقية على حالها.
- ▶ فيأتي نموذج الانحدار الخطي المتعدد امتداداً للنموذج البسيط و يتضمن أكثر من متغير مستقل واحد، و يسمى أيضاً بنموذج الانحدار العام و تكون المعادلة على الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n + u_i$$

- ▶ يكثر استخدام نموذج الانحدار المتعدد في الدراسات الاقتصادية لأنه من غير الواقعي أن يتم تفسير ظاهرة اجتماعية مثلاً بالاعتماد على متغير واحد فقط، فتكون نماذج الانحدار المتعدد أو العام هي الحالة العامة و ليس الاستثناء التي تعطي نماذج أفضل للتنبؤ بالمتغير التابع.

مقدمة

- ▶ تحليل الانحدار المتعدد له قابلية كبيرة في تحليل ثبات العوامل الأخرى لأنه يتيح السيطرة على العديد من العوامل الأخرى التي تؤثر على المتغير التابع في الوقت نفسه. و هذا مهم لاختبار النظريات الاقتصادية لأن نماذج الانحدار المتعدد تستوعب الكثير من المتغيرات التفسيرية ذات العلاقة و تستنتج العلاقة السببية في الحالات التي يكون فيها تحليل الانحدار البسيط مضللاً.

مقدمة

- ▶ تقدم لنا النظرية الاقتصادية عديد من الأمثلة للانحدار المتعدد أو العام مثل:
 - دالة الطلب التي توضح أن الكمية المطلوبة من السلعة كمتغير تابع تتأثر بسعر السلعة نفسها و أسعار السلع الأخرى و الدخل كمتغيرات تفسيرية.
 - و كذلك دالة الإنتاج التي توضح أن حجم الناتج كمتغير تابع يتحدد بكميات عناصر الإنتاج من العمل و رأس المال و التكنولوجيا و غيرها كمتغيرات تفسيرية.
 - و تشير العلاقة الدالية في الانحدار العام إلى علاقة سببية بين المتغيرات التفسيرية و المتغير التابع حيث تعني أن التغير في المتغيرات المستقلة يصحبها تغير ما في المتغير التابع.

مقدمة

- ▶ في نموذج الانحدار الخطي العام تشير خطية العلاقة بين المتغيرات المستقلة من ناحية، و المتغير التابع من ناحية أخرى إلى حقيقة أن أثر المتغير المستقل على المتغير التابع لا يختلف من مفردة لأخرى بالعينة.
- ▶ و لذلك فإن استخدام نموذج الانحدار الخطي في تقدير العلاقات الاقتصادية ينطوي على درجة كبيرة من التبسيط حيث يفترض أن جميع الأفراد مثلاً يتصرفون بنفس الطريقة و أن تفضيلاتهم متماثلة. و هذا لا يمثل الحقيقة فيتم افتراض وجود نوع من الخطأ في التقدير و يمثله الحد العشوائي في الدالة.

- مزايا نموذج الانحدار المتعدد:

- ١- استيعاب الكثير من المتغيرات التفسيرية ذات العلاقة بالمتغير التابع و توضيح العلاقة السببية بين المتغيرات.
- ٢- القدرة على إضافة المتغيرات المتعددة المفيدة في شرح التغير في Y و من ثم تفسير الاختلافات فيه و إعطاء توقع أفضل للتنبؤ بالمتغير التابع
- ٣- يتضمن دالة عامة لشكل العلاقات، على العكس من النموذج البسيط الذي يتضمن دالة واحدة من متغير تفسيري واحد يظهر في المعادلة، و بالتالي يكون النموذج المتعدد أكثر مرونة.

أولاً: الفروض الأساسية للنموذج العام

► هي نفس الفروض التي يستند عليها النموذج البسيط لكي نتحصل على النموذج المقدر:

١- المتغير العشوائي يتوزع طبيعياً

٢- $E(U) = 0$ و بالتالي متوقع أن تكون المقدرات غير متحيزة.

٣- ثبات التباين و انعدام التغاير.

٤- المتغيرات المستقلة ثابتة.

٥- عدد المشاهدات $n <$ عدد المتغيرات k .

٦- لا توجد علاقة بين المتغيرات المستقلة.

ثانياً: اختبار الفرضيات للنموذج المتعدد:

► **أ- اختبار المعنوية:** يؤخذ بعين الاعتبار الفرضيات الفردية لمعاملات النموذج المتعدد، على سبيل المثال: في حال اختبار دالة الاستيراد فإنه يتم اختبار أثر الدخل على المستوردات و كذلك اختبار أثر الأسعار عليها:

لا يوجد تأثير للدخل $H_0 : \beta_2 = 0$

يوجد تأثير للدخل $H_1 : \beta_2 \neq 0$

لا يوجد تأثير للأسعار $H_0 : \beta_3 = 0$

يوجد تأثير للأسعار $H_1 : \beta_3 \neq 0$

► فيتم حساب قيمة t باستخدام برنامج E-views بالإضافة إلى قيمة p

➤ و معرفة قيمة p كافية لرفض أو عدم رفض فرض العدم، فإذا كانت قيمة p-value أكبر من 0.05 عند مستوى معنوية 5% فيتم رفض H_0 .

➤ و بمقارنة قيمة t المحسوبة لكل معلمة متغير مستقل بالقيمة الحرجة عند 5% فإذا كانت القيمة الحرجة أكبر من القيمة المحسوبة فإنه يتم رفض فرضية العدم H_0 .

ثالثاً: اختبار الفرضيات للنموذج المتعدد:

► **ب- معامل التحديد المتعدد:** يعرف R^2 كنسبة من التباين الكلي في Y مفسرة بالانحدار المتعدد Y على المتغيرات المفسرة X_1 و X_2 .

► تزداد قيمة R^2 بإضافة متغيرات مستقلة، و يعكس مدى قوة النموذج في تفسير تغيرات المتغير التابع نتيجة تغيرات المتغيرات المستقلة.

ثالثاً: اختبار الفرضيات للنموذج المتعدد:

► ج- اختبار الأهمية العامة للانحدار: يمكن اختبار الأهمية العامة للانحدار بنسبة التباين المفسر إلى التباين غير المفسر و هذا يتبع توزيع f بدرجات حرية $k-1$ و $n-k$ حيث n : عدد المشاهدات و K : عدد المعلمات المقدرة.

► فإذا كانت نسبة F المحسوبة تتجاوز قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية معين و درجة حرية، يتم قبول الفرضية القائلة بان معاملات الانحدار لا تساوي الصفر و أن R^2 تختلف عن الصفر أي قبول الفرض البديل و أن β_1 و β_2 ... $\beta_n \neq$ الصفر.

ثالثاً: اختبار الفرضيات للنموذج المتعدد:

- **د- معامل الارتباط الجزئي:** يقيس صافي العلاقة بين المتغير التابع و متغير مستقل بعد استبعاد التأثير المشترك للمتغيرات المستقلة الأخرى في النموذج. على سبيل المثال الارتباط الجزئي بين Y و X1 بعد إزالة تأثير X2 و X3:

$$r_{YX_1.X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2} r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_2}^2}}$$

و يختلف معامل الارتباط باختلاف العلاقة التي يدرسها الباحث بين المتغيرات

ثالثاً: اختبار الفرضيات للنموذج المتعدد:

- **ز- مصفوفة الارتباط:** هي أداة مهمة لتقييم مدى حساسية النتائج عند إدراج أو استبعاد بعض المتغيرات و الأسباب المحتملة لتقدير غير دقيق. كما أن زيادة عدد المتغيرات المستقلة فإن هذا يؤدي إلى زيادة العمليات الحسابية فيتم استخدام المصفوفة.

Correlation	GDP	M	RER
GDP	1.000000		
M	0.972140	1.000000	
RER	-0.735688	-0.660462	1.000000

ثالثاً: تقدير نموذج الانحدار الخطي العام

► الطريقة الإحصائية التي تستخدم في قياس معاملات الانحدار للنموذج هي طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least Squares (OLS) أو طريقة الإمكانيات العظمى. و سيتم الاعتماد على طريقة OLS في التقدير و التي تم تناولها مسبقاً، و تهدف إلى تحويل الطريقة الإحصائية التي تستخدم في قياس العلاقة إلى طريقة قياسية تتلاءم مع الطبيعة الاحتمالية للعلاقات الاقتصادية:

الافتراض الأول:

أن المتغير (U) متغير حقيقي عشوائي ويفترض أن يكون حقيقياً أي يأخذ قيمة رقمية محددة و هذه القيم قد تكون موجبة أو سالبة أو صفرية، و يفترض أيضاً أن يكون عشوائياً بمعنى أن القيم التي يأخذها تعتمد على الصدفة فهي غير مؤكدة الحدوث و لها احتمال أقل من الواحد.

الافتراض الثاني:

أن القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي (U) عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل تساوي صفراً، فلن تكون هناك حاجة لتحديد القيمة المتوقعة للحد العشوائي في التنبؤ نظراً لأنها تساوي صفر.

الافتراض الثالث:

أن تباين الحد العشوائي (U) يكون ثابتاً عند جميع قيم المتغير المستقل، و يعني أن الفرق أو المدى بين الحد الأقصى و الحد الأدنى لقيم المتغير العشوائي عند كل قيمة يكون ثابت.

الافتراض الرابع:

أن المتغير العشوائي له توزيع معتدل عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل أي أنه سيكون ناقوسي الشكل.

∴ حسب الافتراضات السابقة يمكن القول أن حد الخطأ العشوائي له قيم محددة و احتمالية و موزعة توزيعاً معتدلاً، متوسطها صفر و تباينها ثابت

الافتراض الخامس:

أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل تكون مستقلة عن بعضها البعض، أي أن تباين قيم العشوائي في الفترات المتتالية يكون صفر. و هذا يعفينا من مشكلة مؤداها ان الخطأ العشوائي في فترة واحدة قد يكون هو السبب في توليد الأخطاء العشوائية في كل الفترات التالية.

الافتراض السادس:

أن قيم المتغير (U) مستقلة عن قيم المتغير التفسيري (X)، بمعنى أن X لا يؤثر و لا يتأثر ب U و هذا يعني أن تباين (U ، X) = صفر. و ذلك لأن التداخل بينهما يصعب تحديد النسبة التي يمكن تفسيرها من Y بدلالة X ، و من ثم فإن أخطاء القياس المتضمنة في U تتعلق بالمتغير التابع Y فقط.

الافتراض السابع:

ليست كل قيم المتغير المستقل متساوية (ثابتة)، حيث يجب أن تكون هناك على الأقل قيمة واحدة مختلفة عن باقي القيم، فإذا كان شكل الانتشار رأسي فإن طريقة المربعات الصغرى تصبح غير صالحة لتقدير علاقة الانحدار

الافتراض الثامن:

أن المتغيرات المستقلة كالدخل مثلاً تقاس بلا أخطاء، و هذا يعني ان الأخطاء التي يمكن أن تقع تكون عند قياس المتغير التابع، و من ثم فإن أخطاء القياس المتضمنة في (U) تتعلق بالمتغير التابع Y فقط.

الافتراض التاسع:

أن المتغيرات المستقلة إحصائياً أي إذا وجد أكثر من متغير مستقل فإن الارتباط بينهم يكون منعماً أو ضعيفاً، فلو أن هناك متغيرين مرتبطين ارتباطاً خطياً تماماً يمكن اعتبارهما متغيراً واحداً و من ثم فإن إدراجهما سوياً في معادلة الانحدار سيؤدي إلى عدم دقة قياس المعلمات.

الافتراض العاشر:

عدم وجود مشاكل للتجميع، أي ان المتغيرات التجميعية تكون بطريقة سليمة. كما يجب ان تكون الصيغة الرياضية متميزة و لا تتشابه مع صيغ أخرى في نفس النموذج بالإضافة إلى صحة تعيين النموذج و التأكد من درجة الخطية و عدد المتغيرات.

إذا تحققت كل هذه الافتراضات في الواقع فإن النتائج المقدرة التي سنتحصل عليها بطريقة

أ. لولوه بن سعيد

المربعات الصغرى العادية يمكن الاطمئنان إلى صحتها

وكما سبق في الفصل الثالث:

► يمكن حصر الخصائص المرغوبة للمقدرات في حالة العينة الصغيرة و التي سيتم

اعتمادها في هذا المقرر فيما يلي:

١- عدم التحيز Unbiasedness

٢- أقل تباين Least Variance

٣- الكفاءة Efficiency

٤- الخطية Linearity

٥- المثلى الخطية (BLUE) Best Linear Unbiased Estimator

٦- أدنى متوسط مربعات خطأ (MSE) Minimum Mean-Square Error

٧- الكفاية Sufficiency

Case Studies

يتضمن الاقتصاد التطبيقي دراسات و تطبيقات عديدة تستخدم الطرق القياسية في نتائجها، و بالتالي ستم دراسة الحالة في شكل مجموعات للنماذج التالية:

- ▶ نموذج الانحدار البسيط: نموذج تسعير الأصول المالية
- ▶ نموذج الانحدار المتعدد: منحنى التعلم و وفورات الحجم
- ▶ نموذج الانحدار غير الخطي: تقدير دالة الطلب على الكهرباء
- ▶ نموذج تصحيح الخطأ: اختبار نظرية تعادل القوى الشرائية