إعداد د: *محمود الدريني*

المحاضرة (2) – 2 ساعة

الاستدلال الإحصائي

المحتويات

1- التعريف بالاستدلال الإحصائي ووظائفه.

2- بعض المفاهيم والمصطلحات المستخدمة في الاستدلال الإحصائي.

3- الرموز المستخدمة.

4- الاستدلال الإحصائي حول متوسط مجتمع.

- حالة معلومية التباين.
- حالة عدم معلومية التباين.
  - عينات صغيرة.
  - عينات كبيرة.

5- الاستدلال الإحصائي حول الفرق بين متوسطي مجتمعين:

- حالة عينتان مستقلتان.
  - تجانس تبايني المجتمعين.
  - عدم تجانس تبايني المجتمعين.
- عينتان متزاوجتان.

الأهداف

1- اكساب الطالب معرفة توزيع المعاينة المناسب عند إجراء الاستدلال الإحصائي.

2- اكساب الطالب مهارة القيام بتقدير فترة الثقة واختبار فرض حول متوسط المجتمع.

3- اكساب الطالب مهارة القيام بتقدير فترة الثقة واختبار فرض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين في حالة العينتين مستقلتين، وكذلك حالة العينتين متزاوجتان)

آلية التنفيذ

1- تشكيل فرق عمل حسب التخصص لتنفيذ ماتم عرضه بالمحاضرة

2- نشاط منزلي

1- مفهوم الاستدلال الإحصائي ووظائفه

الاستدلال الإحصائي هو أحد وظائف علم الإحصاء، وتظهر أهميته في كثير من النواحي التطبيقية التي يكون فيها معالم توزيع الظاهرة في المجتمع محل الدراسة غير معلومة ، أو النواحي التي يكون فيها التوزيع ذا معالم معروفة ويحتاج الباحث إلى إتخاذ قرار حول صحة قيم هذه المعالم وذلك في الوقت الذي يصعب فيه إجراء حصر شامل لجميع مفردات المجتمع من أجل إمكانية حساب القيم الحقيقية لهذه المعالم. لذا يقوم الباحث بسحب عينة عشوائية من المجتمع محل الدراسة من أجل دراسة خصائص هذا المجتمع.

ومن ثم يعرف الاستدلال الإحصائي بأنه أخذ جزء من المجتمع محل الدراسة يسمى عينة لتحقيق وظيفتين من وظائف علم الإحصاء هما:

- التقدير الإحصائي: **Statistical Estimation**
- اختبارات الفروض الإحصائية: **Hypotheses Tests**

ولكي يتم عرض هاتين الوظيفتين بنوع من التفصيل، يتم عرض بعض المصطلحات التي يكثر استخدامها في الاستدلال الإحصائي.

2- بعض المفاهيم والمصطلحات المستخدمة في الاستدلال الإحصائي.

هناك بعض المصطلحات المفاهيم الإحصائية التي يكثر إستخدامها مع إجراء استدلال إحصائي يتم الإشارة إليها بنوع من الإيجاز لكي تمكن القارئ فهم حقيقة الاستدلال وهذه المصطلحات

المعلمة Parameter: هو مقياس من المقاييس الإحصائية التي تدخل في تحديد موضع تمركز بيانات الظاهرة المدروسة وشكل توزيعها في المجتمع، كالمتوسط ويرمز له بالرمز (μ)، وهو من مقاييس الموضع، والتباين ويرمز له بالرمز (σ^2) وهو من مقاييس التشتت. ويمكن الحصول على قيم حقيقية للمعالم إما من خبرات سابقة عن شكل التوزيع النظري للظاهرة في للمجتمع ، أو حسابها من بيانات متاحة عن كل مفردات المجتمع.

الإحصـاءه Statistics: هو مقياس يحسب باستخدام بيانات العينة، ولها توزيع احتمالي يسمى بتوزيع المعاينة لها، مثل المتوسط ويرمز له بالرمز $(\bar{y})$، وتقرأ "متوسط قيم المتغير y في العينة"، والتباين (S_y^2) وتقرأ "تباين قيم المتغير y في العينة".

المقدر Estimator : هو المعادلة التي تستخدم للحصول على تقدير لمعلمة المجتمع من بيانات العينة المسحوبة من هذا المجتمع. وعلى سبيل المثال، معادلة متوسط العينة: $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$ هي مقدر لمعلمة متوسط المجتمع (μ).

التقدير Estimate : هو القيمة العددية المحسوبة للمقدر من بيانات العينة.

التقدير بنقطة Point Estimation: هو حساب قيمة واحدة باستخدام بيانات العينة كتقدير لمعلمة المجتمع، وعلى سبيل المثال يكون متوسط العينة $(\bar{y})$ هو تقدير بنقطة لمتوسط المجتمع (μ)، وتباين العينة (S_y^2) هو تقدير بنقطة لتباين المجتمع (σ^2).

التقدير بفترة Interval Estimation : هو تقدير مدي **Rang** يقع داخله معلمة المجتمع، ويتطلب ذلك استخدام بيانات العينة في حساب الحدين الأدنى والأعلى لهذا المدى.
فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ **Confidence Interval**: هو المدى الذي يقع داخله معلمة المجتمع باحتمال قدره $(1-\alpha)$، ويتحدد هذا المدى بناءً على توزيع المعاينة لمقدر معلمة المجتمع، ويسمى $(1-\alpha)$ بمعامل الثقة، $(1-\alpha)\%$ بمستوى الثقة، الحدين الأدنى والأعلي للمدى بحدي الثقة.

توزيع المعاينة للمقدر Sampling distribution: هو التوزيع الاحتمالي للمقدر الذي تحسب قيمته من بيانات العينة المسحوبة من مجتمع له توزيع احتمالي معلوم.

خصائص المقدر الجيد: في كثير من النواحي التطبيقية، عند البحث عن تقدير لأحد معالم المجتمع محل الدراسة، يواجه الباحث بمقاييس كثيرة كمقدرات لهذه المعلمة، ولكي يحدد أفضل هذه المقدرات، يجب معرفة خصائص المقدر الجيد كمعيار لاختيار أحد هذه المقاييس، ويتصف المقدر الجيد بأربعة صفات هي:

- **عدم التحيز Unbiased**: يتصف المقدر بخاصية عدم التحيز عندما تساوي قيمته المتوقعة $\mu_{(Estimator)}$ القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع، أي $\mu_{(Estimator)} = \text{Parameter}$، أو هو

الــذي يــؤول إحتماليــا إلــى المعلمــة الحقيقيــة عنــدما تكبــر حجــم العينــة.
$\lim_{n\to\infty} (pr\,|\,\text{estimator - Parameter}\,|) = 0$.

- **الاتســاق Consistency**: يتصف المقدر بخاصية الاتساق إذا كان غير متحيز، ولـه تبــاين يــؤول إلــى الصــفر عنــدما يكبــر حجــم العينــة، أي إذا تحقــق الشــرطين:
$\lim_{n\to\infty} (pr\,|\,\text{estimator - Parameter}\,|) = 0$ ، $\lim_{n\to\infty} (\sigma^2_{\text{estimator}}) = 0$
- **الكفـاءة النسـبية Relative Efficiency**.المقدر الكفؤ هو الذي لـه أصـغر تبـاين مقارنة بتباينات المقدرات الأخرى.
- **الكفاية Sufficiency**: المقدر الكافي هو الذي يشمل معلومات عن كل مفردات العينة.

مثال (1): عند تقدير متوسط دخل الأسرة في المجتمع، أي المقدر من بين المقدرين (الوسط الحسابي، الوسيط) تفضل كمقدر لمتوسط المجتمع؟، ولماذا؟.

يمكن دراسة مدى مطابقة خصائص كلا المقدرين (المتوسط والوسيط) مع خصائص المقدر الجيد من خلال الجدول التالي:

خصائص المقدر الجيد	**الوسط الحسابي** $\bar{y}$	**الوسيط** med
عدم التحيز	الوسط الحسابي مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع $E(\bar{y}) = \mu_{\bar{y}} = \mu$	الوسيط med مقدر متحيز لمتوسط المجتمع. $E(med) = \mu_{med} \neq \mu$
الاتساق	الوسط الحسابي مقدر متسق: $E(\bar{y}) = \mu_{\bar{y}} = \mu$ $\lim_{n\to\infty} (\sigma^2_{\bar{y}}) = \lim_{n\to\infty} (\sigma^2_y / n) = 0$	الوسيط med مقدر غير متسق $E(med) \neq \mu$ $\lim_{n\to\infty} (\sigma^2_{med}) \neq 0$
الكفاءة	الوسط الحسابي مقدر كفؤ، حيث له أصغر تباين مقارنة بالمقدرات الأخرى $\sigma^2_{\bar{y}} < \sigma^2_{med}$	الوسيط مقدر غير كفؤ، حيث له تباين كبير مقارنة بتباين الوسط الحسابي.

الكفاية	الوسط الحسابي مقدر كافي لأنه يأخذ كل قيم أو مشاهدات العينة في الاعتبار: $\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i / n$	الوسيط مقدر غير كافي لأنه يعتمد فقط على قيمة أو قيمتين من العينة، فهو لا يأخذ كل القيم أو المشاهدات في الاعتبار.

من خلال المقارنة أعلاه يلاحظ أن الوسط الحسابي للعينة كمقدر لمتوسط الدخل في المجتمع يتصف بصفات المقدر الجيد مقارنة بوسيط العينة، لذا يفضل استخدام الوسط الحسابي كمقدر جيد لمتوسط الدخل في المجتمع.

توزيع المعاينة Sampling distribution: هو التوزيع الاحتمالي لإحصاءة العينة ، والذي يرتبط بالتوزيع الاحتمالي للمجتمع المسحوب منه هذه العينة. فعند سحب عينة من مجتمع له توزيع طبيعي له متوسط (μ)، وتباين معلوم (σ^2)، يكون متوسط العينة $\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i / n$ أيضا له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{y}}=\mu$، وتباين $\sigma_{\bar{y}}^2=(\sigma^2/n)[(N-n)/(N-1)]$ إذا كان حجم المجتمع N محدود، أو تباين $\sigma_{\bar{y}}^2=(\sigma^2/n)$ إذا كان حجم المجتمع N كبير أو غير محدود كما سنبين عند عرض الاستدلال الإحصائي حول متوسط مجتمع.

نظرية الحد المركزي Central limit theorem: عند سحب عينة عشوائية من مجتمع ما، فإن متوسط العينة ($\bar{y}$) يقترب توزيعه من التوزيع الطبيعي عندم تكبر حجم العينة كبرا كافيا.

3-الاستدلال الإحصائي حول متوسط مجتمع (μ)

يهتم الكثير من الباحثين في النواحي التطبيقية بدراسة متوسطات الظواهر المختلفة في المجتمع واحتياجاتهم البحثية إلى بناء فترات ثقة لهذه المتوسطات لمعرفة المدى الذي يقع داخله قيمة كل ظاهرة قيد الدراسة بثقة عالية، ومن ناحية أخرى الرغبة في اتخاذ القرارات بخصوص الفروض المصاغة حول قيم هذه الظواهر حتى يتسنى تقديم التوصيات للمهتمين بوضع الخطط ورسم السياسات المتعلقة بهذه الظواهر.

لذا يهتم هذا الفصل بتقديم الاستدلال الإحصائي بشقيه (التقدير، واختبارات الفروض) حول متوسط ظاهرة في مجتمع μ .

1-3 تقدير فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ

تعرف فترة الثقة كما سبق بأنها الفترة التي يقع داخلها معلمة المجتمع باحتمال أو بمعامل ثقة معينة. والشكل العام لحساب حدي فترة الثقة عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ هو:

$$Point\ \ Estimate \pm (Tabulated\ \ Value\ )(\ Standard\ \ Error) \qquad (1)$$

حيث أن:

Point Estimate : التقدير بنقطة ، ويحسب من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع محل الدراسة.

Tabulated Value : القيمة الجدولية وتتحدد بناءً على توزيع المعاينة للتقدير بنقطة.

Standard Error : الخطأ المعياري للتقدير وتتحدد قيمته بناءً على ما إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم أو غير معلوم، وكذلك حجم العينة المسحوبة n.

وفيما يلي عرض طرق تقدير فترات الثقة لمتوسط الجتمع في الحالات التالية:

- حالة معلومية التباين.
- حالة عدم معلومية التباين.
  - عينات صغيرة.
  - عينات كبيرة.

أولا: تقدير فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ في حالة معلومية تباين المجتمع σ^2

إذا كانت العينة العشوائية $(y_1, y_2, ..., y_n)$ مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 معلوم، فإن توزيع المعاينة للمقدار $z = (\bar{y} - \mu)/\sigma_{\bar{y}}$ هو التوزيع الطبيعي القياسي، ومن ثم تحسب فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ لمتوسط المجتمع μ بالمعادلة التالية:

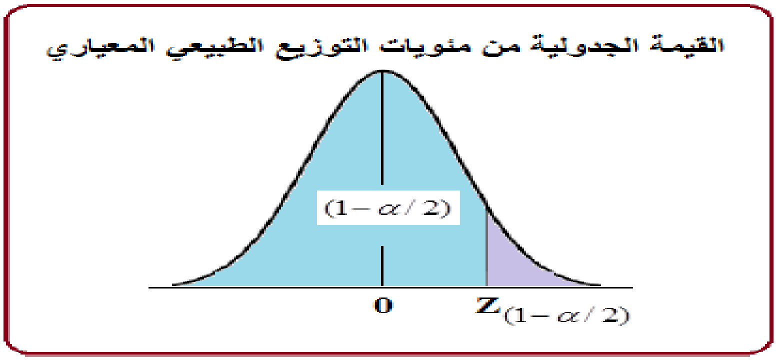
$$Point\ \ Estimate \pm (Tabulated\ \ Value\ )(\ Standard\ \ Error)$$
$$\bar{y} \pm \ (Z_{(1-\alpha/2)})\ \ (\sigma_{\bar{y}}) \qquad (2)$$

حيث أن:

$\bar{y}$: هو متوسط العينة، ويمثل التقدير بنقطة لمتوسط المجتمع μ ، ويحسب بالمعادلة التالية:

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

$Z_{(1-\alpha/2)}$: القيمة الجدولية وتستخرج من جدول مئويات التوزيع الطبيعي المعياري رقم (2) بحيث يقع على يسارها مساحة قدرها $\%(1-\alpha/2)$.



$\sigma_{\bar{y}}^{2}$: الخطأ المعياري لمتوسط العينة ويعبر عنه في هذه الحالة بالمعادلة التالية:

- إذا كان حجم المجتمع N محدد:

$$\sigma_{\bar{y}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{3}$$

- إذا كان حجم المجتمع N كبير أو غير محدد:

$$\sigma_{\bar{y}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

ويعرف حاصل الضرب $E=\left(Z_{(1-\alpha/2)}\ \sigma_{\bar{y}}^{2}\right)$ بمقدار اختلاف متوسط العينة عن متوسط المجتمع، $(\bar{y}\neq\mu)$ بالحد الأقصى للخطأ المسموح به، والذي يمثل نصف مدى الثقة. ومن ثم يمكن كتابة فترة الثقة بالصورة التالية:

$$\begin{aligned}&Point\ \ Estimate \pm E\\&\bar{y}\pm\ (Z_{(1-\alpha/2)})\ (\sigma_{\bar{y}})=\bar{y}\pm E\end{aligned} \tag{5}$$

تطبيق (1)

بفرض أنه تم اختيار عينة عشوائية من الأبقار الحلوب حجمها 5 أبقار من مزرعة بها 50 بقرة ، وتم قياس الإنتاج اليومي من الحليب وكانت كالتالي:

البقرة	1	2	3	4	5
كمية الإنتاج اليومي	21	18	23	26	26

وبافتراض أن الإنتاج اليومي من الحليب للبقرة يتبع توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه يساوي **9** ، قدر فترة ثقة 95% لمتوسط الإنتاج اليومي من الحليب للبقرة في المزرعة.

الحــل:

من البيانات أعلاه يلاحظ الآتي:

- الإنتاج له توزيع طبيعي.
- تباين المجتمع معلوم، حيث أن $\sigma^2 = 9$.
- حجم المجتمع محدد $N = 50$.

ولتقدير فترة ثقة **95**% لمتوسط الإنتاج اليومي من الحليب للبقرة في المزرعة، تطبق الصيغة **(2)** وذلك كالتالي:

- حساب متوسط العينة $\bar{y}$ كتقدير بنقطة لمتوسط الإنتاج من الحليب اليومي في المزرعة :

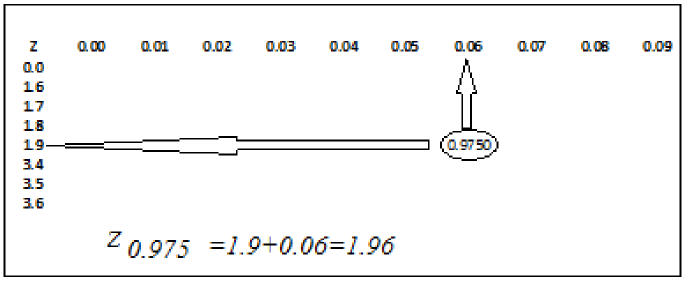
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{21+18+23+26+26}{5} = \frac{114}{5} = 22.8$$

- حساب الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{y}}^2$

$$\sigma_{\bar{y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{50-5}{50-1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{45}{49}} = 1.2857$$

- توزيع المعاينة هو التوزيع الطبيعي المعياري، ولذا يستخدم جدول رقم (2) في الحصول على القيمة الجدولية $z_{(1-\alpha/2)}$ عند مستوى ثقة **95**% ، أي عندما يكون $(1-\alpha) = 0.95$ ، ويتم ذلك كالتالي:

$$(1-\alpha) = 0.95, \qquad \alpha = 0.05, \qquad 1-\alpha/2 = 1-0.05/2 = 0.975$$
$$z_{(1-\alpha/2)} = z_{0.975} = 1.96$$



- الحد الأقصى للخطأ المسموح به E:

$$E = z_{0.975}.\sigma_{\bar{y}} = (1.96)(1.2857) = 2.519972$$

- حدي الثقة هما:

$$\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2}.\sigma_{\bar{y}} = \bar{y} \pm E$$
$$22.8 \pm 2.52$$

الحد الأدنى: $Lower = 22.8 - 2.52 = 20.28$

الحد الأعلى: $Upper = 22.8 + 2.52 = 25.32$

بثقة 95% يقع متوسط إنتاج الحليب اليومي للبقرة في المزرعة μ بين حد أدنى 20.28 وحد أعلى 25.32 ، وبمعنى آخر باحتمال 0.95 يقع متوسط إنتاج الحليب اليومي للبقرة في المزرعة μ بين حدي $(20.28, 25.32)$

$$Pr(20.28 < \mu < 25.32) = 0.95$$

تطبيق (2)

في إحدى شركات تصنيع مواسير المياه 2 بوصة، تم اختيار عينة من إنتاج المصنع حجمها 10 مواسير ووجد أن متوسط قطر الماسورة في العينة 2.06 بوصة، إذا علم أن قطر الماسورة يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري **0.05**. قدر فترة ثقة 99% لمتوسط قطر الماسورة في المصنع.

الحل (2)

من البيانات المذكورة أعلاه يلاحظ الآتي:

- قطر الماسورة يتبع توزيع طبيعي
- تباين المجتمع معلوم $\sigma^2 = (0.05)^2 = 0.0025$

- حجم المجتمع غير محدود.

ولتقدير فترة ثقة 99% لمتوسط قطر الماسورة في المصنع ، تطبق الصيغة (2) وذلك كالتالي:

- متوسط قطر الماسورة في العينة هو: $\bar{y}=2.06$ وهو تقدير بنقطة لمتوسط قطر الماسورة في المصنع.
- حساب الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{y}}$

$$\sigma_{\bar{y}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.05}{\sqrt{10}}=\frac{0.05}{3.162}=0.0158$$

- توزيع المعاينة هو التوزيع الطبيعي المعياري، ولذا يستخدم جدول رقم (2) في الحصول على القيمة الجدولية $z_{(1-\alpha/2)}$ عند مستوى ثقة 99% ، أي عندما يكون $(1-\alpha)=0.99$ ، ويتم ذلك كالتالي:

$$(1-\alpha)=0.99, \qquad \alpha=0.01, \qquad 1-\alpha/2=1-0.05/2=0.995$$
$$z_{(1-\alpha/2)}=z_{0.995}=2.58$$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0										
0.1										
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
0.6										

$$Z_{0.995} = 2.5+0.08=2.58$$

- الحد الأقصى للخطأ المسموح به E:

$$E=z_{0.995}.\sigma_{\bar{y}}=(2.58)(0.0158)=0.041$$

- حدي الثقة هما:

$$\bar{y}\pm z_{1-\alpha/2}.\sigma_{\bar{y}}=\bar{y}\pm E$$
$$2.06\pm 0.041$$

الحد الأدنى: $Lower=2.06-0.041=2.019$

الحد الأعلى: $Upper=2.06+0.041=2.101$

بثقة 99% يقع متوسط قطر ماسورة المياة قطر 2 بوصة المصنعة في المصنع μ بين حد أدنى 2.019 بوصة وحد أعلى 2.101 بوصة، أي أن :

$$Pr(2.019 < \mu < 2.101) = 0.99$$

ثانيا: تقدير فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ في حالة عدم معلومية تباين المجتمع σ^2

إذا كانت العينة العشوائية $(y_1, y_2, ..., y_n)$ مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم، فإن:

- تباين العينة S^2 يستخدم كتقدير بنقطة لتباين المجتمع σ^2، ويحسب بالمعادلة

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}}{n-1} \tag{6}$$

وهو تقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ^2.

- تقدير الخطأ المعياري لمتوسط العينة هو $S_{\bar{y}}$، ويحسب بالمعادلة:

$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} &= \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad if \quad N \quad finit \\ S_{\bar{y}} &= \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad if \quad N \quad infinit \end{aligned} \tag{7}$$

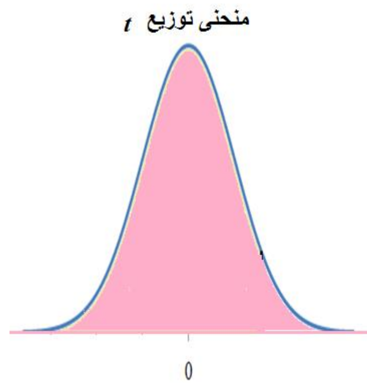
- توزيع المعاينة للمقدار $t = (\bar{y} - \mu)/S_{\bar{y}}$ هو توزيع t بدرجات حرية $(n-1)$

توزيع t

هو أحد التوزيعات الاحتمالية المستمرة، يتصف بالخصائص الإحصائية التالية:

- هذا التوزيع له معلمة واحدة هي درجات الحرية γ
- ذا منحنى متماثل حول الصفر ومدبب،

$\left[p(t_{(\gamma)} < t_{1-\alpha}) = 1 - p(t_{(\gamma)} > t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha\right]$.



- متوسط التوزيع صفرا، وتباينه $[\gamma/(\gamma-2)]$ ، ومعامل إلتواؤه صفرا.

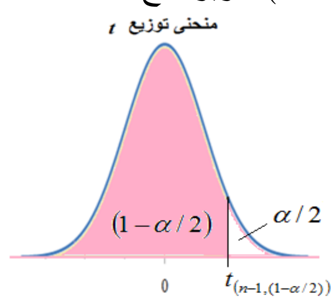
- وتكون فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ لمتوسط المجتمع μ هي:

$$Point\ \ Estimate \pm (Tabulated\ \ Value\ )(\ Standard\ \ Error) \quad (8)$$
$$\bar{y} \pm t_{(n-1,(1-\alpha/2))} \cdot S_{\bar{y}} = \bar{y} \pm E$$

حيث أن:

$\bar{y}$: هو متوسط العينة.

$t_{(n-1,(1-\alpha/2))}$: هي قيمة جدولية تستخرج من جدول مئويات توزيع t رقم (3) عند درجة حرية $\gamma = n-1$، واحتمال تجميعي $(1-\alpha/2)$، ويوضح بالشكل التالي.



$S_{\bar{y}}$: الخطأ المعياري في حالة عدم معلومية تباين المجتمع σ^2، ويحسب بالمعادلة (7).

تطبيق (3)

في إحدى شركات عبوات عصائر التفاح حجم 0.25 لتر ، تم اختيار عينة حجمها 17 عبوة وتم قياس كمية الصوديوم بالمل. ولخصت البيانات بالجدول التالي

No	1	2	3	4	5	6	7	8

كمية صوديوم	12.9	13.2	12.3	12.7	11.6	12.1	12.1	12.9

No	9	10	11	12	13	14	15	16	17
كمية صوديوم	12.3	13	12.3	12.2	12.3	12.9	12.4	12	12.3

إذا علم أن كمية الصوديوم المضافة للعبوة تتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 أوجد الآتي:

- التقدير غير المتحيز لتباين المجتمع.
- الخطأ المعياري لمتوسط العينة.
- قدر فترة ثقة 90% لمتوسط كمية الصوديوم المضافة لعبوة العصير.

الحل (3)

من البيانات المذكورة أعلاه يلاحظ الآتي:

- كمية الصوديوم تتبع توزيع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم.
- حجم المجتمع غير محدود.

إذا:

- التقدير غير المتحيز لتباين المجتمع هو تباين العينة ويحسب بتطبيق المعادلة **(6)**

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$n=17$$

$$\sum_{i=1}^{17}y_i=12.9+13.2+\ldots+12.3=211.5$$

$$\sum_{i=1}^{17}y_i^2=(12.9)^2+(13.2)^2+\ldots+(12.3)^2=2634.19$$

$$S^2=\frac{2634.19-\frac{(211.5)^2}{17}}{16}=0.1801$$

تباين العينة هو **0.1801** وهو تقدير غير متحيز لتباين المجتمع.

- الخطأ المعياري لمتوسط العينة يحسب بتطبيق المعادلة **(7)** الثانية.

$$S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0.1801} = 0.4244$$

$$S_{\bar{y}} = \frac{0.4244}{\sqrt{17}} = 0.1029$$

- لتقدير فترة ثقة 90% لمتوسط كمية الصوديوم المضافة لعبوة العصير تطبق الصيغة **(8)** وذلك كالتالي:
- متوسط كمية الصوديوم المضافة في العينة هو:

$$\bar{y} = (211.5)/17 = 12.44$$

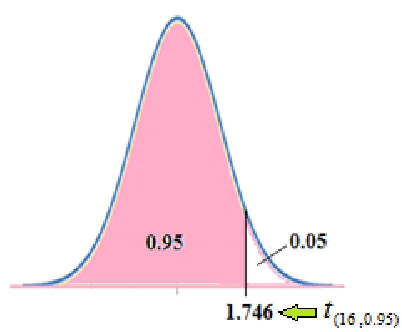
- الخطأ المعياري $S_{\bar{y}} = 0.1029$

- توزيع المعاينة المستخدم هو توزيع t بدرجات حرية $\gamma = (n-1)$ ، ولذا يستخدم جدول رقم (3) في الحصول على القيمة الجدولية $t_{(n-1,(1-\alpha/2))}$ عند مستوى ثقة **90**% ، أي عندما يكون $(1-\alpha) = 0.90$ ، ويتم ذلك كالتالي:

$$(1-\alpha) = 0.90, \qquad \alpha = 0.10, \qquad 1-\alpha/2 = 1-0.10/2 = 0.95$$

$$t_{((n-1),1-\alpha/2)} = t_{(16,0.95)} = 1.746$$

	الاحتمالات التجميعية						
γ	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
16	0.865	1.071	1.337	**1.746**	2.120	2.583	2.921
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898



- الحد الأقصى للخطأ المسموح به E:

$$E = t_{(16,0.95)} \cdot S_{\bar{y}} = (1.746)(0.1029) = 0.1797$$

- حدي الثقة هما:

$$\bar{y} \pm z_{1-\alpha/2}.S_{\bar{y}} = \bar{y} \pm E$$
$$12.44 \pm 0.1797$$

الحد الأدنى: $Lower = 12.44 - 0.1797 = 12.2603$

الحد الأعلى: $Upper = 12.44 + 0.1797 = 12.6197$

بثقة 90% يتراوح متوسط كمية الصوديوم المضافة لعبوة العصير في الشركة μ بين حد أدنى 12.3 مل وحد أعلى 12.6 مل، أي أن:

$$Pr(12.3 < \mu < 12.6) = 0.90$$

فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ في حالة العينات الكبيرة (تقريب توزيع t للتوزيع الطبيعي)

إذا كانت العينة العشوائية مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 غير معلوم، فإن توزيع المعاينة للمقدار $(\bar{y}-\mu)/S_{\bar{y}}$ هو توزيع t بدرجات حرية $\gamma = (n-1)$ ، وفي حالة كبر حجم العينة بشكل كافي $(n > 30)$ يقترب توزيع المقدار $(\bar{y}-\mu)/S_{\bar{y}}$ من التوزيع الطبيعي المعياري، وبناء على ذلك يمكن يمكن إنشاء ثقة بتطبيق المعادلة التالية:

$$Point\ \ Estimate \pm (Tabulated\ \ Value\ )(\ Standard\ \ Error)$$
$$\bar{y} \pm Z_{(1-\alpha/2)}.S_{\bar{y}} = \bar{y} \pm E \qquad (9)$$
$$S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad n > 30$$

3-2 اختبارات الفروض حول متوسط مجتمع μ

يعد اختبارات الفروض أحد عناصر الاستدلال الإحصائي كوظيفة من وظائف علم الإحصاء، والهدف من إجراء اختبارات الفروض الإحصائية بشكل عام التوصل إلى اتخاذ قرار بخصوص فرض الباحث حول معلمة المجتمع، وفي هذا الفصل سوف نهتم بكيفية إجراء اختبارات الفروض الإحصائية حول متوسط مجتمع μ، وفيما يلي بعض الأمثلة لتقريب معنى فرض الباحث من ذهن القارئ.

- الصفة المدروسة (كمية الإنتاج من محصول البطاطس) : من المعلوم أن إنتاج الهكتار 20 طن، رأى الباحث أن التخلي عن حراثة الأرض بعد كل موسم يؤدي إلى انخفاض انتاجية الهكتار عن 20 طن. إذا فرض الباحث والذي يسمى بالفرض البديل في هذه الحالة هو: *إهمال حراثة الأرض يؤدي إلى إنخفاض متوسط إنتاج الهكتار عن 20 طن*،

ويصاغ إحصائيا كما يلي:

$$H_1 : \mu < 20$$

حيث يدل الرمز H_1 على فرض الباحث أو الفرض البديل

- الصفة المدروسة: (كمية الصوديوم المضافة إلى عبوات العصائر التي تنتجها إحدى الشركات): إذا كان من المعتاد أن كمية الصوديم المناسبة التي يجب إضافتها 120 مج، ورأى مراقب الإنتاج اختلاف الكمية المضافة عن الكمية المتعارف عليها بسبب إهمال الصيانة الدورية للآلات: يكون فرض الباحث هو : *تحتاج الآلات إلى صيانة بسبب اختلاف كميات الصوديوم المضافة عن 120* مج، ويصاغ إحصائيا كالتالي:

$$H_1 : \mu \neq 120$$

- الصفة المدروسة: (زيادة وزن الطفل النحيف الذي بلغ عمرة 10 سنوات) :إذا كان من المعلوم أن انخفاض وزن الطفل البالغ من العمر 10 سنوات عن 28 كجم يؤدي إلى إصابة الطفل بالنحافة، ويقترح الباحث في مجال علوم الأغذية برنامج غذائي لزيادة الوزن: يكون فرض الباحث هو: *اتباع البرنامج الغذائي يؤدي إلى زيادة الوزن عن 28* كجم، ويصاغ الفرض إحصائيا كالتالي:

$$H_1 : \mu > 28$$

أنواع الفروض:

تتحدد الفروض الإحصائية في نوعين متضادين من الفروض، الأول ويسمى بفرض الباحث أو البديل، والثاني وهو المضاد ويسمى بالفرض العدم.

الفرض البديل H_1 *Alternative Hypotheses*:

ويسمى بفرض الباحث ، وهو ما يود الباحث إثبات صحته ومن ثم قبوله والتوصية بالعمل به.

الفرض العدم H_0 *Alternative Hypotheses*:

هو الفرض المضاد لفرض الباحث، ويرمز له بالرمز H_0 ، ويدل على قيمة المعلمة محل

الدراسة في المجتمع.

ويبين الجدول التالي اتجاهات الفرض البديلة أو البحثية وفروض العدم.

الفرض البديل H_1	الفرض العدم H_0
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$

حيث أن μ_0 هو متوسط المجتمع عندما يكون الفرض العدم فرضا صحيحا.

ويلاحظ أن الفرض العدم دائما مصاحب بعلامة = لذا يمكن صياغة هذا الفرض في الحالات الثلاث بصياغة واحدة هي: $H_0 : \mu = \mu_0$

خطوات الاختبار

ولإجراء اختبار فرض حول متوسط المجتمع μ، يتم إتباع الخطوات التالية:

- سحب عينة عشوائية من المجتمع حجمها n، وحساب التقدير بنقطة (متوسط العينة $\bar{y}$)، والانحراف المعياري لها S.
- إذا كان متوسط العينة $\bar{y}$ في اتجاه مؤيد للفرض البحثي(البديل) $(\bar{y} \neq \mu_0 ,\bar{y} > \mu_0 ,\bar{y} < \mu_0)$ يجب الاستمرار في إتمام باقي الخطوات وهي كالتالي:
- صياغة الفرض العدم والفرض البديل (الباحث)

الفرض البديل H_1	الفرض العدم H_0
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ or $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ or $H_0 : \mu = \mu_0$

- حساب إحصائية الاختبار وهي:

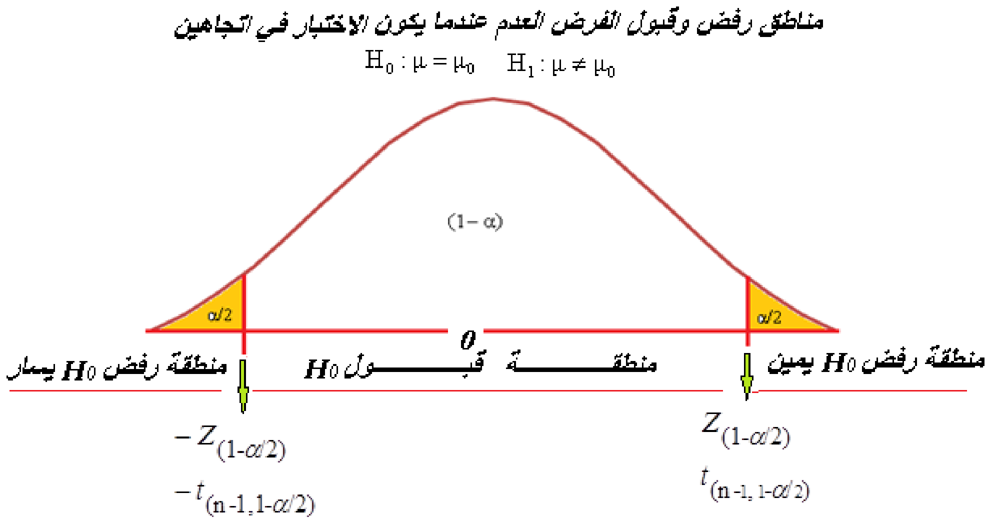
$$Test\ statistics = \frac{\bar{y} - \mu_0}{S.E_{\bar{y}}} \qquad (10)$$

ويتحدد توزيع المعاينة لإحصائية الاختبار *Test statistics* أعلاه بناءً على ما إذا كان تباين المجتمع معلوم أو غير معلوم. ويوضح الجدول التالي توزيع المعاينة في الحالتين:

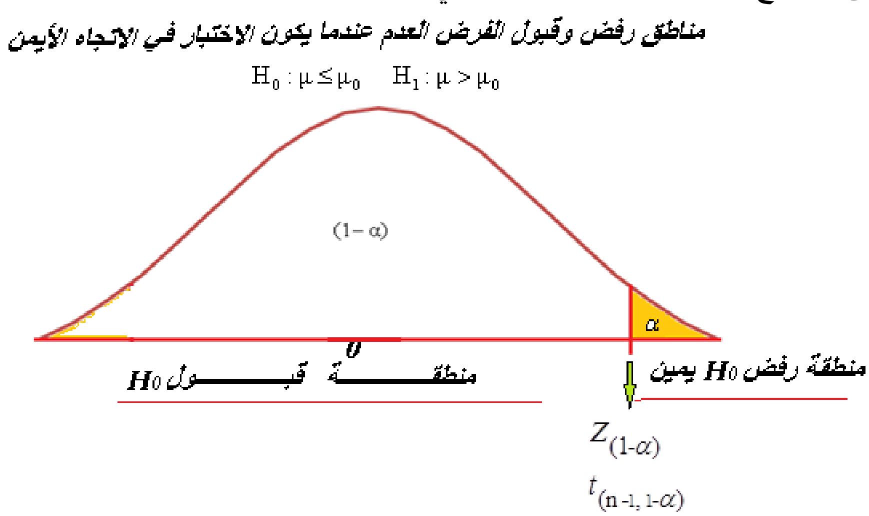
توزيع معاينة إحصائية الاختبار	إحصائية الاختبار *Test statistics*	حجم العينة n	تباين المجتمع σ^2
توزيع طبيعي معياري	$Z^* = \dfrac{(\bar{y} - \mu_0)}{\sigma_{\bar{y}}}$	لا يشترط	معلوم
توزيع t بدرجات حرية $\gamma = (n-1)$	$t^* = \dfrac{(\bar{y} - \mu_0)}{S_{\bar{y}}}$	صغير $n \leq 30$	غير معلوم
توزيع t بدرجات حرية $\gamma = (n-1)$ ويقرب إلى توزيع طبيعي معياري	$t^* = \dfrac{(\bar{y} - \mu_0)}{S_{\bar{y}}} \approx Z^* = \dfrac{(\bar{y} - \mu_0)}{S_{\bar{y}}}$	كبير $n > 30$	
$\sigma_{\bar{y}} = \sigma / \sqrt{n}$	$S_{\bar{y}} = S / \sqrt{n}$		

- تحديد مستوي المعنوية (α) ويعبر عن احتمال رفض الفرض العدم H_0 عندما يكون فرضا صحيحا، ويسمى بالخطأ من النوع الأول، ويحدده الباحث عند $\alpha = 0.05$ أو $\alpha = 0.01$.
- تحديد مناطق رفض وقبول الفرض العدم، والقيم الحرجة كما يلي:

    - إذا كان الفرض البديل $H_1 : \mu \neq \mu_0$ يكون الاختبار في اتجاهين، ويقصد بذلك أن مساحة منطقة الرفض α مقسمة بالتساوي إلى نصفين أحدها في الذيل الأيمن والثاني في الذيل الأيسر لمنحنى التوزيع المستخدم، ويوضح الشكل التالي منطقتي الرفض والقبول للفرض العدم H_0 .

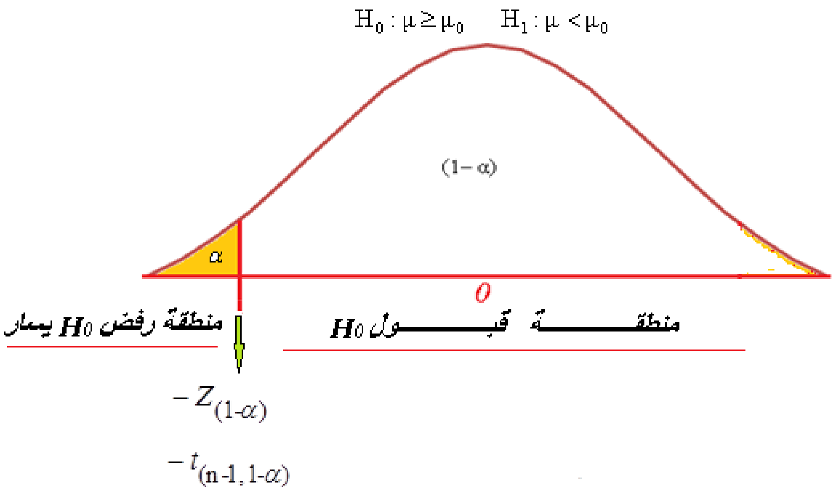


- إذا كان الفرض البديل $H_1 : \mu > \mu_0$ يكون الاختبار في اتجاه واحد وهو الاتجاه الأيمن، ويقصد بذلك أن مساحة منطقة الرفض α بأكملها تقع في الذيل الأيمن من منحنى التوزيع كما هو مبين بالشكل التالي:



- إذا كان الفرض البديل $H_1 : \mu < \mu_0$ يكون الاختبار في اتجاه واحد وهو الاتجاه الأيسر، ويقصد بذلك أن مساحة منطقة الرفض α بأكملها تقع في الذيل الأيسر من منحنى التوزيع كما هو مبين بالشكل التالي:

مناطق رفض وقبول الفرض العدم عندما يكون الاختبار في الاتجاه الأيسر



- القرار: إذا كانت قيمة إحصائية الاختبار المحسوبة (Z^* أو t^*) تقع في منطقة الرفض، يرفض الفرض العدم H_0 ويقبل الفرض البديل H_1.

تطبيق (4)

يرى باحث أن ممارسة رياضة المشي لمدة ساعة خلال أربع أيام أسبوعيا ولمدة ستة أشهر يؤدي إلى تخفيض مستوي الكلسترول عن 100 ملغ/ديسيلتر، اختيرت عينة عشوائية من المصابين بارتفاع مستوى الكلسترول حجمها 15 مصاب وتم إخضاعهم لهذا البرنامج الرياضي، وبعد الفترة الزمنية المحددة تم قياس مستوى الكلسترول ولخصت في الجدول التالي.

89	94	93	100	82	89	100	85	102	90	104	94	100	105	100

هل توافق الباحث في رأيه، وذلك عند مستوى معنوية 5% ؟

مناقشة التطبيق

يلاحظ من التطبيق الآتي:

- أن الباحث لديه برنامج رياضي لتخفيض مستوى الكلسترول الضار يريد أن يوصي المرضى باتباعه ومؤدى هذا الفرض " *ممارسة رياضة المشي لمدة ساعة خلال أربع أيام أسبوعيا ولمدة ستة أشهر يؤدي إلى تخفيض مستوي الكلسترول عن 100 ملغ/ديسيلتر* " أي أن $H_1 : \mu < 100$

- أن تباين مستوى الكلسترول في الدم σ^2 غير معلوم، وأن حجم العينة صغير ، حيث أن $n=15<30$ ، ومن ثم يكون توزيع المعاينة لإحصائية الاختبار هو توزيع $t_{(n-1)}$ بدرجات حرية $\gamma=(n-1)$ ، ولإجراء هذا الاختبار يتم تطبيق الخطوات السابق ذكرها وهي:
- بحساب متوسط مستوى الكلسترول في العينة،

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{n}=\frac{1427}{15}=95.13 mg/dic$$

يلاحظ أن متوسط العينة $\bar{y}=95.13$ أقل من متوسط المجتمع $\mu=100$ ، أي أن متوسط العينة في اتجاه مؤيد لصحة فرض $H_1:\mu<100$ لذا سوف نستمر في إجراء خطوات الاختبار وهي:

- صياغة الفرض العدم والفرض البديل (الباحث)

$$H_0:\mu=100 \qquad H_1:\mu<100$$

- حساب إحصائية الاختبار

$$\sum_{i=1}^{15} y_i=1427 \qquad \sum_{i=1}^{15} y_i^2=136457$$

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}}{n-1}}=\sqrt{\frac{136457-\frac{(1427)^2}{15}}{15-1}}=7.08$$

$$S_{\bar{y}}=\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{7.08}{\sqrt{15}}=1.83$$

$$t^*=\frac{\bar{y}-\mu_0}{S_{\bar{y}}}=\frac{95.13-100}{1.83}=\frac{-4.867}{1.83}=-2.662$$

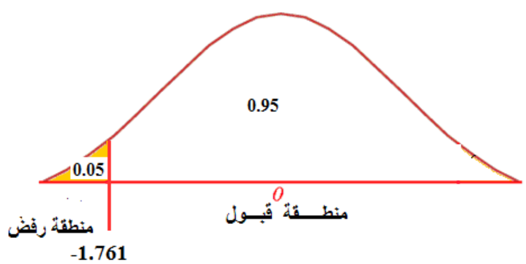
- مستوي المعنوية $(\alpha=0.05)$.

- منطقة رفض وقبول الفرض العدم:

تقع منطقة الرفض في الذيل الأيمن ومساحتها $\alpha = 0.05$، ومن ثم تستخرج القيمة الحرجة $t_{(1-\alpha,\ n-1)}$ من جدول (3) عند درجات حرية $\gamma = (n-1) = 14$ واحتمال تجميعي $(1-\alpha) = 1-0.05 = 0.95$ ، وتعطى إشارة سالب لوقوعها في الجانب الأيسر. أي أن

$$t_{(1-\alpha,\ n-1)} = t_{(1-0.05,\ 15-1)} = t_{(0.95,\ 14)} = 1.761$$

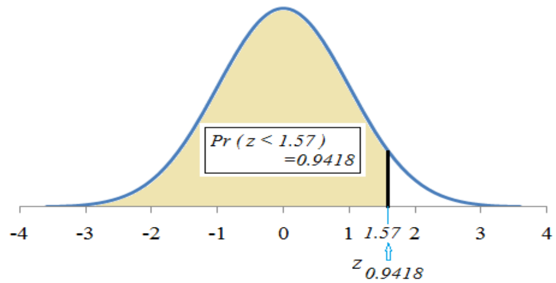
إذا القيمة الحرجة هي $-t_{(0.95,14)} = -1.761$:



- القرار: بما أن إحصائية الاختبار $t^* = -2.662$ أقل من القيمة الجدولية $-t_{(0.95,\ 14)} = -1.761$ أي أنها تقع في منطقة الرفض، إذا يرفض الفرض العدم H_0 ويقبل الفرض البديل H_1، ويستدل من ذلك على أن ممارسة رياضة المشي لمدة ساعة أربع أيام أسبوعيا ولمدة ستة أشهر يؤدي إلى نقصان مستوى الكلسترول عن 100 ملغ/ديسيلتر وذلك عند مستوى معنوية *5%*، ومن ثم أوافق الباحث في إدعائه ونوصي للمصاب بارتفاع مستوى الكلسترول إتباع هذه الطريقة.

جدول (2): قيم مئويات التوزيع الطبيعي المعياري z

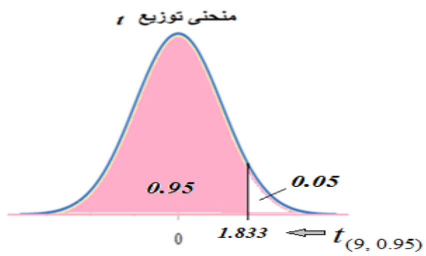
$$z_{0.9418} = 1.57$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

إعداد د: محمود الدريني

جدول (3): *توزيع مئويات t*



	الاحتمالات التجميعية						
γ	**0.800**	**0.850**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	**3.355**
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750