جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

111 ريض
حساب التكامل
مذكرةمبدئية

الفصل الأول 1438 – 1437

د طارق عبدالرحمن الفاضل
أستاذ مشارك بقسم الرياضيات
e − mail : alfadhel@ksu.edu.sa
url : http://fac.ksu.edu.sa/alfadhel

المحتويات

باب 1

التكامل المحدد

المجموع وخواصه

نرمز لمجموع الأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \cdots, a_n$ بالرمز $\sum_{k=1}^{n} a_k$

أي أن $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

خواص المجموع :
إذا كانت $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ لكل $1 \leq k \leq n$ وكانت $m \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m\, a_i = m \sum_{k=1}^{n} a_i \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (3)$$

مجاميع هامة :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad (3)$$

مثال : أحسب $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

الحل : $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n$$

التكامل المحدد

التجزئ المنتظم للفترة :

لتجزئ الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية بحيث يكون طول كل فترة جزئية مساوياً $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ نضع $x_0 = a$ و $x_1 = a + \Delta_x$ و $x_k = a + k\Delta_x$ وأخيراً $x_n = a + n\,\Delta_x = b$

نسمي المجموعة $\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n = b\}$ بالتجزئ المنتظم للفترة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية

مثال : جزئ الفترة $[1,3]$ إلى 5 فترات جزئية منتظمة

الحل : $\Delta_x = \dfrac{3-1}{5} = \dfrac{2}{5} = 0.4$

$x_0 = 1\ ,\ x_1 = 1 + 0.4 = 1.4\ ,\ x_2 = 1 + 2(0.4) = 1.8$

$x_3 = 1 + 3(0.4) = 2.2\ ,\ x_4 = 1 + 4(0.4) = 2.6\ ,\ x_5 = 1 + 5(0.4) = 3$

مجموع ريمان :

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ تجزيئاً منتظماً للفترة $[a,b]$ ، نعرف مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a,b]$ وفقاً للتجزئ المنتظم P كالتالي : $R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x$

حيث $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ و $x_k = a + k\Delta_x = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$

sum.pdf sum.bb

التكامل المحدد :

نرمز للتكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a,b]$ بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ويعرف كالتالي : $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x$

أي أن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور x والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$

مثال (1) : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

الحل : $f(x) = 4x - 3$ و $[a,b] = [0,2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0,2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة :

$\Delta_x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$

$x_0 = 0\ ,\ \cdots\ ,\ x_k = 0 + k\Delta_x = \dfrac{2k}{n}\ ,\ \cdots\ ,\ x_n = 2$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{2k}{n}\right)-3\right]\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n}-3\right)\frac{2}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2}-\frac{6}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{16k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}=\frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{16}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}-\frac{6}{n}\,n=8\,\frac{n(n+1)}{n^2}-6$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

$$\int_0^2 (4x-3)\,dx=\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}\left(8\,\frac{n(n+1)}{n^2}-6\right)=8(1)-6=8-6=2$$

مثال (2) : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

الحل : $f(x)=x^2$ و $[a,b]=[0,2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0,2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة :

$$\Delta_x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$
$$x_0=0\,,\ \cdots\,,\ x_k=0+k\Delta_x=\frac{2k}{n}\,,\ \cdots\,,\ x_n=2$$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3}$$
$$=\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{8}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{8}{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{4}{3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

$$\int_0^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right)=\frac{4}{3}(2)=\frac{8}{3}$$

خواص التكامل المحدد

إذا كانت f و g دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$ وكانت $k \in \mathbb{R}$ فإن

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k\, f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx \quad (2)$$

(3) إذا كانت $a < c < b$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(4) إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

(5) إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c \in (a,b)$ بحيث $(b-a)\ f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0,2]$

الحل :

أولاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

تم حساب هذا التكامل كمثال على مجموع ريمان ومقداره يساوي $\frac{8}{3}$

ثانياً - إيجاد قيمة العدد c من العلاقة $(b-a)\ f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

$$(2-0)\ f(c) = \int_0^2 x^2\,dx \implies 2c^2 = \frac{8}{3}$$

$$\implies c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \implies c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0,2)$ بينما $c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0,2)$

أي أن قيمة العدد c المطلوبة هي $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$

باب 2

التكامل غير المحدد

الدالة الأصلية

تعريف الدالة الأصلية :
نقول أن الدالة $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ إذا كانت
$G'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

مثال : أوجد الدالة الأصلية لكل دالة فيما يلي :

(1) $f(x) = 2x$

(2) $f(x) = \cos x$

(3) $f(x) = \sec^2 x$

(4) $f(x) = \sec x \tan x$

الحل :

(1) $G(x) = x^2 + c$

(2) $G(x) = \sin x + c$

(3) $G(x) = \tan x + c$

(4) $G(x) = \sec x + c$

حيث c عدد حقيقي ثابت

ملاحظة : إذا كانت $G_1(x)$ و $G_2(x)$ دالتان أصليتان للدالة $f(x)$ فإن $G_1(x) - G_2(x) = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :
لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة

(1) إذا عرفنا الدالة $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ كالتالي : $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x\in[a,b]$ فإن $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$

أي أن $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ لكل $x\in[a,b]$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx=[G(x)]_a^b=G(b)-G(a)$

مثال (1) : أحسب ما يلي :

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt$

الحل :

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{1+x^2}$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt=\sin x$

مثال (2) : أحسب ما يلي :

(1) $\int_1^2 2x\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

الحل :

(1) $\int_1^2 2x\,dx=\left[x^2\right]_1^2=(2)^2-(1)^2=4-1=3$

لاحظ أن x^2 هي دالة أصلية للدالة $2x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1-0=1$

لاحظ أن $\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $\cos x$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g دالة قابلة للاشتقاق ومداها محتوى في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f\left(g(x)\right)\ g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt$$

الحل :

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt = \sin(3x^2)\ (6x)$$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت g و h دالتان قابلتان للاشتقاق ومداهما محتوى في $[a, b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f\left(h(x)\right)\ h'(x) - f\left(g(x)\right)\ g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt$$

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt$$

الحل :

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1-\left(2x^2\right)^2}{1+\left(2x^2\right)^4}\ (4x) - \frac{1-(\cos x)^2}{1+(\cos x)^4}\ (-\sin x)$$

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt = \sqrt{1+\left(x^2\right)^4}\ (2x) - \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4}\ \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

التكامل غير المحدد

تعريف : نرمز للتكامل غير المحدد للدالة f بالرمز $\int f(x)\,dx$ ويعرف كالتالي $\int f(x)\,dx = G(x) + c$ حيث $G(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ و c عدد حقيقي ثابت

بعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$\int 1\,dx = x + c \quad (1)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (2)$$ حيث $n \neq -1$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad (3)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c \quad (6)$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c \quad (7)$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c \quad (8)$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x}\right)\,dx \quad (1)$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx \quad (2)$$

$$\int \left(-4\cos x + 8\sec^2 x\right)\,dx \quad (3)$$

$$\int \left(3 + 4\sec x \tan x\right)\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x}\right)\,dx = \int 7x^2\,dx + \int 5\sqrt{x} \quad (1)$$

$$= 7\int x^2\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 7\,\frac{x^3}{3} + 5\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int\left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx = \int \frac{5}{x^4}\,dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 5\int \frac{1}{x^4}\,dx - 2\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx \quad (2)$$

$$= 5\int x^{-4}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}} = 5\,\frac{x^{-3}}{-3} - 2\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{2}} + c$$

$$\int\left(-4\cos x + 8\sec^2 x\right)\,dx = \int -4\cos x\,dx + \int 8\sec^2 x\,dx \quad (3)$$

$$= -4\int \cos x\,dx + 8\int \sec^2 x\,dx = -4\sin x + 8\tan x + c$$

$$\int\left(3 + 4\sec x\tan x\right)\,dx = \int 3\,dx + \int 4\sec x\tan x\,dx \quad (4)$$

$$= 3\int 1\,dx + 4\int \sec x\tan x\,dx = 3x + 4\sec x + c$$

التكامل بالتعويض

نظرية : إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ وكانت f دالة متصلة على فترة J تحتوي مدى g وكانت F دالة أصلية للدالة f على J فإن :

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = F\left(g(x)\right) + c$$ لكل $x \in [a,b]$

مثال : حل التكامل التالي $\int (x^2+1)^{11} x\, dx$

الحل الأول : ضع $u = x^2+1$

عندئذ $du = 2x\, dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\, du = x\, dx$

$$\int (x^2+1)^{11} x\, dx = \int u^{11}\, \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \int u^{11}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{u^{12}}{12} + c = \frac{1}{2}\, \frac{(x^2+1)^{12}}{12} + c$$

الحل الثاني : باستخدام $\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\, dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$

$$\int (x^2+1)^{11} x\, dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{11} (2x)\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{(x^2+1)^{12}}{12} + c$$

تعميم لبعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$(1) \quad \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$ حيث $n \neq -1$

$$\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\, dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + c$$ حيث $n \neq -1$

$$(2) \quad \int \cos\; dx = \sin x + c$$

$$\int \cos\left(f(x)\right)\; f'(x)\, dx = \sin\left(f(x)\right) + c$$

$$(3) \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin\left(f(x)\right)\; f'(x)\, dx = -\cos\left(f(x)\right) + c$$

$$(4) \quad \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

$$\int \sec^2\left(f(x)\right)\; f'(x)\, dx = \tan\left(f(x)\right) + c$$

$$(5) \quad \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

$$\int \csc^2(f(x))\; f'(x)\,dx = -\cot(f(x)) + c$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c \quad (6)$$

$$\int \sec(f(x))\tan(f(x))\; f'(x)\,dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c \quad (7)$$

$$\int \csc(f(x))\cot(f(x))\; f'(x)\,dx = -\csc x + c$$

مثال : حل التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x^2+2x}(x+1)\,dx \quad (1)$$

الحل : $$\int \sqrt{x^2+2x}\,(x+1)\,dx = \int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}\;[2(x+1)]\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}(2x+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+3}}\,dx \quad (2)$$

الحل : $$\int \frac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+3}}\,dx = \int \frac{x^3+x}{(x^4+2x^2+3)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int \left(x^4+2x^2+3\right)^{-\frac{1}{3}}(x^3+x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(x^4+2x^2+3\right)^{-\frac{1}{3}}(4x^3+4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\left(x^4+2x^2+3\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \cos(5x+7)\,dx \quad (3)$$

الحل : $$\int \cos(5x+7)\,dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x+7)\,5\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x+7) + c$$

$$\int x\sec^2(x^2+2)\,dx \quad (4)$$

الحل : $\int x\sec^2(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2(x^2+2)\,(2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\tan(x^2+2) + c$$

(5) $\int \sec(6x-2)\tan(6x-2)\,dx$

الحل : $\int \sec(6x-2)\tan(6x-2)\,dx = \frac{1}{6}\int \sec(6x-2)\tan(6x-2)\,(6)\,dx$

$$= \frac{1}{6}\sec(6x-2) + c$$

باب 3

الدوال اللوغاريتمية والأسية

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف : نرمز للدالة اللوغاريمية الطبيعية بالرمز $\ln(x)$ وتعرف كالتالي :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \quad \text{لكل} \quad x \in (0, \infty)$$

ملاحظات هامة :

(1) مجال الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو $(0, \infty)$

(2) $\ln(1) = 0$

(3) $\ln(x) > 0$ لكل $x > 1$

(4) $\ln(x) < 0$ لكل $0 < x < 1$

رسم الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :
GRAPH) (The
ملاحظات هامة :

(1) $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{x} > 0$ لكل $x \in (0, \infty)$

أي أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية دالة تزايدية

(2) $\underset{x\to\infty}{lim} \ln(x) = \infty$

(3) $\underset{x\to 0^+}{lim} \ln(x) = -\infty$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$

$$\ln\left(x^r\right) = r\ln(x) \quad (3)$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال : أحسب مشتقات الدوال التالية

$$y = \sqrt{x}\ \ln|x| \quad (1)$$

الحل : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \ln|x| + \sqrt{x}\ \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = \ln|x^2+3x-1| \quad (2)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-1}$

$$f(x) = \ln|\sin x + 5| \quad (3)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 5}$

$$f(x) = \frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

الحل : $\ln|f(x)| = \ln\left|\dfrac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}\right|$

$$= \ln\left|(x^2+1)^5(x-8)^3\right| - \ln\left|(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \ln\left|(x^2+1)^5\right| + \ln\left|(x-8)^3\right| - \ln\left|(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= 5\ln|x^2+1| + 3\ln|x-8| - \frac{3}{2}\ln|x^3-1|$$

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5\ \frac{2x}{x^2+1} + 3\ \frac{1}{x-8} - \frac{3}{2}\ \frac{3x^2}{x^3-1}$$

$$f'(x) = f(x)\ \left[\frac{10x}{x^2+1} + \frac{3}{x-8} - \frac{3}{2}\ \frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$

$$f'(x) = \left(\frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}\right) \left[\frac{10x}{x^2+1} + \frac{3}{x-8} - \frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$

(5) $f(x) = (\sin x)^x$

الحل : $\ln|f(x)| = \ln|(\sin x)^x| = x \;\ln|\sin x|$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1)\;\ln|\sin x| + x\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = f(x)\;\left[\ln|\sin x| + x\,\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$f'(x) = (\sin x)^x\;\left[\ln|\sin x| + x\,\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+8}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+8}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+8}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+8| + c$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2\sin x| + c$$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$$

$$(4)\quad \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}\,dx}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}\,dx}\,dx = \int \frac{1}{x\ (\ln x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$(5)\quad \int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c$$

تكاملات مهمة :

$$(1)\quad \int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + c$$

$$\int \tan(f(x))\ f'(x)\,dx = \ln|\sec(f(x))| + c$$

$$(2)\quad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(f(x))\ f'(x)\,dx = \ln|\sin(f(x))| + c$$

$$(3)\quad \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \sec(f(x))\ f'(x)\,dx = \ln|\sec(f(x)) + \tan(f(x))| + c$$

$$(4)\quad \int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \csc(f(x))\ f'(x)\,dx = \ln|\csc(f(x)) - \cot(f(x))| + c$$

مثال : أحسب ما يلي

$$(1)\quad \int \tan(3x)\,dx$$

الحل :

$$\int \tan(3x)\, dx = \frac{1}{3}\int \tan(3x)\,(3)\, dx = \frac{1}{3}\, \ln|\sec(3x)| + c$$

(2) $\int x \sec(x^2-3)\, dx$

الحل :

$$\int x\sec(x^2-3)\,dx = \frac{1}{2}\int \sec(x^2-3)\,(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sec(x^2-3)+\tan(x^2-3)\right| + c$$

الدالة الأسية الطبيعية

تعريف : الدالة الأسية الطبيعية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ، نرمز للدالة الأسية الطبيعية بالرمز e^x حيث e عدد حقيقي غير نسبي

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية الطبيعيه هو $\mathbb{R}$

(2) مدى الدالة الأسية الطبيعية هو الفترة $(0, \infty)$

أي أن الدالة الأسية الطبيعية موجبة دائماً

(3) $e^0 = 1$ و $e \approx 2.718128$

(4) $\ln\left(e^x\right) = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي $\ln(e) = 1$

$e^{\ln(x)} = x$ لكل $x \in (0, \infty)$

(5) رسم الدالة الأسية الطبيعية :

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

بعض خواص الدالة الأسية الطبيعية :
إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

(1) $e^x e^y = e^{x+y}$

(2) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

(3) $(e^x)^y = e^{xy}$

مثال (1) : أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $e^{x-1} = 3$
الحل : $e^{x-1} = 3 \Longrightarrow \ln\left(e^{x-1}\right) = \ln(3)$
$\Longrightarrow x - 1 = \ln(3) \Longrightarrow x = 1 + \ln(3)$

مثال (2) : أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\ln|x+2| = 5$
الحل : $\ln|x+2| = 5 \Longrightarrow e^{\ln|x+2|} = e^5$
$\Longrightarrow x + 2 = e^5 \Longrightarrow x = e^5 - 2$

إشتقاق الدالة الأسية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx}\, e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\, e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي :

$$f(x) = e^{x^2+x} \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = e^{x^2+x}(2x+1)$

$$f(x) = e^{\sin x} + \frac{1}{e^x} \quad (2)$$

الحل : $f(x) = e^{\sin x} + e^{-x}$

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x + e^{-x}(-1)$$

$$f(x) = \left(e^{5x} + x^2\right)^3 \quad (3)$$

الحل : $f'(x) = 3\ \left(e^{5x} + x^2\right)^2 \left(e^{5x}(5) + 2x\right)$

$$f(x) = \ln\left|e^{\tan x} + 4x^3\right| \quad (4)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{e^{\tan x}\sec^2 x + 12x^2}{e^{\tan x} + 4x^3}$

تكامل الدالة الأسية الطبيعية :

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int e^{7x+1}\, dx \quad (1)$$

الحل : $\int e^{7x+1}\, dx = \dfrac{1}{7}\int e^{7x+1}(7)\, dx = \dfrac{1}{7}\, e^{7x+1} + c$

$$\int x\, e^{x^2-3}\, dx \quad (2)$$

الحل : $\int x\, e^{x^2-3}\, dx = \dfrac{1}{2}\int e^{x^2-3}(2x)\, dx = \dfrac{1}{2}\, e^{x^2-3} + c$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \quad (3)$$

الحل : $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int e^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$= 2\int e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + c$$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$

الحل : $\displaystyle\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int e^{\sin x}\,\frac{1}{\sec x}\,dx$

$$= \int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x} + c$$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

الحل : $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \int e^{\tan x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$$= \int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx = e^{\tan x} + c$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} e^x\,dx$

الحل : $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^{\ln(5)} = e^{\ln(5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$

(7) $\displaystyle\int e^x\cos\left(e^x\right)\,dx$

الحل : $\displaystyle\int e^x\cos\left(e^x\right)\,dx = \int \cos\left(e^x\right)\,e^x\,dx = \sin\left(e^x\right) + c$

(8) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\,dx$

الحل : $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{e^{5x}\,(5)}{e^{5x}+4}\,dx = \frac{1}{5}\,\ln\left|e^{5x}+4\right| + c$

(9) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{\left(e^{5x}+4\right)^3}\,dx$

الحل : $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{\left(e^{5x}+4\right)^3}\,dx = \int \left(e^{5x}+4\right)^{-3}\,e^{5x}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int \left(e^{5x}+4\right)^{-3}\,e^{5x}\,(5)\,dx = \frac{1}{5}\,\frac{\left(e^{5x}+4\right)^{-2}}{-2} + c$$

الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

الدالة الأسية العامة :
إذا كان $a > 1$ عدداً حقيقياً ، نرمز للدالة الأسية العامة للأساس a بالرمز a^x وتعرف كالتالي $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية العامة هو $\mathbb{R}$

(2) مدى الدالة الأسية العامة هو الفترة $(0, \infty)$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ حيث $a > 1$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ حيث $a > 1$

إشتقاق الدالة الأسية العامة :

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\, a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x)\ \ln a$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

(1) $f(x) = 3^{x^2+x}$

الحل : $f'(x) = 3^{x^2+x}(2x+1)\ \ln(3)$

(2) $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$

الحل : $f'(x) = 5^{\sqrt{x}}\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ \ln(5)$

(3) $f(x) = \pi^{\frac{1}{x}}$

الحل : $f'(x) = \pi^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\ \ln(\pi)$

(4) $f(x) = 3^{\tan(x^2+1)}$

الحل : $f'(x) = 3^{\tan(x^2+1)}\ \sec^2(x^2+1)\,(2x)$

(5) $f(x) = \left(4^{x^2} + 7^{3x+1}\right)^6$

الحل : $f'(x) = 6\left(4^{x^2} + 7^{3x+1}\right)^5 \left(4^{x^2}(2x)\ \ln(4) + 7^{3x+1}(3)\ln(7)\right)$

(6) $f(x) = \ln\left|5^{x^2} + x^3\right|$

الحل : $f'(x) = \dfrac{5^{x^2}(2x)\ln(5) + 3x^2}{5^{x^2} + x^3}$

تكامل الدالة الأسية العامة :

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^{f(x)} \, f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$