جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

111 ريض
حساب التكامل
مذكرةمبدئية

الفصل الأول 1438 – 1437

د طارق عبدالرحمن الفاضل
أستاذ مشارك بقسم الرياضيات
e-mail : alfadhel@ksu.edu.sa
url : http://fac.ksu.edu.sa/alfadhel

المحتويات

باب 1

التكامل المحدد

1.1 المجموع وخواصه

نرمز لمجموع الأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \cdots, a_n$ بالرمز $\sum_{k=1}^{n} a_k$

أي أن $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

خواص المجموع :
إذا كانت $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ لكل $1 \le k \le n$ وكانت $m \in \mathbb{R}$ فإن :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m\, a_k = m \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (3)$$

مجاميع هامة :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad (3)$$

مثال : أحسب $\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$

الحل : $\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n$$

2.1 التكامل المحدد

التجزئ المنتظم للفترة :

لتجزئ الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية بحيث يكون طول كل فترة جزئية مساوياً $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ نضع $x_0 = a$ و $x_1 = a + \Delta_x$ و $x_k = a + k\Delta_x$ وأخيراً $x_n = a + n\,\Delta_x = b$

نسمي المجموعة $\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n = b\}$ بالتجزئ المنتظم للفترة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية

مثال : جزئ الفترة $[1,3]$ إلى 5 فترات جزئية منتظمة

الحل : $\Delta_x = \dfrac{3-1}{5} = \dfrac{2}{5} = 0.4$

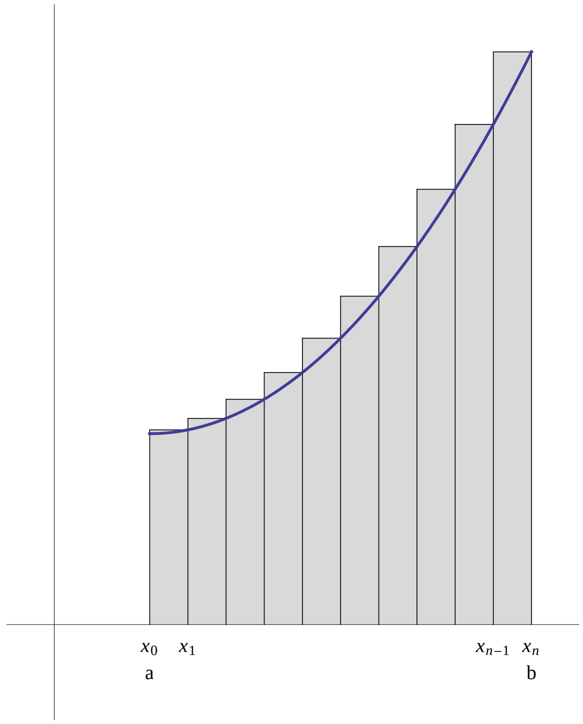
$x_0 = 1\ ,\ x_1 = 1 + 0.4 = 1.4\ ,\ x_2 = 1 + 2(0.4) = 1.8$

$x_3 = 1 + 3(0.4) = 2.2\ ,\ x_4 = 1 + 4(0.4) = 2.6\ ,\ x_5 = 1 + 5(0.4) = 3$

مجموع ريمان :

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وكان $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ تجزيئاً منتظماً للفترة $[a,b]$ ، نعرف مجموع ريمان للدالة f على الفترة $[a,b]$ وفقاً للتجزئ المنتظم P كالتالي : $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x$

حيث $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ و $x_k = a + k\Delta_x = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$

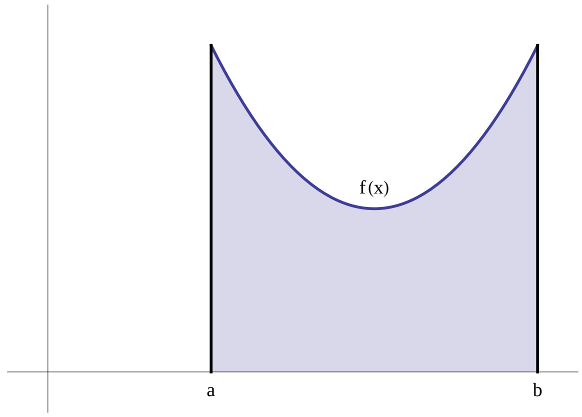


التكامل المحدد :

نرمز للتكامل المحدد للدالة المتصلة f على الفترة $[a,b]$ بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ويعرف كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x$$

أي أن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور x والخطين المستقيمين $x = a$ و $x = b$



مثال (1) : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

الحل : $f(x) = 4x - 3$ و $[a,b] = [0,2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0,2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة :

$$\Delta_x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0\,,\ \cdots\,,\ x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{2k}{n}\,,\ \cdots\,,\ x_n = 2$$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left[4\left(\frac{2k}{n}\right)-3\right]\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k}{n}-3\right)\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k}{n^2}-\frac{6}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{16k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n} = \frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= \frac{16}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{6}{n}\,n = 8\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 6$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 (4x-3)\,dx$

$$\int_0^2 (4x-3)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(8\,\frac{n(n+1)}{n^2} - 6\right) = 8(1) - 6 = 8 - 6 = 2$$

مثال (2) : استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

الحل : $f(x) = x^2$ و $[a,b] = [0,2]$

أولاً - نجزئ الفترة $[0,2]$ إلى n من الفترات الجزئية المنتظمة :

$$\Delta_x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0\,,\ \cdots\,,\ x_k = 0 + k\Delta_x = \frac{2k}{n}\,,\ \cdots\,,\ x_n = 2$$

ثانياً - مجموع ريمان :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3}$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{8}{n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{6}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{4}{3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

ثالثاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\,dx$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right) = \frac{4}{3}(2) = \frac{8}{3}$$

3.1 خواص التكامل المحدد

إذا كانت f و g دالتان متصلتان على الفترة $[a, b]$ وكانت $k \in \mathbb{R}$ فإن

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx \quad (1)$$

$$\int_a^b k\ f(x)\ dx = k\ \int_a^b f(x)\ dx \quad (2)$$

(3) إذا كانت $a < c < b$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

(4) إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$

(5) إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل $x \in [a, b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c \in (a, b)$ بحيث $(b-a)\ f(c) = \int_a^b f(x)\ dx$

مثال : أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0, 2]$

الحل :

أولاً - حساب التكامل المحدد $\int_0^2 x^2\ dx$

تم حساب هذا التكامل كمثال على مجموع ريمان ومقداره يساوي $\frac{8}{3}$

ثانياً - إيجاد قيمة العدد c من العلاقة $(b-a)\ f(c) = \int_a^b f(x)\ dx$

$$(2-0)\ f(c) = \int_0^2 x^2\ dx \implies 2c^2 = \frac{8}{3}$$

$$\implies c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \implies c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

لاحظ أن $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$ بينما $c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0, 2)$

أي أن قيمة العدد c المطلوبة هي $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$

باب 2

التكامل غير المحدد

1.2 الدالة الأصلية

تعريف الدالة الأصلية :
نقول أن الدالة $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ إذا كانت
$G'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a, b]$

مثال : أوجد الدالة الأصلية لكل دالة فيما يلي :

(1) $f(x) = 2x$

(2) $f(x) = \cos x$

(3) $f(x) = \sec^2 x$

(4) $f(x) = \sec x \tan x$

الحل :

(1) $G(x) = x^2 + c$

(2) $G(x) = \sin x + c$

(3) $G(x) = \tan x + c$

(4) $G(x) = \sec x + c$

حيث c عدد حقيقي ثابت

ملاحظة : إذا كانت $G_1(x)$ و $G_2(x)$ دالتان أصليتان للدالة $f(x)$ فإن $G_1(x) - G_2(x) = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

2.2 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :
لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة

(1) إذا عرفنا الدالة $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ كالتالي : $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ لكل $x\in[a,b]$ فإن $G(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$

أي أن $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ لكل $x\in[a,b]$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx=[G(x)]_a^b=G(b)-G(a)$

مثال (1) : أحسب ما يلي :

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt$

الحل :

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{1+x^2}$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt=\sin x$

مثال (2) : أحسب ما يلي :

(1) $\int_1^2 2x\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

الحل :

(1) $\int_1^2 2x\,dx=\left[x^2\right]_1^2=(2)^2-(1)^2=4-1=3$

لاحظ أن x^2 هي دالة أصلية للدالة $2x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1-0=1$

لاحظ أن $\sin x$ هي دالة أصلية للدالة $\cos x$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت g دالة قابلة للاشتقاق ومداها محتوى في $[a,b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f\left(g(x)\right)\ g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{3x^2} \sin t\,dt = \sin(3x^2)\ (6x) \quad (2)$$

نظرية : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت g و h دالتان قابلتان للاشتقاق ومداهما محتوى في $[a,b]$ فإن

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f\left(h(x)\right)\ h'(x) - f\left(g(x)\right)\ g'(x)$$

مثال : أحسب التالي

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{2x^2} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1-\left(2x^2\right)^2}{1+\left(2x^2\right)^4}\ (4x) - \frac{1-(\cos x)^2}{1+(\cos x)^4}\ (-\sin x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,dt = \sqrt{1+(x^2)^4}\ (2x) - \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4}\ \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (2)$$

3.2 التكامل غير المحدد

تعريف : نرمز للتكامل غير المحدد للدالة f بالرمز $\int f(x)\,dx$ ويعرف كالتالي $\int f(x)\,dx = G(x)+c$ حيث $G(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ و c عدد حقيقي ثابت

بعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$\int 1\,dx = x+c \quad (1)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (2)$$ حيث $n \neq -1$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad (3)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad (4)$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c \quad (5)$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c \quad (6)$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c \quad (7)$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c \quad (8)$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x}\right)\,dx \quad (1)$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx \quad (2)$$

$$\int \left(-4\cos x + 8\sec^2 x\right)\,dx \quad (3)$$

$$\int \left(3 + 4\sec x \tan x\right)\,dx \quad (4)$$

الحل :

$$\int \left(7x^2 + 5\sqrt{x}\right)\,dx = \int 7x^2\,dx + \int 5\sqrt{x} \quad (1)$$

$$= 7\int x^2\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 7\,\frac{x^3}{3} + 5\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx = \int \frac{5}{x^4}\,dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 5\int \frac{1}{x^4}\,dx - 2\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx \quad (2)$$

$$= 5\int x^{-4}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}} = 5\,\frac{x^{-3}}{-3} - 2\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \left(-4\cos x + 8\sec^2 x\right)\,dx = \int -4\cos x\,dx + \int 8\sec^2 x\,dx \quad (3)$$

$$= -4\int \cos x\,dx + 8\int \sec^2 x\,dx = -4\sin x + 8\tan x + c$$

$$\int (3 + 4\sec x\tan x)\,dx = \int 3\,dx + \int 4\sec x\tan x\,dx \quad (4)$$

$$= 3\int 1\,dx + 4\int \sec x\tan x\,dx = 3x + 4\sec x + c$$

4.2 التكامل بالتعويض

نظرية : إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ وكانت f دالة متصلة على فترة J تحتوي مدى g وكانت F دالة أصلية للدالة f على J فإن :

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = F\left(g(x)\right)+c$$ لكل $x \in [a,b]$

مثال : حل التكامل التالي $\int (x^2+1)^{11}x\,dx$

الحل الأول : ضع $u = x^2+1$

عندئذ $du = 2x\,dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\,du = x\,dx$

$$\int (x^2+1)^{11}x\,dx = \int u^{11}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{11}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^{12}}{12}+c = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{12}}{12}+c$$

الحل الثاني : باستخدام $\int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$ حيث $n \neq -1$

$$\int (x^2+1)^{11}x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{11}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{12}}{12}+c$$

تعميم لبعض القوانين الأساسية في التكامل :

$$(1)\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$ حيث $n \neq -1$

$$\int [f(x)]^n\,f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$$ حيث $n \neq -1$

$$(2)\quad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \cos\left(f(x)\right)\;f'(x)\,dx = \sin\left(f(x)\right)+c$$

$$(3)\quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin\left(f(x)\right)\;f'(x)\,dx = -\cos\left(f(x)\right)+c$$

$$(4)\quad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \sec^2\left(f(x)\right)\;f'(x)\,dx = \tan\left(f(x)\right)+c$$

$$(5)\quad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \csc^2(f(x))\ f'(x)\,dx = -\cot(f(x)) + c$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c \quad (6)$$

$$\int \sec(f(x))\tan(f(x))\ f'(x)\,dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c \quad (7)$$

$$\int \csc(f(x))\cot(f(x))\ f'(x)\,dx = -\csc x + c$$

مثال : حل التكاملات التالية

$$\int \sqrt{x^2+2x}(x+1)\,dx \quad (1)$$

الحل : $\int \sqrt{x^2+2x}\,(x+1)\,dx = \int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}(x+1)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}\ [2(x+1)]\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{2}}(2x+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+3}}\,dx \quad (2)$$

الحل : $\int \frac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+3}}\,dx = \int \frac{x^3+x}{(x^4+2x^2+3)^{\frac{1}{3}}}\,dx$

$$= \int \left(x^4+2x^2+3\right)^{-\frac{1}{3}}(x^3+x)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(x^4+2x^2+3\right)^{-\frac{1}{3}}(4x^3+4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\left(x^4+2x^2+3\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \cos(5x+7)\,dx \quad (3)$$

الحل : $\int \cos(5x+7)\,dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x+7)\,5\,dx$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x+7) + c$$

$$\int x\sec^2(x^2+2)\,dx \quad (4)$$

الحل : $$\int x\sec^2(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^2(x^2+2)\,(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan(x^2+2)+c$$

(5) $$\int \sec(6x-2)\tan(6x-2)\,dx$$

الحل : $$\int \sec(6x-2)\tan(6x-2)\,dx = \frac{1}{6}\int \sec(6x-2)\tan(6x-2)\,(6)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\sec(6x-2)+c$$

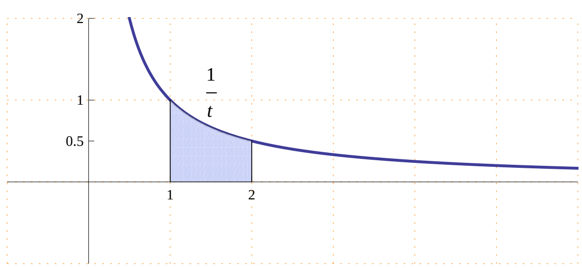
باب 3

الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.3 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف : نرمز للدالة اللوغاريمية الطبيعية بالرمز $\ln(x)$ وتعرف كالتالي :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \quad \text{لكل} \quad x \in (0, \infty)$$



ملاحظات هامة :

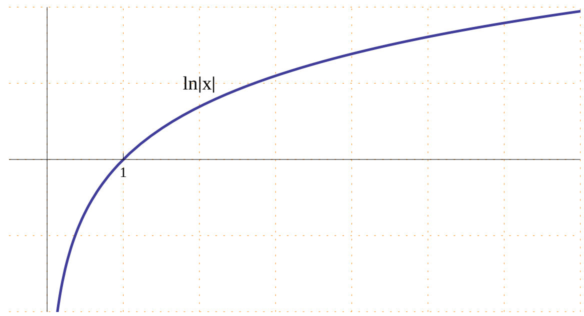
(1) مجال الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو $(0, \infty)$

(2) $\ln(1) = 0$

(3) $\ln(x) > 0$ لكل $x > 1$

(4) $\ln(x) < 0$ لكل $0 < x < 1$

رسم الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :



ملاحظات هامة :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x} > 0 \quad (1)$$ لكل $x \in (0,\infty)$

أي أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية دالة تزايدية

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad (3)$$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$

$$\ln\left(x^r\right) = r\ln(x) \quad (3)$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال : أحسب مشتقات الدوال التالية

$$y = \sqrt{x}\,\ln|x| \quad (1)$$

الحل : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|x| + \sqrt{x}\,\frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln|x^2 + 3x - 1| \quad (2)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-1}$

(3) $f(x) = \ln|\sin x + 5|$

الحل : $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 5}$

(4) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}$

الحل : $\ln|f(x)| = \ln\left|\dfrac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}\right|$

$$= \ln\left|(x^2+1)^5(x-8)^3\right| - \ln\left|(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \ln\left|(x^2+1)^5\right| + \ln\left|(x-8)^3\right| - \ln\left|(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= 5\ln|x^2+1| + 3\ln|x-8| - \frac{3}{2}\ln|x^3-1|$$

باشتقاق الطرفين :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5\,\frac{2x}{x^2+1} + 3\,\frac{1}{x-8} - \frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}$$

$$f'(x) = f(x)\ \left[\frac{10x}{x^2+1} + \frac{3}{x-8} - \frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$

$$f'(x) = \left(\frac{(x^2+1)^5(x-8)^3}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}\right)\ \left[\frac{10x}{x^2+1} + \frac{3}{x-8} - \frac{3}{2}\,\frac{3x^2}{x^3-1}\right]$$

(5) $f(x) = (\sin x)^x$

الحل : $\ln|f(x)| = \ln|(\sin x)^x| = x\ \ln|\sin x|$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1)\ \ln|\sin x| + x\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = f(x)\ \left[\ln|\sin x| + x\,\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$f'(x) = (\sin x)^x\ \left[\ln|\sin x| + x\,\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

تكامل الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+8}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+8}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+8}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+8|+c$$

(2) $$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2\sin x|+c$$

(3) $$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int\left(\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$= \int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x|+c$$

(4) $$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}\,dx}\,dx = \int \frac{1}{x\ (\ln x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int (\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

(5) $$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x|+c$$

تكاملات مهمة :

(1) $$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|+c$$

$$\int \tan\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx = \ln\left|\sec\left(f(x)\right)\right| + c$$

$$\int \cot x\ dx = \ln|\sin x| + c \quad (2)$$

$$\int \cot\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx = \ln\left|\sin\left(f(x)\right)\right| + c$$

$$\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| + c \quad (3)$$

$$\int \sec\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx = \ln\left|\sec\left(f(x)\right) + \tan\left(f(x)\right)\right| + c$$

$$\int \csc x\ dx = \ln|\csc x - \cot x| + c \quad (4)$$

$$\int \csc\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx = \ln\left|\csc\left(f(x)\right) - \cot\left(f(x)\right)\right| + c$$

مثال : أحسب ما يلي

$$\int \tan(3x)\ dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int \tan(3x)\ dx = \frac{1}{3}\int \tan(3x)\ (3)\ dx = \frac{1}{3}\ \ln|\sec(3x)| + c$$

$$\int x \sec(x^2 - 3)\ dx \quad (2)$$

الحل :

$$\int x \sec(x^2 - 3)\ dx = \frac{1}{2}\int \sec(x^2 - 3)\ (2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\sec(x^2 - 3) + \tan(x^2 - 3)\right| + c$$

2.3 الدالة الأسية الطبيعية

تعريف : الدالة الأسية الطبيعية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية الطبيعية ، نرمز للدالة الأسية الطبيعية بالرمز e^x حيث e عدد حقيقي غير نسبي

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية الطبيعيه هو $\mathbb{R}$

(2) مدى الدالة الأسية الطبيعية هو الفترة $(0,\infty)$

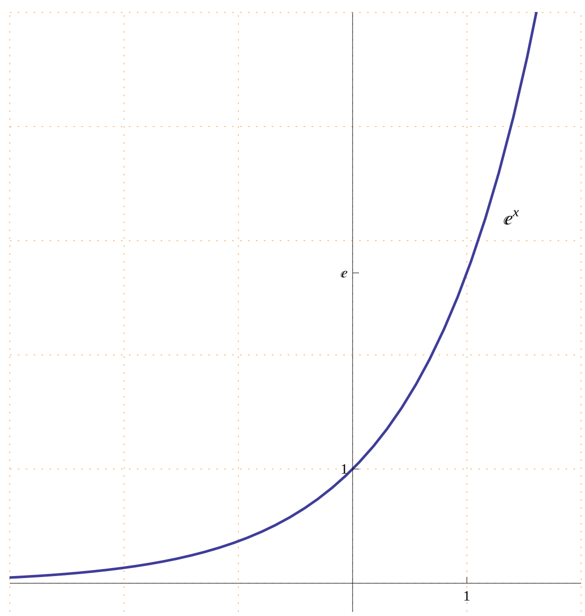
أي أن الدالة الأسية الطبيعية موجبة دائماً

(3) $e^0 = 1$ و $e \approx 2.718128$

(4) $\ln\left(e^x\right) = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وبالتالي $\ln(e) = 1$

$e^{\ln(x)} = x$ لكل $x \in (0,\infty)$

(5) رسم الدالة الأسية الطبيعية :



(6) $\underset{x\to\infty}{lim}\ e^x = \infty$ و $\underset{x\to-\infty}{lim}\ e^x = 0$

بعض خواص الدالة الأسية الطبيعية :
إذا كانت $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

(1) $e^x e^y = e^{x+y}$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (3)$$

مثال (1) : أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $e^{x-1} = 3$

الحل : $e^{x-1} = 3 \Longrightarrow \ln\left(e^{x-1}\right) = \ln(3)$

$\Longrightarrow x - 1 = \ln(3) \Longrightarrow x = 1 + \ln(3)$

مثال (2) : أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\ln|x+2| = 5$

الحل : $\ln|x+2| = 5 \Longrightarrow e^{\ln|x+2|} = e^5$

$\Longrightarrow x + 2 = e^5 \Longrightarrow x = e^5 - 2$

إشتقاق الدالة الأسية الطبيعية :

$$\frac{d}{dx}\, e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\, e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي :

$$f(x) = e^{x^2+x} \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = e^{x^2+x}(2x+1)$

$$f(x) = e^{\sin x} + \frac{1}{e^x} \quad (2)$$

الحل : $f(x) = e^{\sin x} + e^{-x}$

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x + e^{-x}(-1)$$

$$f(x) = \left(e^{5x} + x^2\right)^3 \quad (3)$$

الحل : $f'(x) = 3\ \left(e^{5x} + x^2\right)^2 \left(e^{5x}(5) + 2x\right)$

$$f(x) = \ln\left|e^{\tan x} + 4x^3\right| \quad (4)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{e^{\tan x}\sec^2 x + 12x^2}{e^{\tan x} + 4x^3}$

تكامل الدالة الأسية الطبيعية :

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int e^{7x+1}\, dx$

الحل : $\int e^{7x+1}\, dx = \frac{1}{7}\int e^{7x+1}(7)\, dx = \frac{1}{7}\, e^{7x+1} + c$

(2) $\int x\, e^{x^2-3}\, dx$

الحل : $\int x\, e^{x^2-3}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2-3}(2x)\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2-3} + c$

(3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

الحل : $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$= 2\int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\, e^{\sqrt{x}} + c$$

(4) $\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$

الحل : $\int \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\, dx = \int e^{\sin x} \frac{1}{\sec x}\, dx$

$$= \int e^{\sin x} \cos x\, dx = e^{\sin x} + c$$

(5) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

الحل : $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx = \int e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

$$= \int e^{\tan x} \sec^2 x\, dx = e^{\tan x} + c$$

(6) $\int_0^{\ln(5)} e^x\, dx$

الحل : $\int_0^{\ln(5)} e^x\, dx = [e^x]_0^{\ln(5)} = e^{\ln(5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$

(7) $\int e^x \cos(e^x)\ dx$

الحل : $\int e^x \cos(e^x)\ dx = \int \cos(e^x)\ e^x\ dx = \sin(e^x) + c$

(8) $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\ dx$

الحل : $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}\ dx = \frac{1}{5}\int \frac{e^{5x}\,(5)}{e^{5x}+4}\ dx = \frac{1}{5}\ \ln\left|e^{5x}+4\right| + c$

(9) $\int \frac{e^{5x}}{(e^{5x}+4)^3}\ dx$

الحل : $\int \frac{e^{5x}}{(e^{5x}+4)^3}\ dx = \int \left(e^{5x}+4\right)^{-3}\ e^{5x}\ dx$

$$= \frac{1}{5}\ \int \left(e^{5x}+4\right)^{-3}\ e^{5x}\ (5)\ dx = \frac{1}{5}\ \frac{\left(e^{5x}+4\right)^{-2}}{-2} + c$$

3.3 الدوال الأسية العامة والدوال اللوغاريتمية العامة

الدالة الأسية العامة :
إذا كان $a > 0$ عدداً حقيقياً ، نرمز للدالة الأسية العامة للأساس a بالرمز a^x وتعرف كالتالي $a^x = e^{x \ln a}$

ملاحظات عامة :

(1) مجال الدالة الأسية العامة هو $\mathbb{R}$

(2) مدى الدالة الأسية العامة هو الفترة $(0, \infty)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ حيث $a > 1$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ حيث $a > 1$

إشتقاق الدالة الأسية العامة :

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\, a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x)\ \ln a$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

(1) $f(x) = 3^{x^2+x}$

الحل : $f'(x) = 3^{x^2+x}(2x+1)\ \ln(3)$

(2) $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$

الحل : $f'(x) = 5^{\sqrt{x}}\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ \ln(5)$

(3) $f(x) = \pi^{\frac{1}{x}}$

الحل : $f'(x) = \pi^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\ \ln(\pi)$

(4) $f(x) = 3^{\tan(x^2+1)}$

الحل : $f'(x) = 3^{\tan(x^2+1)}\ \sec^2(x^2+1)\ (2x)\ \ln 3$

(5) $f(x) = \left(4^{x^2} + 7^{3x+1}\right)^6$

الحل : $f'(x) = 6\left(4^{x^2} + 7^{3x+1}\right)^5\left(4^{x^2}(2x)\ \ln(4) + 7^{3x+1}(3)\ln(7)\right)$

$$f(x) = \ln\left|5^{x^2} + x^3\right| \quad (6)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{5^{x^2}(2x)\ln(5) + 3x^2}{5^{x^2} + x^3}$

تكامل الدالة الأسية العامة :

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int a^{f(x)} \, f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int x^2 6^{x^3-2} \, dx \quad (1)$$

الحل : $\displaystyle\int x^2 6^{x^3-2} \, dx = \frac{1}{3}\int 6^{x^3-2}(3x^2) \, dx = \frac{1}{3}\,\frac{6^{x^3-2}}{\ln 6} + c$

$$\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} \, dx \quad (2)$$

الحل : $\displaystyle\int \frac{3^{\cot x}}{\sin^2 x} \, dx = \int 3^{\cot x}\frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int 3^{\cot x} \csc^2 x \, dx$

$$= -\int 3^{\cot x}(-csc^2 x) \, dx = -\frac{3^{\cot x}}{\ln 3} + c$$

$$\int \left(5^x + \frac{1}{2^x}\right) \, dx \quad (3)$$

الحل : $\displaystyle\int \left(5^x + \frac{1}{2^x}\right) \, dx = \int \left(5^x + 2^{-x}\right) \, dx = \int 5^x \, dx + \int 2^{-x} \, dx$

$$= \int 5^x \, dx + \frac{1}{-1}\int 2^{-x}(-1) \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c$$

$$\int (7^x + 4)^{10} \; 7^x \, dx \quad (4)$$

الحل : $\displaystyle\int (7^x + 4)^{10} \; 7^x \, dx = \frac{1}{\ln 7}\int (7^x + 4)^{10} \left(7^x \ln 7\right) \, dx$

$$= \frac{1}{\ln 7}\,\frac{(7^x + 4)^{11}}{11} + c$$

$$\int \frac{2^x}{2^x + 1} \, dx \quad (5)$$

الحل : $\int \frac{2^x}{2^x+1}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x \ln 2}{2^x+1}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\ln|2^x+1| + c$

(6) $\int 3^x\left(1+\cos\left(3^x\right)\right)\,dx$

الحل : $\int 3^x\left(1+\cos\left(3^x\right)\right)\,dx = \int \left[3^x + \cos\left(3^x\right)3^x\right]\,dx$

$$= \int 3^x\,dx + \int \cos\left(3^x\right)3^x\,dx = \int 3^x\,dx + \frac{1}{\ln 3}\int \cos\left(3^x\right)\left(3^x \ln 3\right)\,dx$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\,\sin\left(3^x\right) + c$$

(7) $\int 4^x\,5^{4^x}dx$

الحل : $\int 4^x\,5^{4^x}dx = \frac{1}{\ln 4}\int 5^{4^x}\left(4^x \ln 4\right)\,dx = \frac{1}{\ln 4}\,\frac{5^{4^x}}{\ln 5} + c$

الدالة اللوغاريتمية العامة :
نرمز للدالة اللوغاريتمية للأساس a بالرمز $\log_a x$ وهي الدالة العكسية للدالة الأسية a^x حيث $a>0$ عدداً حقيقياً

ملاحظات عامة :

(1) $\ln x = \log_e x$ و $\log x = \log_{10} x$

(2) $\log_a x = y \iff x = a^y$

(3) $\log_a a = 1$

(4) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية العامة :
إذا كانت $x, y > 0$ وكانت $r \in \mathbb{Q}$ فإن :

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a x^r = r\log_a x$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $\log(x+1)=2$
الحل : $\log(x+1)=2 \implies 10^{\log(x+1)} = 10^2$
$\implies x+1 = 100 \implies x = 100-1 = 99$

مثال : أوجد قيمة x التي تحقق $3^{2x-1} = 7$

الحل : $3^{2x-1} = 7 \implies \log_3 3^{2x-1} = \log_3 7$

$$2x - 1 = \log_3 7 \implies 2x = 1 + \log_3 7 \implies x = \frac{1 + \log_3 7}{2}$$

إشتقاق الدالة اللوغاريتمية العامة :

$$\frac{d}{dx} \log_a |x| = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a |f(x)| = \frac{1}{\ln a} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \log_5 \left|x^3 + \sin 5x\right| \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 5} \dfrac{3x^2 + \cos 5x\,(5)}{x^3 + \sin 5x}$

$$f(x) = \left[\log_3 |x^2 - 1| + e^{3x}\right]^8 \quad (2)$$

الحل : $f'(x) = 8\left[\log_3 |x^2 - 1| + e^{3x}\right]^7 \left(\dfrac{1}{\ln 3} \dfrac{2x}{x^2 - 1} + e^{3x}(3)\right)$

$$f(x) = \sin\left(\log_7 |2x + 3|\right) \quad (3)$$

الحل : $f'(x) = \cos\left(\log_7 |2x + 3|\right) \left(\dfrac{1}{\ln 7} \dfrac{2}{2x + 3}\right)$

$$f(x) = \sin(x^2) \log_7 |2x + 3| \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = \cos(x^2)\,(2x) \log_7 |2x + 3| + \sin(x^2) \frac{1}{\ln 7} \frac{2}{2x + 3}$$

4.3 تكامل الدوال المثلثية العكسية

مراجعة إشتقاق الدوال المثلثية العكسية :

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \quad , \quad |f(x)|<1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x|<1 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \quad , \quad |f(x)|<1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} \quad , \quad |f(x)|>1$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x|>1 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}} \quad , \quad |f(x)|>1$$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right) \quad (1)$$

الحل : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$f(x) = \tan^{-1}(2x^2+3) \quad (2)$$

الحل : $$f'(x) = \frac{1}{1+(2x^2+3)^2}\,(4x) = \frac{4x}{1+(2x^2+3)^2}$$

$$f(x) = \sec^{-1}(\sin 3x) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin 3x\,\sqrt{(\sin 3x)^2-1}}\,(\cos 3x)\,(3)$$

$$f(x) = e^{\cos^{-1}(4x+1)} \quad (4)$$

الحل : $$f'(x) = e^{\cos^{-1}(4x+1)}\,\frac{-1}{\sqrt{1-(4x+1)^2}}\,(4)$$

$$f(x) = \ln\left|e^{5x} + \sec^{-1}(3x)\right| \quad (5)$$

الحل : $$f'(x) = \frac{e^{5x}\,(5) + \frac{1}{3x\sqrt{(3x)^2-1}}\,(3)}{e^{5x}+\sec^{-1}(3x)}$$

$$f(x) = \left(5^x + \tan^{-1}(2x+1)\right)^5 \quad (6)$$

الحل :

$$f'(x) = 5\left(5^x+\tan^{-1}(2x+1)\right)^4\left(5^x\ln 5 + \frac{1}{1+(2x+1)^2}\,(2)\right)$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad , \quad |x| < a \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \quad , \quad |f(x)| < a$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad , \quad |x| > a \quad (3)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \quad , \quad |f(x)| > a$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx \quad (1)$$

الحل : $$\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{3^2+(x^3)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{3^2+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{3}\right)+c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx \quad (2)$$

الحل : $$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx \quad (3)$$

الحل : $$\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \left(16-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\int \left(16-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,(-2x)\,dx = \frac{1}{-2}\,\frac{\left(16-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx \quad (4)$$

الحل : $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1^2-(\ln x)^2}}\,dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\ln x}{1}\right)+c = \sin^{-1}(\ln x)+c$$

$$\int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}}\,dx \quad (5)$$

الحل : $$\int \frac{e^{2x}}{25+e^{4x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{5^2+\left(e^{2x}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}\,(2)}{5^2+\left(e^{2x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\tan^{-1}\left(\frac{e^{2x}}{5}\right)+c$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{25-\cos^2 x}}\,dx \quad (6)$$

الحل : $$\int \frac{\sin x}{\sqrt{25-\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{5^2-(\cos x)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-1}\int \frac{-\sin x}{\sqrt{5^2-(\cos x)^2}}\,dx = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos x}{5}\right)+c$$

(7) $$\int \frac{1}{x^2+6x+25}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{1}{x^2+6x+25}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+6x+9)+16}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x+3)^2+4^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)+c$$

(8) $$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x^2-2x+1)-4}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-2^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\sec^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

(9) $$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+c$$

(10) $$\int \frac{x+2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{x+2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\int \left(16-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-2}\,\frac{\left(16-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

(11) $$\int \frac{x+\tan^{-1}x}{x^2+1}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{x+\tan^{-1}x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \left(\tan^{-1}x\right)^1 \ \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ \ln(x^2+1) + \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{2} + c$$

(12) $$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}}\,dx$$

الحل : $$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-36}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-6^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x\sqrt{\left(e^x\right)^2-6^2}}\,dx = \frac{1}{6}\ \sec^{-1}\left(\frac{e^x}{6}\right) + c$$

باب 4

الدوال الزائدية ومعكوساتها

1.4 الدوال الزائدية

(1) دالة الجيب الزائدية :

نرمز لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh x$ وتعرف كالتالي :

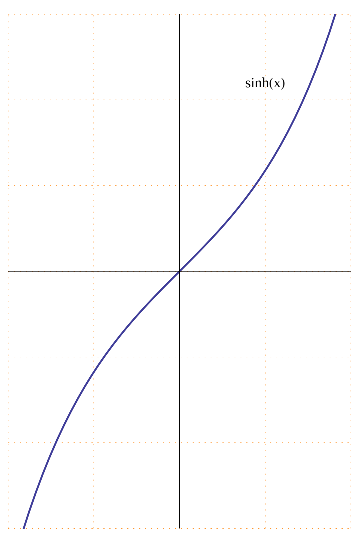
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

1 مجال دالة الجيب الزائدية $\mathbb{R}$ ومداها $\mathbb{R}$

2 دالة الجيب الزائدية دالة فردية (متناظرة حول نقطة الأصل) و $\sinh(0) = 0$

3 رسم دالة الجيب الزائدية



(2) دالة جيب التمام الزائدية :

نرمز لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh x$ وتعرف كالتالي :

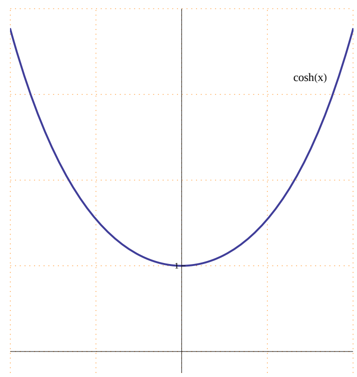
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ملاحظات عامة :

1 مجال دالة جيب التمام الزائدية $\mathbb{R}$ ومداها الفترة $[1, \infty)$

2 دالة جيب التمام الزائدية دالة زوجية (متناظرة حول محور y) و $\cosh(0) = 1$

3 رسم دالة جيب التمام الزائدية



تعرف باقي الدوال الزائدية على النحو التالي :

(3) دالة الظل الزائدية :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(4) دالة ظل التمام الزائدية :

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(5) دالة القاطع الزائدية :

$$sechx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

(6) دالة قاطع التمام الزائدية :

$$cschx = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

قوانين هامة :

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(2) $1 - \tanh^2 x = sech^2 x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(3) $\coth^2 x - 1 = csch^2 x$ لكل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

إشتقاق الدوال الزائدية :

(1) $\frac{d}{dx}\ \sinh x = \cosh x$

$$\frac{d}{dx}\ \sinh(f(x)) = \cosh(f(x))\ f'(x)$$

(2) $\frac{d}{dx}\ \cosh x = \sinh x$

$$\frac{d}{dx}\ \cosh(f(x)) = \sinh(f(x))\ f'(x)$$

(3) $\frac{d}{dx}\ \tanh x = sech^2 x$

$$\frac{d}{dx}\ \tanh(f(x)) = sech^2(f(x))\ f'(x)$$

(4) $\frac{d}{dx}\ \coth x = -csch^2 x$

$$\frac{d}{dx}\ \coth(f(x)) = -csch^2(f(x))\ f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ sechx = -sechx\ \tanh x \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\ sech\,(f(x)) = -sech\,(f(x))\ \tanh\,(f(x))\ f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ cschx = -cschx\ \coth x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\ csch\,(f(x)) = -csch\,(f(x))\ \coth\,(f(x))\ f'(x)$$

أمثلة : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = sech\left(1+\sqrt{x}\right) \quad (1)$$

الحل :

$$f'(x) = -sech\left(1+\sqrt{x}\right)\ \tanh\left(1+\sqrt{x}\right)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f(x) = e^{\sinh 4x} \quad (2)$$

الحل :

$$f'(x) = e^{\sinh 4x}\ \cosh 4x\ (4)$$

$$f(x) = \ln\left|\cosh(1-x^2)\right| \quad (3)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\sinh(1-x^2)\ (-2x)}{\cosh(1-x^2)}$$

$$f(x) = \tanh\left(5^x\right) \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = sech^2\left(5^x\right)\ 5^x\ \ln 5$$

$$f(x) = \left(\coth(3x) + e^{6x}\right)^4 \quad (5)$$

الحل :

$$f'(x) = 4\left(\coth(3x) + e^{6x}\right)^3\left(-csch^2(3x)\ (3) + e^{6x}\ (6)\right)$$

(6) $f(x)=x^{cschx}$

الحل :

$$\ln|f(x)|=\ln\left|x^{cschx}\right|=cschx\ \ln|x|$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(-cschx\ \coth x)\ \ln|x|+cschx\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x)=f(x)\ \left[(-cschx\ \coth x)\ \ln|x|+cschx\ \tfrac{1}{x}\right]$$

$$f'(x)=x^{cschx}\ \left[(-cschx\ \coth x)\ \ln|x|+cschx\ \tfrac{1}{x}\right]$$

تكامل الدوال الزائدية :

(1) $$\int\cosh x\ dx=\sinh x+c$$

$$\int\cosh\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=\sinh\left(f(x)\right)+c$$

(2) $$\int\sinh x\ dx=\cosh x+c$$

$$\int\sinh\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=\cosh\left(f(x)\right)+c$$

(3) $$\int sech^2x\ dx=\tanh x+c$$

$$\int sech^2\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=\tanh\left(f(x)\right)+c$$

(4) $$\int csch^2x\ dx=-\coth x+c$$

$$\int csch^2\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=-\coth\left(f(x)\right)+c$$

(5) $$\int sechx\tanh x\ dx=-sechx+c$$

$$\int sech\left(f(x)\right)\ \tanh\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=-sech\left(f(x)\right)+c$$

(6) $$\int cschx\coth x\ dx=-cschx+c$$

$$\int csch\left(f(x)\right)\ \coth\left(f(x)\right)\ f'(x)\ dx=-csch\left(f(x)\right)+c$$

$$(7)\ \int \tanh x\, dx = \ln|\cosh x| + c$$

$$\int \tanh(f(x))\ f'(x)\, dx = \ln|\cosh(f(x))| + c$$

$$(8)\ \int \coth x\, dx = \ln|\sinh x| + c$$

$$\int \coth(f(x))\ f'(x)\, dx = \ln|\sinh(f(x))| + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$(1)\ \int x^2 \cosh(x^3)\, dx$$

الحل : $\int x^2 \cosh(x^3)\, dx = \frac{1}{3}\int \cosh(x^3)\,(3x^2)\, dx$

$$= \frac{1}{3}\ \sinh(x^3) + c$$

$$(2)\ \int e^x \tanh(e^x)\ dx$$

الحل : $\int e^x \tanh(e^x)\ dx = \int \tanh(e^x)\ e^x\, dx = \ln|\cosh(e^x)| + c$

$$(3)\ \int \frac{sech^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$$

الحل : $\int \frac{sech^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \int sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$$= 2\int sech^2\left(\sqrt{x}\right)\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\tanh\left(\sqrt{x}\right) + c$$

$$(4)\ \int \frac{csch\left(\frac{1}{x}\right)\ \coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx$$

الحل :

$$\int \frac{csch\left(\frac{1}{x}\right)\ \coth\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx = \int csch\left(\frac{1}{x}\right)\ \coth\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(\frac{1}{x^2}\right)\, dx$$

$$= \int -csch\left(\frac{1}{x}\right)\ \coth\left(\frac{1}{x}\right)\ \left(\frac{-1}{x^2}\right)\, dx = csch\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

(5) $\int e^{\tanh x}\, sech^2 x\, dx$

الحل : $\int e^{\tanh x}\, sech^2 x\, dx = e^{\tanh x} + c$

(6) $\int \frac{\sinh x}{1+\cosh x}\, dx$

الحل : $\int \frac{\sinh x}{1+\cosh x}\, dx = \ln|1+\cosh x| + c$

(7) $\int \frac{\sinh x}{1+\cosh^2 x}\, dx$

الحل : $\int \frac{\sinh x}{1+\cosh^2 x}\, dx = \int \frac{\sinh x}{1+(\cosh x)^2}\, dx = \tan^{-1}(\cosh x) + c$

(8) $\int \frac{1}{sechx\sqrt{4-\sinh^2 x}}\, dx$

الحل : $\int \frac{1}{sechx\sqrt{4-\sinh^2 x}}\, dx = \int \frac{\cosh x}{\sqrt{2^2-(\sinh x)^2}}\, dx$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sinh x}{2}\right) + c$$

(9) $\int \frac{\coth x}{\sqrt{\sinh^2 x - 4}}\, dx$

الحل : $\int \frac{\coth x}{\sqrt{\sinh^2 x - 4}}\, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x\sqrt{(\sinh x)^2-(2)^2}}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{\sinh x}{2}\right) + c$$

2.4 الدوال الزائدية العكسية

(1) الدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الجيب الزائدية بالرمز $\sinh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\sinh^{-1} \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sinh y = x \iff y = \sinh^{-1} x$$

(2) الدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة جيب التمام الزائدية بالرمز $\cosh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\cosh^{-1} \;:\; [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$

$$\cosh y = x \iff y = \cosh^{-1} x$$

(3) الدالة العكسية لدالة الظل الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة الظل الزائدية بالرمز $\tanh^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\tanh^{-1} \;:\; (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh y = x \iff y = \tanh^{-1} x$$

(4) الدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة ظل التمام الزائدية بالرمز $\coth^{-1} x$ وتعرف كالتالي

$$\coth^{-1} \;:\; \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - [-1,1]$$

$$\coth y = x \iff y = \coth^{-1} x$$

(5) الدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة القاطع الزائدية بالرمز $sech^{-1}x$ وتعرف كالتالي

$$sech^{-1} \;:\; (0,1] \longrightarrow [0,\infty)$$

$$sechy = x \iff y = sech^{-1}x$$

(6) الدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية :

نرمز للدالة العكسية لدالة قاطع التمام الزائدية بالرمز $csch^{-1}x$ وتعرف كالتالي

$$csch^{-1}\ :\ \mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{0\}$$

$$cschy=x\iff y=csch^{-1}x$$

إشتقاق الدوال الزائدية العكسية :

$$\frac{d}{dx}\ \sinh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\quad(1)$$

$$\frac{d}{dx}\ \sinh^{-1}(f(x))=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\ \cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad(2)$$ لكل $x\in(1,\infty)$

$$\frac{d}{dx}\ \cosh^{-1}(f(x))=\frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$$ لكل $f(x)\in(1,\infty)$

$$\frac{d}{dx}\ \tanh^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}\quad(3)$$ لكل $x\in(-1,1)$

$$\frac{d}{dx}\ \tanh^{-1}(f(x))=\frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$ لكل $f(x)\in(-1,1)$

$$\frac{d}{dx}\ \coth^{-1}x=\frac{-1}{1-x^2}\quad(4)$$ لكل $x\in\mathbb{R}-[-1,1]$

$$\frac{d}{dx}\ \coth^{-1}(f(x))=\frac{-f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$ لكل $f(x)\in\mathbb{R}-[-1,1]$

$$\frac{d}{dx}\ sech^{-1}x=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\quad(5)$$ لكل $x\in(0,1)$

$$\frac{d}{dx}\ sech^{-1}(f(x))=-\frac{f'(x)}{x\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$ لكل $f(x)\in(0,1)$

$$\frac{d}{dx}\ csch^{-1}x=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\quad(6)$$ لكل $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$\frac{d}{dx}\ sech^{-1}(f(x))=-\frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+[f(x)]^2}}$$ لكل $f(x)\in\mathbb{R}-\{0\}$

مثال : أحسب المشتقة فيما يلي

$$f(x) = \sinh^{-1}(5x-1) \quad (1)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(5x-1)^2}}\,(5)$$

$$f(x) = \tanh^{-1}\left(\sqrt{x}\right) \quad (2)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = csch^{-1}\left(e^{3x}\right) \quad (3)$$

الحل :

$$f'(x) = -\frac{1}{e^{3x}\sqrt{1+\left(e^{3x}\right)^2}}\,\left(e^{3x}\,(3)\right) = -\frac{3}{\sqrt{1+e^{6x}}}$$

$$f(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)} \quad (4)$$

الحل :

$$f'(x) = 6^{\cosh^{-1}(2x)}\,\frac{1}{\sqrt{(2x)^2-1}}\,(2)\,\ln 6$$

$$f(x) = \ln\left|x^2+\coth^{-1}(2x)\right| \quad (5)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{2x+\frac{1}{1-(2x)^2}\,(2)}{x^2+\coth^{-1}(2x)}$$

$$f(x) = \left[sech^{-1}(3x)+7^x\right]^5 \quad (6)$$

الحل :

$$f'(x) = 5\left[sech^{-1}(3x)+7^x\right]^4\left[\frac{-1}{3x\sqrt{1-(3x)^2}}\,(3)+7^x\ln 7\right]$$

$$f(x) = \sqrt{x}\,\sinh^{-1}(5x) \quad (7)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\sinh^{-1}(5x)+\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+(5x)^2}}\,(5)$$

$$f(x) = \frac{\cosh^{-1}(x^2)}{e^{3x}} \quad (8)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(x^2)^2-1}}\,(2x)\,e^{3x} - \cosh^{-1}(x^2)\,e^{3x}\,(3)}{\left(e^{3x}\right)^2}$$

تكامل الدوال الزائدية العكسية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$x > a \text{ حيث } \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (2)$$

$$f(x) > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-a^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (3)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| > a \text{ حيث } \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (4)$$

$$|f(x)| > a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$$

$$|x| < a \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,sech^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c \quad (5)$$

$$|f(x)| < a \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,sech^{-1}\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) + c$$

$$|x| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,csch^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + c \quad (6)$$

$$|f(x)| \neq 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,csch^{-1}\left(\frac{|f(x)|}{a}\right) + c$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4-16}}\,dx \quad (1)$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{x}{\sqrt{x^4-16}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2-4^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$\int \frac{e^x}{25-e^{2x}}\,dx \quad (2)$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{e^x}{25-e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{5^2-(e^x)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\tanh^{-1}\left(\frac{e^x}{5}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+25}}\,dx \quad (3)$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+25}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{(2x)^2+5^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{4+x}}\,dx \quad (4)$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{4+x}}\,dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2^2+(\sqrt{x})^2}}\,dx$

$$= 2\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}}\,dx \quad (5)$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\sqrt{4^2-(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{-1}{4}\,sech^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx \quad (6)$$

الحل : $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x\sqrt{1^2+(e^x)^2}}\,dx$

$$= -csch^{-1}\left(e^{x}\right) + c$$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,dx$

الحل : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+1)-9}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-3^2}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$

الحل : $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{3-(x^2-2x)}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{4-(x^2-2x+1)}}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{2^2-(x-1)^2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,sech^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

باب 5

طرائق التكامل

1.5 التكامل بالتجزئ

مبرهنة : إذا كانت $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ و كانت كل من f' و g' متصلة فإن :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية

$$\int x \cos x\,dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array}$$

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + c = x \sin x + \cos x + c$$

$$\int x^2\,e^x\,dx \quad (2)$$

الحل :

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x\,e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x\,e^x\,dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2 e^x - 2\left[x\, e^x - \int e^x\, dx\right]$$

$$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2\int e^x\, dx = x^2 e^x - 2x\, e^x + e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

(3) $\int x^2\ \ln|x|\, dx$

الحل :

$$u = \ln|x| \qquad v = x^2\, dx$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2\ \ln|x|\, dx = \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\ \ln|x| - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + c$$

(4) $\int \ln(1+x^2)\, dx$

الحل :

$$u = \ln(1+x^2) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{2x}{1+x^2}\, dx \qquad v = x$$

$$\int \ln(1+x^2)\, dx = x\ln(1+x^2) - \int x\,\frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{(2x^2+2)-2}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2(x^2+1)}{1+x^2}\, dx - \int \frac{2}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - \int 2\, dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = x\ln(1+x^2) - 2x - 2\tan^{-1} x + c$$

(5) $\int \tan^{-1} x\, dx$

الحل :

$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{1+x^2} \qquad v = x$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} \, x \, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

(6) $\int \sin^{-1} x \, dx$

الحل :

$$\begin{array}{ll} u = \sin^{-1} x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & v = x \end{array}$$

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \, (-2x) \, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \, \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

(7) $\int e^x \, \cos x \, dx$

الحل :

$$\begin{array}{ll} u = \cos x & dv = e^x \, dx \\ du = -\sin x \, dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int e^x \, \cos x \, dx = e^x \cos x - \int -\sin x \, e^x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x \, e^x \, dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئ مرة أخرى

$$\begin{array}{ll} u = \sin x & dv = e^x \, dx \\ du = \cos x \, dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int e^x \, \cos x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x \, e^x \, dx$$

$$\int e^x \, \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \, \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \, \cos x \, dx = \frac{1}{2} \left[e^x \cos x + e^x \sin x\right] + c$$

تمارين : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int x\cosh x\,dx$

(2) $\int x\sec^2 x\,dx$

(3) $\int x^2\sin x\,dx$

(4) $\int \ln|x|\,dx$

(5) $\int x^{-5}\ln|x|\,dx$

(6) $\int e^x\sin x\,dx$

2.5 تكامل قوى الدوال المثلثية

أولاً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x\, dx$ و $\int \cos^n x\, dx$

(1) إذا كان n عدداً فردياً فيمكن حل التكامل بالتعويض

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل $\int \sin^n x\, dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل $\int \cos^n x\, dx$

(2) إذا كان n عدداً زوجياً

نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \sin^n x\, dx$

نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ لحل التكامل $\int \cos^n x\, dx$

أمثلة : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \cos^3 x\, dx$

الحل :

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\ \cos x\, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\ \cos x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x\, dx$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\ \cos x\, dx = \int \left(1 - u^2\right) du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

(2) $\int \sin^5 x\, dx$

الحل :

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x\ \sin x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2\ \sin x\, dx$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2\ \sin x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x\, dx \implies -du = \sin x\, dx$$

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \ \sin x\, dx = -\int \left(1-u^2\right)^2\ du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\ du = -\left(u - 2\,\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c$$

$$= -\cos x + 2\,\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

(3) $\int \cos^4 2x\, dx$

الحل : باستخدام متطابقة ضعف الزاوية $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^4 2x\, dx = \int \left(\cos^2 2x\right)^2\ dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2\ dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x\right]\ dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}\left(1+\cos 8x\right)\right]\ dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ \cos 4x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 8x\right]\ dx$$

$$= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ \cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right]\ dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 8x\, dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\, dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\int \cos 4x\ (4)\ dx + \frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\int \cos 8x\ (8)\ dx$$

$$= \frac{3}{8}\, x + \frac{1}{8}\ \sin 4x + \frac{1}{64}\ \sin 8x + c$$

ثانياً - التكاملات من النوع $\int \sin^n x\ \cos^m x\, dx$

(1) إذا كان n فردياً نستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cos x$ لحل التكامل

(2) إذا كان m فردياً نستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \sin x$ لحل التكامل

(3) إذا كان كل من n و m زوجياً

نستخدم $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ لحل التكامل

مثال : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\displaystyle\int \sin^5 x \ \cos^2 x \, dx$

الحل :

$$\int \sin^5 x \ \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x \ \cos^2 x \ \sin x \, dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \, dx \implies -du = \sin x \, dx$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \ \cos^2 x \ \sin x \, dx = -\int \left(1-u^2\right)^2 \ u^2 \, du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right) \ u^2 \, du = -\int \left(u^2-2u^4+u^6\right) \ du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\,\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x} \ \cos^3 x \, dx$

الحل :

$$\int \sqrt{\sin x} \ \cos^3 x \, dx = \int \sqrt{\sin x} \ \cos^2 x \ \cos x \, dx$$

$$= \int \sqrt{\sin x}\left(1-\sin^2 x\right) \ \cos x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sin x$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\int \sqrt{\sin x}\left(1-\sin^2 x\right) \ \cos x \, dx = \int \sqrt{u}\,\left(1-u^2\right) du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} \left(1-u^2\right) du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}\right) \ du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{3}\,(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}\,(\sin x)^{\frac{7}{2}} + c$$

(3) $\int \sin^5 x\ \cos^7 x\, dx$

الحل :

$$\int \sin^5 x\ \cos^7 x\, dx = \int \sin^4 x\ \cos^7 x\ \sin x\, dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2\ \cos^7 x\ \sin x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^7 x\ \sin x\, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x\, dx \implies -du = \sin x\, dx$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\ \cos^7 x\ \sin x\, dx = -\int \left(1-u^2\right)^2\ u^7\, du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\ u^7\, du = -\int \left(u^7-2u^9+u^{11}\right)\, du$$

$$= -\left(\frac{u^8}{8} - 2\,\frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12}\right) + c = -\frac{\cos^8 x}{8} + 2\,\frac{\cos^{10} x}{10} - \frac{\cos^{12} x}{12} + c$$

(4) $\int \sin^2 x\ \cos^4 x\, dx$

الحل :

$$\int \sin^2 x\ \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\cos^2 x\right)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\ \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)\,(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\ \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\, dx + \frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\ \cos 2x\,(2)\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int 1\, dx - \frac{1}{16}\,\frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\, dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\ \cos 2x\,(2)\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\,x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\,\frac{\sin^3 2x}{3} + c$$

ثالثاً - التكاملات من النوع $\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx = \int \sec^n x\ dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \tan^m x\ \sec^n x\ dx = \int \tan^m x\ dx = \int \tan^{m-2} x\ (\sec^2 x - 1)\ dx$$

$$= \int \tan^{m-2} x\ \sec^2 x\ dx - \int \tan^{m-2} x\ dx$$

$$= \frac{1}{m-1}\ \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x\ dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \tan x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \sec x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\sec x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $\int \sec^3 x\ dx$

الحل : باستخدام التكامل بالتجزئ

$$\int \sec^3 x\ dx = \int \sec x\ \sec^2 x\ dx$$

$$\begin{array}{ll} u = \sec x & dv = \sec^2 x\ dx \\ du = \sec x\ \tan x\ dx & v = \tan x \end{array}$$

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \tan^2 x\ \sec x\ dx$$

$$= \sec x\ \tan x - \int \left(\sec^2 - 1\right)\ \sec x\ dx$$

$$= \sec x \ \tan x - \int \left(\sec^3 x - \sec x\right)\ dx$$

$$= \sec x \ \tan x - \int \sec^3 x \ dx + \int \sec x \ dx$$

$$2 \int \sec^3 x \ dx = \sec x \ \tan x + \int \sec x \ dx$$

$$\int \sec^3 x \ dx = \frac{1}{2} \left(\sec x \ \tan x + \ln |\sec x + \tan x|\right) + c$$

(2) $\int \tan^4 x \ dx$

الحل :

$$\int \tan^4 x \ dx = \int \tan^2 x \ \tan^2 x \ dx = \int \tan^2 x \ \left(\sec^2 x - 1\right)\ dx$$

$$= \int \tan^2 x \ \sec^2 x \ dx - \int \tan^2 x \ dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x \ dx - \int \left(\sec^2 x - 1\right)\ dx$$

$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x \ dx - \int \sec^2 x \ dx + \int 1 \ dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

(3) $\int \tan^2 x \ \sec^6 x \ dx$

الحل :

$$\int \tan^2 x \ \sec^6 x \ dx = \int \tan^2 x \ \sec^4 x \ \sec^2 x \ dx$$

$$= \int \tan^2 x \ \left(\sec^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \ dx = \int \tan^2 x \ \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \ dx$$

باستخدام التعويض $u = \tan x$

$$du = \sec^2 x \ dx$$

$$\int \tan^2 x \ \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \ dx = \int u^2 \left(1 + u^2\right)^2 \ du$$

$$= \int u^2 \left(1 + 2u^2 + u^4\right)\ du = \int \left(u^2 + 2u^4 + u^6\right)\ du$$

$$= \frac{u^3}{3} + 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + 2\,\frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c$$

(4) $\int \tan^5 x \ \sec^3 x \, dx$

الحل :

$$\int \tan^5 x \ \sec^3 x \, dx = \int \tan^4 x \ \sec^2 x \ \sec x \ \tan x \, dx$$

$$= \int \left(\tan^2 x\right)^2 \ \sec^2 x \ \sec x \ \tan x \, dx$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \ \sec^2 x \ \sec x \ \tan x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \sec x$

$$du = \sec x \ \tan x \, dx$$

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \ \sec^2 x \ \sec x \ \tan x \, dx = \int (u^2 - 1)^2 \, u^2 \, du$$

$$= \int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) \ u^2 \, du = \int \left(u^6 - 2u^4 + u^2\right) \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - 2\,\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^7 x}{7} - 2\,\frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

رابعاً - التكاملات من النوع $\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx$

(1) إذا كان $m = 0$ و n فردي ، فإن

$$\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx = \int \csc^n x \, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لحل التكامل

(2) إذا كان $n = 0$ و $m \geq 2$ ، فإن

$$\int \cot^m x \ \csc^n x \, dx = \int \cot^m x \, dx = \int \cot^{m-2} x \, (\csc^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \cot^{m-2} x \ \csc^2 x \, dx - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

$$= -\frac{1}{m-1} \ \cot^{m-1} x - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

(3) إذا كان $n \geq 2$ عدداً زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ونستخدم التعويض $u = \cot x$ لحل التكامل

(4) إذا كان m فردياً وكان $n \geq 1$ ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ ونستخدم التعويض $u = \csc x$ لحل التكامل

(5) إذا كان n فردياً ، وكان m زوجياً ، نستخدم المتطابقة $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ لتحويل التكامل إلى قوى $\csc x$ ثم نستخدم الفقرة (1)

مثال : أحسب التكاملين التاليين

(1) $\int \cot^4 x \ \csc^4 x \, dx$

الحل :

$$\int \cot^4 x \ \csc^4 x \, dx = \int \cot^4 x \ \csc^2 x \ \csc^2 x \, dx$$

$$= \int \cot^4 x \ \left(1 + \cot^2 x\right) \ \csc^2 x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \cot x$

$$du = -csc^2 x \, dx \implies -du = \csc^2 x \, dx$$

$$\int \cot^4 x \ \left(1 + \cot^2 x\right) \ \csc^2 x \, dx = -\int u^4 \left(1 + u^2\right) du$$

$$= -\int \left(u^4 + u^6\right) du = -\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c = -\frac{\cot^5 x}{5} - \frac{\cot^7 x}{7} + c$$

(2) $\int \cot^5 x \ \csc^5 x \, dx$

الحل :

$$\int \cot^5 x \ \csc^5 x \, dx = \int \cot^4 x \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

$$= \int \left(\cot^2 x\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

$$= \int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx$$

باستخدام التعويض $u = \csc x$

$$du = -\csc x \ \cot x \, dx \implies -du = \csc x \ \cot x \, dx$$

$$\int \left(\csc^2 x - 1\right)^2 \ \csc^4 x \ \csc x \ \cot x \, dx = -\int \left(u^2 - 1\right)^2 u^4 \, du$$

$$= -\int \left(u^4 - 2u^2 + 1\right) u^4 \, du = -\int \left(u^8 - 2u^6 + u^4\right) du$$

$$= -\left(\frac{u^9}{9} - 2\,\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5}\right) + c = -\frac{\csc^9 x}{9} + 2\,\frac{\csc^7 x}{7} - \frac{\csc^5 x}{5} + c$$

خامساً - التكاملات $\int \cos mx \ \cos nx \ dx$, $\int \sin mx \ \sin nx \ dx$, $\int \sin mx \ \cos nx \ dx$
تحل هذه التكاملات باستخدام المتطابقات التالية :

$$\sin mx \ \cos nx = \frac{1}{2} \left(\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x]\right)$$

$$\sin mx \ \sin nx = \frac{1}{2} \left(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\right)$$

$$\cos mx \ \cos nx = \frac{1}{2} \left(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x]\right)$$

مثال : أحسب التكاملين التاليين

(1) $\int \sin 7x \ \cos 5x \ dx$

الحل :

$$\int \sin 7x \ \cos 5x \ dx = \int \frac{1}{2} \left(\sin[(7-5)x] + \sin[(7+5)x]\right) \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 2x \ dx + \frac{1}{2} \int \sin 12x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \sin 2x \ (2) \ dx + \frac{1}{2} \frac{1}{12} \int \sin 12x \ (12) \ dx$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{24} \cos 12x + c$$

(2) $\int \sin 4x \ \sin 3x \ dx$

الحل :

$$\int \sin 4x \ \sin 3x \ dx = \int \frac{1}{2} \left(\cos[(4-3)x] - \cos[(4+3)]x\right) \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x \ dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x \ dx - \frac{1}{2} \frac{1}{7} \int \cos 7x \ (7) \ dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + c$$

3.5 التعويضات المثلثية

تستخدم التعويضات المثلثية لحل التكاملات التي تحتوي على الجذور $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ حيث $a>0$
تقوم التعويضات المثلثية بتحويل هذه التكاملات إلى تكاملات لقوى دوال مثلثية
وبشكل تفصيلي :

(1) نستخدم التعويض $x=a\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ للتخلص من $\sqrt{a^2-x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

(2) نستخدم التعويض $x=a\tan\theta$ حيث $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{a^2+x^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=a\sec\theta$$

(3) نستخدم التعويض $x=a\sec\theta$ حيث $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ للتخلص من $\sqrt{x^2-a^2}$ كالتالي :

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{a^2\tan^2\theta}=a\tan\theta$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

الحل :

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{x^2\sqrt{4^2-x^2}}\,dx$$

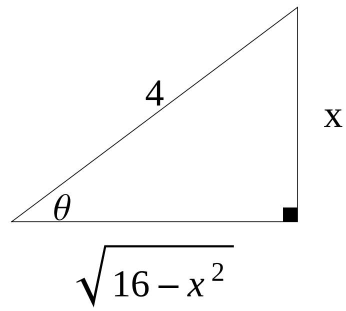
نستخدم التعويض $\sin\theta=\frac{x}{4}\implies x=4\sin\theta$

$$dx=4\cos\theta\,d\theta$$

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx=\int\frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$=\int\frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\sqrt{16\cos^2\theta}}\,d\theta=\int\frac{4\cos\theta}{16\sin^2\theta\,4\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\int\frac{1}{16\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{16}\int\csc^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{16}\cot\theta+c$$



$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = -\frac{1}{16}\,\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + c$$

(2) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}}\,dx$$

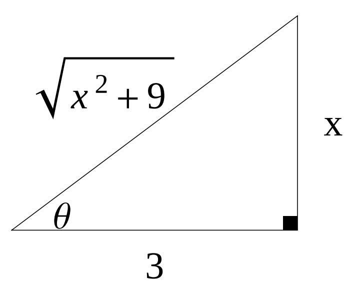
نستخدم التعويض $x = 3\tan\theta \implies \tan\theta = \frac{x}{3}$

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\left(\tan^2\theta+1\right)}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + c$$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{\left(x^2\right)^2}\,dx$$

نستخدم التعويض $\sec\theta = \dfrac{x}{5} \implies x = 5\sec\theta$

$$dx = 5\sec\theta\ \tan\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5^2}}{\left(x^2\right)^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{25\sec^2\theta - 25}}{\left(5^2\sec^2\theta\right)^2}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

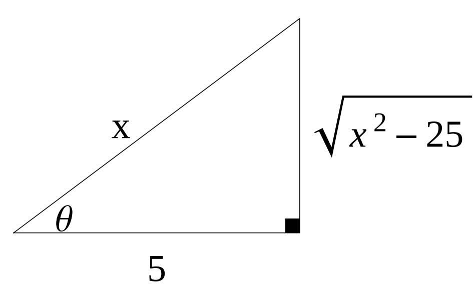
$$= \int \frac{\sqrt{25\left(\sec^2\theta - 1\right)}}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{25\ \tan^2\theta}}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{5\ \tan\theta}{5^4\sec^4\theta}\,5\sec\theta\ \tan\theta\,d\theta = \int \frac{5^2\sec\theta\ \tan^2\theta}{5^4\sec^4\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{5^2\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \tan^2\theta\,\frac{1}{\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{\sin^2\theta\ \cos^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int \left(\sin\theta\right)^2\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{25}\,\frac{\left(\sin\theta\right)^3}{3} + c = \frac{1}{75}\left(\sin\theta\right)^3 + c$$



$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}\,dx = \frac{1}{75}\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\right)^3 + c$$

$$(4)\quad \int \frac{1}{(x^2+8x+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{(x^2+8x+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{((x^2+8x+16)+9)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{((x+4)^2+3^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

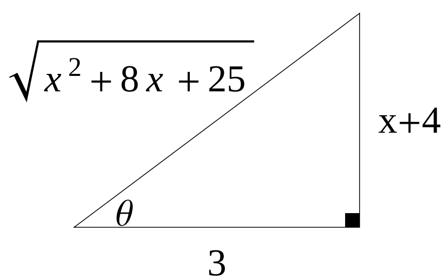
نستخدم التعويض $x+4 = 3\tan\theta \implies \tan\theta = \dfrac{x+4}{3}$

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{1}{((x+4)^2+3^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{3\sec^2\theta}{\left(9\tan^2\theta+9\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{\left(9(\tan^2\theta+1)\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{(3^2\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3^3\ \sec^3\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{9}\sin\theta + c$$



$$\int \frac{1}{(x^2+8x+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+25}} + c$$

$$(5)\quad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

الحل :

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx$$

نستخدم التعويض $\sin\theta = \frac{x}{2} \implies x = 2\sin\theta$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\, d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\, d\theta = \int 1\, d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

لاحظ أن $\sin\theta = \frac{x}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

4.5 الكسور الجزئية

تستخدم الكسور الجزئية لحساب تكاملات الدوال الكسرية ، والدالة الكسرية هي حاصل قسمة كثيرتي حدود .

العامل الخطي : هو كثيرة حدود من الدرجة الأولى ، أي أنه على الصورة $ax + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

مثال : $2x$ ، $x - 3$ ، $4x + 1$ جميعها عوامل خطية .

المقدار التربيعي غير القابل للاختزال : هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية ليس لها حلول حقيقية ، أي أنه على الشكل $ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac < 0$.

مثال : $x^2 + 1$ ، $x^2 + 9$ ، $x^2 + x + 1$ جميعها مقادير تربيعية غير قابلة للاختزال .
أما المقدار التربيعي $x^2 - 4$ فهو قابل للاختزال
لأن $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

مبرهنة : إذا كانت $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ دالة كسرية ودرجة $g(x)$ أصغر من درجة $h(x)$ ، فإن هناك كسوراً $F_1, F_2, \cdots, F_n$ تحقق $f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$ وتكون كل $F_i(x)$ إما على الصورة $\dfrac{A}{(ax+b)^m}$ (حيث $m \in \mathbb{N}$) أو على الصورة $\dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^m}$ حيث $b^2 - 4ac < 0$

مساهمة العامل الخطي $(ax + b)^m$ تأخذ الصورة :
$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$
حيث $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مساهمة المقدار التربيعي غير القابل للاختزال $(ax^2 + bx + c)^m$ تأخذ الصورة :
$$\frac{A_1 + B_1x}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 + B_2x}{(ax^2 + bx + c)^2} \cdots + \frac{A_m + B_mx}{(ax^2 + bx + c)^m}$$
حيث $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_m$ ثوابت يتم حسابها لاحقاً .

مثال : أكتب الدوال الكسرية التالية على هيئة كسور جزئية

(1) $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3}$

الحل :

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3} = \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-3}$$

(2) $\dfrac{x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

الحل :

$$\frac{x+4}{x^3+4x^2+4x}=\frac{x+4}{x(x+2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} \quad (3)$$

الحل :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^2}$$
$$=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x-2}{x^4+x^2} \quad (4)$$

الحل :

$$\frac{x-2}{x^4+x^2}=\frac{x-2}{x^2(x^2+4)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x^2+9)} \quad (5)$$

الحل :

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x^2+9)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+9}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+1}+\frac{B_3x+C_3}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4+2}{x^3+x} \quad (6)$$

الحل : باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\frac{x^4+2}{x^3+x}=x+\frac{-x^2+2}{x(x^2+1)}=x+\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{x^2+1}$$

مثال : أحسب التكاملات التالية

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{x-7}{(x-2)(x+3)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+3}$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{A_1(x+3)}{(x-2)(x-3)}+\frac{A_2(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$x - 7 = A_1(x+3) + A_2(x-2)$$

ضع $x = 2$

$$2 - 7 = A_1(2+3) \implies -5 = 5A_1 \implies A_1 = -1$$

ضع $x = -3$

$$-3 - 7 = A_2(-3-2) \implies -10 = -5A_2 \implies A_2 = 2$$

$$\frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+3}\right)\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+3}\,dx = -\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= -\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + c$$

(2) $$\int \frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x} = \frac{7x^2+11x+5}{x(x^2+2x+1)} = \frac{7x^2+11x+5}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x} = \frac{A_1(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{A_2\,x(x+1)}{(x+1)x(x+1)} + \frac{A_3\,x}{x(x+1)^2}$$

$$7x^2+11x+5 = A_1(x+1)^2 + A_2\,x(x+1) + A_3\,x$$

$$7x^2+11x+5 = A_1(x^2+2x+1) + A_2x^2 + A_2x + A_3x$$

$$7x^2+11x+5 = A_1x^2 + 2A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x$$

$$7x^2+11x+5 = (A_1+A_2)\,x^2 + (2A_1+A_2+A_3)\,x + A_1$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcl} A_1 + A_2 = 7 & \longrightarrow & (1) \\ 2A_1 + A_2 + A_3 = 11 & \longrightarrow & (2) \\ A_1 = 5 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$A_2 = 7 - A_1 = 7 - 5 = 2$$

من المعادلة (2) نستنتج أن

$$10+2+A_3=11 \implies A_3=11-12=-1$$

$$\frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x}=\frac{5}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{7x^2+11x+5}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int \left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=5\int \frac{1}{x}\,dx+2\int \frac{1}{x+1}\,dx-\int (x+1)^{-2}\,dx$$

$$=5\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c$$

(3) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{x-2}{x^3+x}=\frac{x-2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x-2}{x^3+x}=\frac{A(x^2+1)}{x(x^2+1)}+\frac{(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$x-2=A(x^2+1)+(Bx+C)x=Ax^2+A+Bx^2+Cx$$

$$x-2=(A+B)x^2+Cx+A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcc} A+B=0 & \longrightarrow & (1)\\ C=1 & \longrightarrow & (2)\\ A=-2 & \longrightarrow & (3) \end{array}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن

$$-2+B=0 \implies B=2$$

$$\frac{x-2}{x^3+x}=\frac{-2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3+x}\,dx=\int \left(\frac{-2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int \frac{-2}{x}\,dx+\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx=-2\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=-2\ln|x|+\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+c$$

$$(4)\quad \int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+4}$$

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{(B_1x+C_1)\,(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} + \frac{(B_2x+C_2)\,(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$3 = (B_1x+C_1)\,(x^2+4) + (B_2x+C_2)\,(x^2+1)$$

$$3 = B_1x^3 + 4B_1x + C_1x^2 + 4C_1 + B_2x^3 + B_2x + C_2x^2 + C_2$$

$$3 = (B_1+B_2)\,x^3 + (C_1+C_2)\,x^2 + (4B_1+B_2)\,x + (4C_1+C_2)$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في طرفي المعادلة

$$\begin{array}{lcl} B_1+B_2=0 & \longrightarrow & (1) \\ C_1+C_2=0 & \longrightarrow & (2) \\ 4B_1+B_2=0 & \longrightarrow & (3) \\ 4C_1+C_2=3 & \longrightarrow & (4) \end{array}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (3) نحصل على :

$$3B_1 = 0 \implies B_1 = 0$$

من المعادلة (1) نستنتج أن : $B_2 = 0$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (4) نحصل على :

$$3C_1 = 3 \implies C_1 = 1$$

من المعادلة (2) نستنتج أن : $C_2 = -1$

$$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+4}$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\right)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{1}{x^2+4}\, dx = \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\, \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

5.5 تعويضات متفرقة

أولاً - التكاملات التي تحتوي على قوى كسرية
إذا كان التكامل يحتوي على قوى كسرية للمتغير x ، نستخدم التعويض $u = x^{\frac{1}{n}}$ حيث n هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه القوى فنستبدل القوى الكسرية بقوى صحيحة .

مثال : أحسب التكاملين التاليين

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

نستخدم التعويض $x = u^6 \implies u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\, du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u+1)}\, du = \int \frac{6u^3}{u+1}\, du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^3}{u+1}\, du = \int \left(6u^2-6u+6-\frac{6}{u+1}\right)\, du$$

$$= 6\,\frac{u^3}{3}-6\,\frac{u^2}{2}+6u-6\ln|u+1|+c = 2u^3-3u^2+6u-6\ln|u+1|+c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2+6x^{\frac{1}{6}}-6\ln\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right|+c$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\ln\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right|+c$$

$$(2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}\, dx$$

نستخدم التعويض $x = u^6 \implies u = x^{\frac{1}{6}}$

$$dx = 6u^5\, du$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}}\,dx = \int \frac{6u^5}{u^3+u}\,du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u(u^2+1)}\,du = \int \frac{6u^4}{u^2+1}\,du$$

باستخدام القسمة المطولة لكثيرات الحدود

$$\int \frac{6u^4}{u^2+1}\,du = \int \left(6u^2-6+\frac{6}{u^2+1}\right)\,du$$

$$= 6\,\frac{u^3}{3} - 6u + 6\tan^{-1}u + c = 2u^3 - 6u + 6\tan^{-1}u + c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + c = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{6}}\right) + c$$

ثانياً - التكاملات التي تحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$:

إذا كان التكامل يحتوي $\sqrt[n]{g(x)}$ نستخدم التعويض $u = \sqrt[n]{g(x)}$ لحل التكامل .

مثال : أحسب التكاملين التاليين :

$$(1)\quad \int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u = \sqrt{1+\sqrt{x}} \implies 1+\sqrt{x} = u^2 \implies \sqrt{x} = u^2-1 \implies x = (u^2-1)^2$$

$$dx = 2(u^2-1)(2u)\,du = (4u^3-4u)\,du$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int u(4u^3-4u)\,du = \int (4u^4-4u^2)\,du$$

$$= 4\,\frac{u^5}{5} - 4\,\frac{u^3}{3} + c = \frac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3 + c$$

$$(2)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

الحل : نستخدم التعويض

$$u = \sqrt{e^x+1} \implies e^x+1 = u^2 \implies e^x = u^2-1 \implies x = \ln|u^2-1|$$

$$dx = \frac{2u}{u^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{2u}{u^2-1}\,du = \int \frac{2}{u^2-1}\,du$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{2}{(u-1)(u+1)}=\frac{A_1}{u-1}+\frac{A_2}{u+1}$$

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{A_1(u+1)}{(u-1)(u+1)}+\frac{A_2(u-1)}{(u+1)(u-1)}$$

$$2=A_1(u+1)+A_2(u-1)$$

ضع $u=1$

$$2=A_1(1+1)\implies 2A_1=2\implies A_1=1$$

ضع $u=-1$

$$2=A_2(-1-1)\implies -2A_2=2\implies A_2=-1$$

$$\int\frac{2}{u^2-1}\,du=\int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{-1}{u+1}\right)\,du$$

$$=\ln|u-1|-\ln|u+1|+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\,dx=\ln\left|\sqrt{e^x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{e^x+1}+1\right|+c$$

باب 6

صيغ عدم التعيين والتكاملات المعتلة

1.6 صيغ عدم التعيين

أولاً - حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

مبرهنة (قاعدة لوبيتال) :

إذا كانت الدالتان $\frac{f(x)}{g(x)}$ قابلتين للاشتقاق على فترة I تحوي c (باستثناء ربما عند c) وكانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I - \{c\}$. وكان الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الصيغة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وكانت $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$ فإن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

أمثلة : أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{3x^2} \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{3x^2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6}=\frac{0}{6}=0$$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

لاحظ أن $e^x\to\infty$ عندما $x\to\infty$

ثانياً - حالة عدم التعيين $0.\infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)e^{-x^2} \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)e^{-x^2} \quad (\infty.0)$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^{x^2}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\,e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

لاحظ أن $e^{x^2}\to\infty$ عندما $x\to\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\ \ln x \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\ \ln x \quad (0.-\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\ \ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{-2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-2}=0$$

ثالثاً - حالة عدم التعيين $\infty-\infty$

يتم تحويل هذه الحالة إلى صيغة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ثم استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال : أحسب النهايتين التاليتين

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \quad (1)$$

الحل :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) \quad (\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to1^+} \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)}{(x-1)\,\frac{1}{x}+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\left(\frac{x-1+x\ln x}{x}\right)} = \lim_{x\to1^+} \frac{1-x}{x-1+x\ln x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1-x}{x-1+x\ln x} = \lim_{x\to1^+} \frac{-1}{1+1+\ln x} = \frac{-1}{1+1+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) \quad (2)$$

الحل :

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) \quad (\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x}{e^x+(x+1)e^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{e^x}{e^x\ (1+(x+1))}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

رابعاً - حالات عدم التعيين 0^0 , ∞^0 , 1^∞

باستخدام الدالة اللوغاريتمية تحول جميع هذه الحالات إلى صيغة عدم التعيين $0.\infty$

مثال : أحسب النهايات التالية

(1) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

الحل :

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \qquad (0^0)$$

ضع $y = x^x$

$$\ln|y| = \ln|x^x| = x\ln|x|$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln|y| = \lim_{x\to 0^+} x\ln|x| \qquad (0.-\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln|x| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln|x|}{x^{-1}} \qquad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln|x|}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

(2) $\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (\infty^0)$$

ضع $y = \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln|y| = \ln\left|\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}\right| = \frac{1}{x}\ \ln\left|1+e^{2x}\right| = \frac{\ln\left|1+e^{2x}\right|}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln|y| = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left|1+e^{2x}\right|}{x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left|1+e^{2x}\right|}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} \qquad (\infty^0)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} \quad (3)$$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} \qquad (1^{\infty})$$

ضع $y=\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

$$\ln|y|=\ln\left|\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\right|=x\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln|y|=\lim_{x\to\infty}x\ln\left|1+\frac{3}{x}\right| \qquad (\infty.0)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left|1+\frac{3}{x}\right|}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}=\frac{3}{1+0}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=e^{3}$$

2.6 التكاملات المعتلة

أولاً - حالة الفترة غير المحدودة :

(1) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, \infty)$. نعرف التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $(-\infty, b]$. نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

(1) $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

الحل :

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_2^t (x-1)^{-2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{t-1} - \frac{-1}{2-1}\right] = (0+1) = 1$$

التكامل المعتل متقارب

$$(2) \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)}\, dx$$

الحل :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x-1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\ln|x-1|\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln|t-1| - \ln(1)\right] = \lim_{t\to\infty} \ln|t-1| = \infty$$

التكامل المعتل متباعد

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^{2x}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2} \int_t^0 e^{2x}\,(2)\, dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{e^0}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}\right] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

التكامل المعتل متقارب

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+9}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2+9}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2+3^2}\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+3^2}\, dx$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_s^0 + \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^t$$

$$= \lim_{s\to-\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)\right]$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right)\right]$$

$$= \left[0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ثانياً - حالة الدالة غير المحدودة

(1) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b)$ وكانت $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(2) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $(a,b]$ وكانت $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

إذا كانت النهاية موجودة فنقول أن التكامل المعتل متقارب ، أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي $\pm\infty$ فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

(3) إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ ماعدا عند $c\in(a,b)$ وكانت $\lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$ ، نعرف التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ كالتالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

نقول أن التكامل المعتل متقارب إذا كان كل من التكاملين في الطرف الأيمن متقارباً ، أما إذا كان أحدهما أو كلاهما متباعد فنقول أن التكامل المعتل متباعد .

أمثلة : أدرس تقارب التكاملات المعتلة التالية :

(1) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \infty$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(-\int_0^t (2-x)^{-\frac{1}{2}}\,(-1)\,dx\right) = \lim_{t\to 2^-}\left(-\left[\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^t\right)$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(-2\left[(2-t)^{\frac{1}{2}} - (2-0)^{\frac{1}{2}}\right]\right) = -2[0-\sqrt{2}] = 2\sqrt{2}$$

التكامل المعتل متقارب

(2) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x-3}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3} = \infty$

$$\int_3^4 \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{x\to 3^+}\int_t^4 \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{x\to 3^+}\left[\ln|x-3|\right]_t^4$$

$$= \lim_{x\to 3^+}\left[\ln(1) - \ln|t-3|\right] = \lim_{x\to 3^+}\left[0-\ln|t-3|\right] = -(-\infty) = \infty$$

التكامل المعتل متباعد

(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \infty$ و $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \lim_{s\to 1^+}\int_s^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx + \lim_{s\to 1^+}\int_s^3 (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_s^3$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left[\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(0-1)^{\frac{2}{3}}\right] + \lim_{s\to 1^+}\left[\frac{3}{2}(3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{2}\,(0) - \frac{3}{2}\,(1)\right] + \left[\frac{3}{2}\,\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}\,(0)\right] = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2}$$

التكامل المعتل متقارب

(4) $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

الحل :

لاحظ أن $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = \infty$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

$$= \lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(2\int_t^1 \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\,dx\right) + \lim_{s\to\infty}\left(2\int_1^s \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]_t^1\right) + \lim_{s\to\infty}\left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]_1^s\right)$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{1}) - \tan^{-1}(\sqrt{t})\right]\right)$$

$$+ \lim_{s\to\infty}\left(2\left[\tan^{-1}(\sqrt{s}) - \tan^{-1}(\sqrt{1})\right]\right)$$

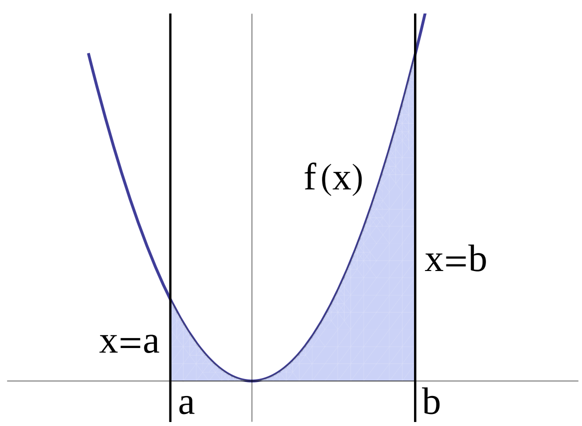
$$= 2\left[\frac{\pi}{4}-0\right] + 2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

التكامل المعتل متقارب

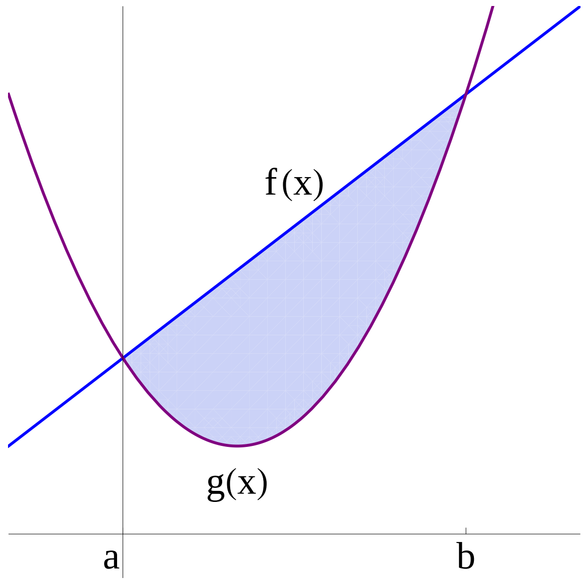
باب 7

تطبيقات التكامل

1.7 المساحات



إذا كانت f دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ و محور السينات والخطين المستقيمين $x=a$ و $x=b$ هي $A=\int_a^b f(x)\,dx$



إذا كانت الدالتان f و g متقاطعتين عند $x = a$ و $x = b$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in (a,b)$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $x = -1$ و $x = 2$ و $y = 0$

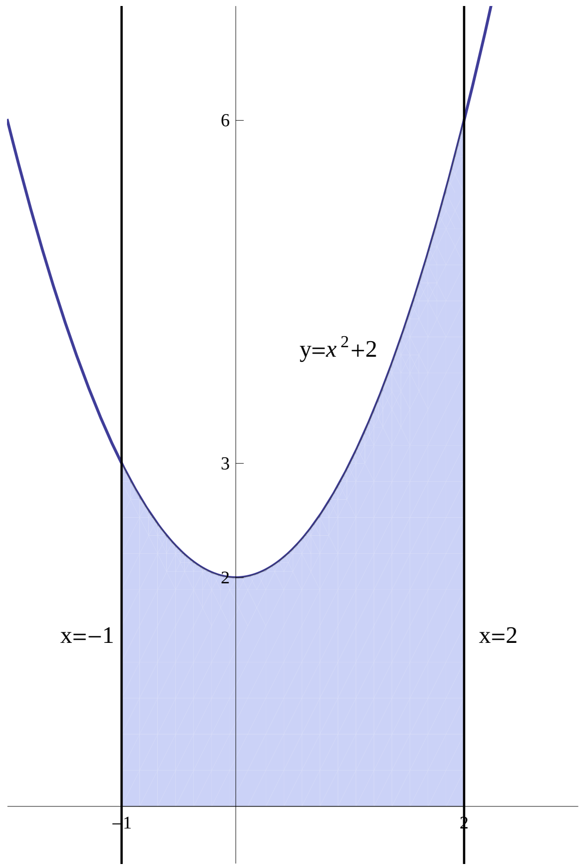
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,2)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $x = -1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(-1,0)$

المنحنى $x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2,0)$

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x



$$A = \int_{-1}^{2} (x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

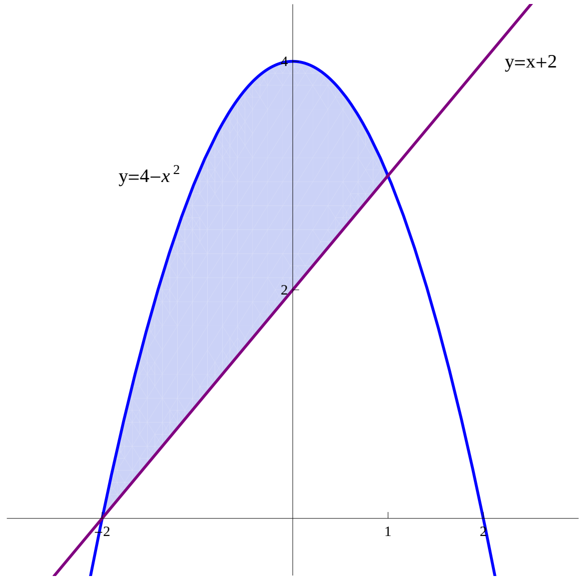
$$= \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2(2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)\right)\right] = \left[\left(\frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - 2\right)\right] = \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 2 = 9$$

(2) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم ميله 1 ويقطع محور y عند النقطة $(0, 2)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\,,\; x = 1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x+2)\right]\, dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)\right]$$

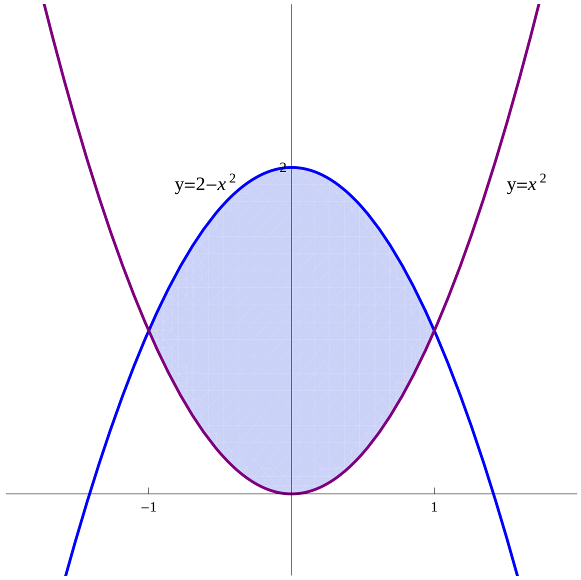
$$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

(3) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$

الحل :

المنحنى $y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأسفل

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0$$

$$\implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1\ ,\ x = 1$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left[(2 - x^2) - x^2\right]\, dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\, dx = \left[2x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

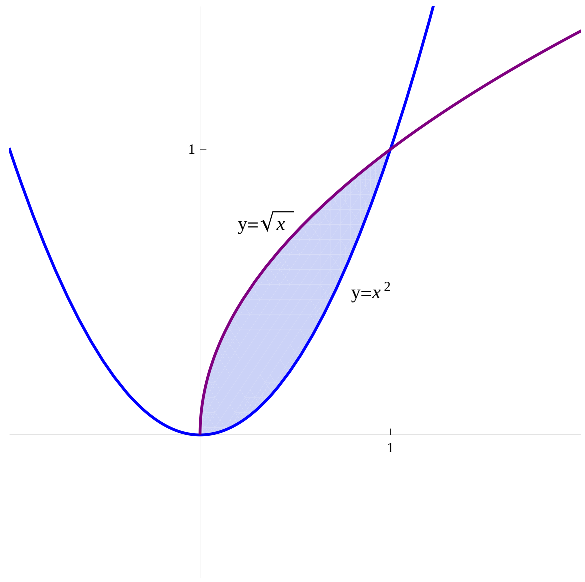
$$= \left[\left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right)\right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

(4) أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي من القطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه النقطة $(0,0)$ وفتحته لليمين



نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$:

$$x^2 = \sqrt{x} \implies x^4 = x \implies x^4 - x = 0$$

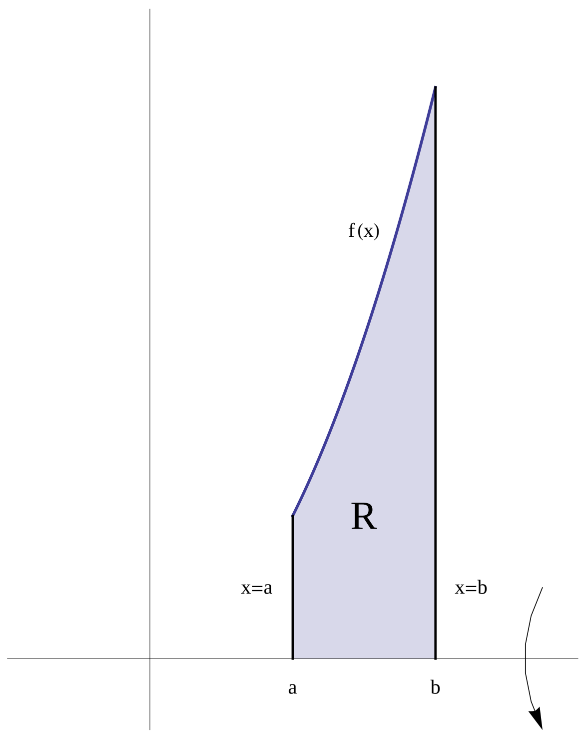
$$\implies x(x^3 - 1) = 0 \implies x = 0\,,\; x = 1$$

$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]\, dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} - x^2\right]\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0-0)\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2.7 حجوم أجسام الدوران

أولاً - الأقراص الأسطوانية :



إذا كانت الدالة f موجبة ومتصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت R المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور x والخطين المستقيمين $x=a$ و $x=b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

ملاحظة : نستخدم طريقة الأقراص الأسطوانية عندما تكون منطقة الدوران R تلامس بالكامل محور الدوران .

مثال :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2+1$ و $x=1$ و $x=2$ و $y=0$ حول محور x .

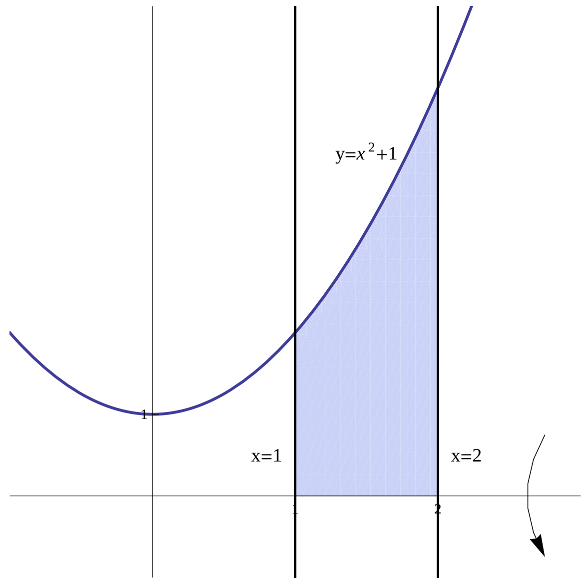
الحل :

المنحنى $y=x^2+1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $x=1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1,0)$.

المنحنى $x=2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2,0)$.

المنحنى $y=0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^2+1\right)^2 \, dx = \pi \int_1^2 \left(x^4+2x^2+1\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 1\right] = \pi \left(\frac{31}{5} + \frac{14}{3} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{93+70+15}{15}\right) \pi = \frac{178}{15} \pi$$

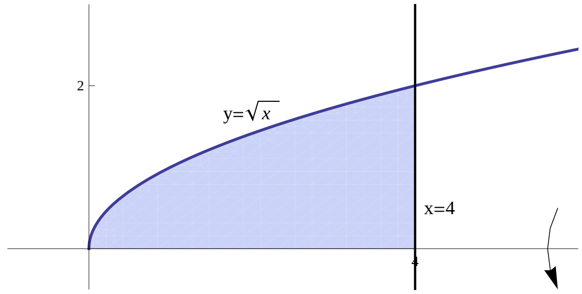
(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x}$ و $x = 4$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2$ الذي رأسه $(0, 0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $x = 4$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(4, 0)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \; dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

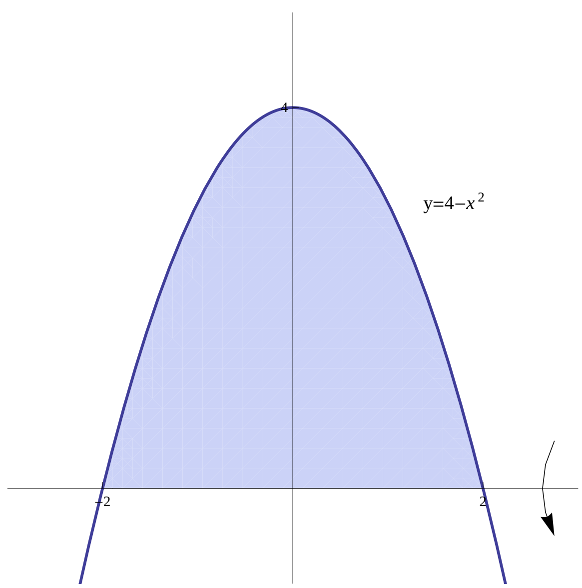
$$= \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right) = 8\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = 4 - x^2$ مع $y = 0$:

$$4 - x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = -2 \,, \; x = 2$$

باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2\,dx - \pi \int_{-2}^{2} (16-8x^2+x^4)\,dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \pi \left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right)\right]$$

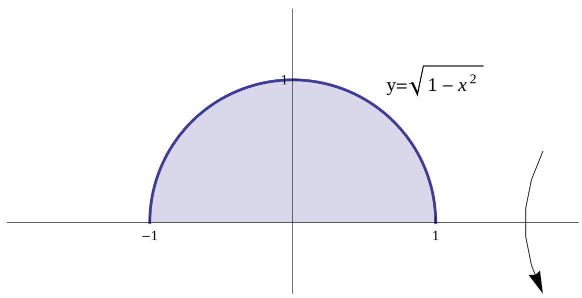
$$= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \pi \left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi$$

(4) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = \sqrt{1-x^2}$ و $y = 0$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ يمثل النصف العلوي للدائرة $y^2 + x^2 = 1$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 .

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ مع $y = 0$:

$$\sqrt{1-x^2} = 0 \implies 1 - x^2 = 0 \implies x^2 = 1$$

$$\implies x = -1\,,\ x = 1$$

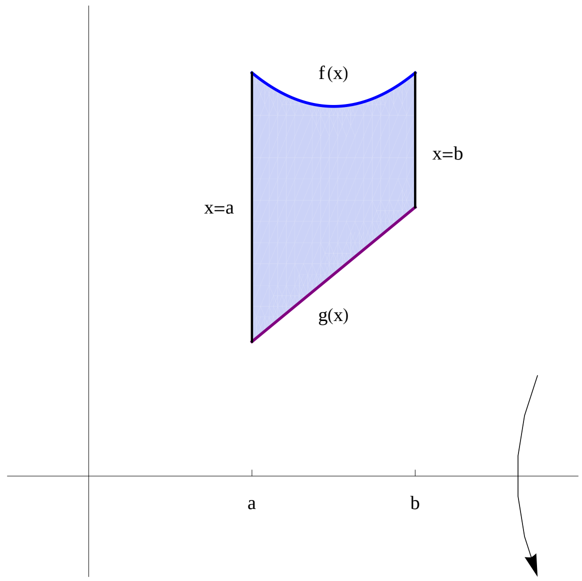
باستخدام طريقة الأقراص الأسطوانية :

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \pi \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

ثانياً - طريقة الوردات



إذا كانت f و g دالتين موجبتين ومتصلتين على الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) > g(x)$ لكل $x \in [a,b]$ ، وكانت R هي المنطقة المحصورة بالمنحنيات $f(x)$ و $g(x)$ و المستقيمين $x = a$ و $x = b$ ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x يساوي $V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\, dx$

ملاحظة : نستخدم طريقة الوردات حينما لا تكون منطقة الدوران ملامسة بالكامل لمحور الدوران .

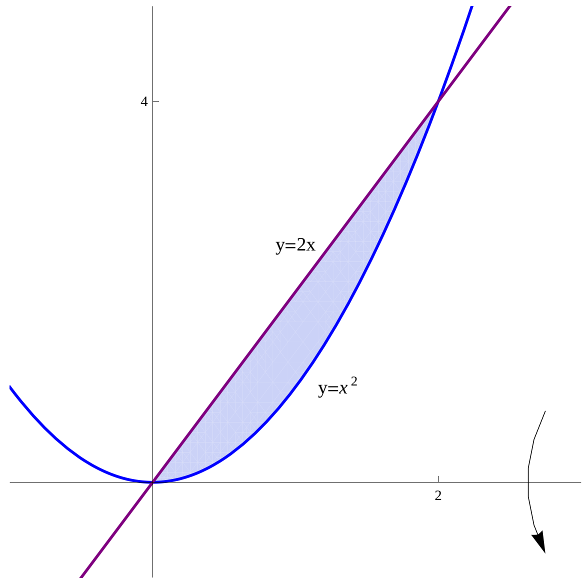
أمثلة :

(1) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0\,,\ x = 2$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right]\, dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}(0) - \frac{0}{5}\right)\right]$$

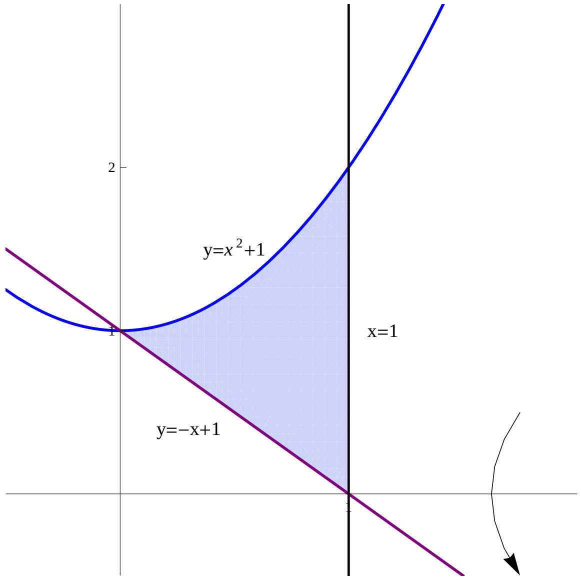
$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 32\pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{64}{15}\pi$$

(2) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 1$ و $y = -x + 1$ و $x = 1$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2 + 1$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 1)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = -x + 1$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0, 1)$



إيجاد نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2 + 1$ مع المنحنى $y = -x + 1$:

$$x^2 + 1 = -x + 1 \implies x^2 + x = 0 \implies x(x+2) = 0$$
$$\implies x = -2\ ,\ x = 0$$

نقطة تقاطع المستقيمين $y = -x + 1$ و $x = 1$ هي النقطة $(1, 0)$

باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x^2+1)^2 - (-x+1)^2\right]\, dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left[(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1)\right]\, dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + x^2 + 2x\right)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1$$
$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) - (0+0+0)\right] = \frac{23}{15}\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2 + 2$ و $y = 1$ و $x = 1$ و $x = 0$ حول محور x .

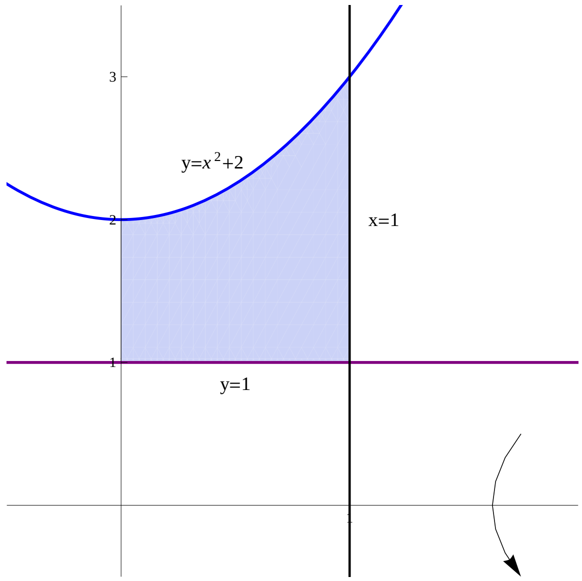
الحل :

المنحنى $y = x^2 + 2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0, 1)$.

المنحنى $x = 1$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(1, 0)$.

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



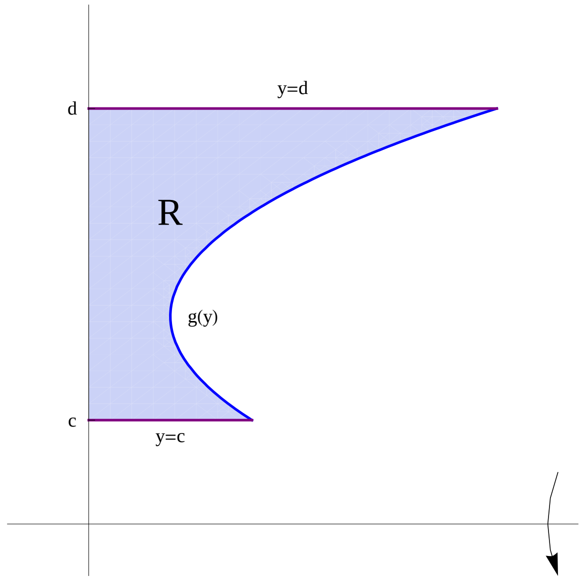
باستخدام طريقة الوردات :

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x^2+2)^2 - (1)^2\right]\, dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4 - 1)\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 3)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 3x\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 3\right) - (0+0+0)\right] = \frac{68}{15}\pi$$

ثالثاً - طريقة الشرائح الأسطوانية :



إذا كانت الدالة $g(y)$ دالة موجبة ومتصلة على الفترة $[c,d]$ و كانت R هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات $g(y)$ و $y = c$ و $y = d$ و محور y ، فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة R حول محور x تساوي $V = 2\pi \int_c^d y\, g(y)\, dy$

أمثلة :

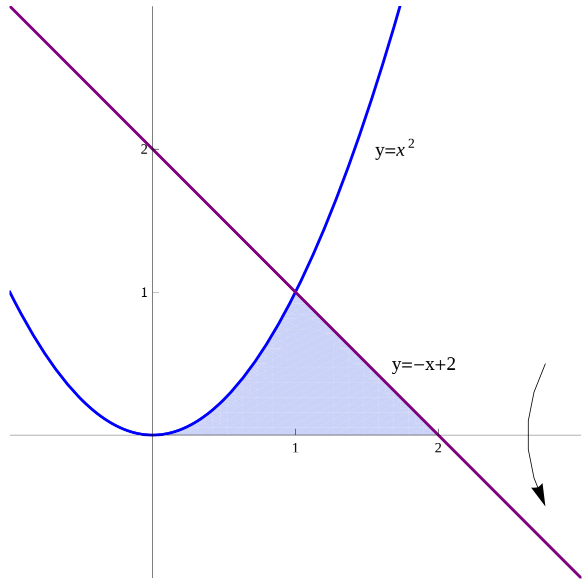
(1) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2$ و $y = -x+2$ و $y = 0$ ، حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = -x+2$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0,2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .



نقاط تقاطع المنحنى $y = x^2$ مع $y = -x + 2$:

$$x^2 = -x + 2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

$$\implies x = -2\,,\; x = 1 \implies y = 4\,,\; y = 1$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = -x + 2 \implies x = -y + 2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y\left[(-y+2) - \sqrt{y}\right]\, dy = 2\pi \int_0^1 y\left(-y - y^{\frac{1}{2}} + 2\right)\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(-y^2 - y^{\frac{3}{2}} + 2y\right)\, dy = 2\pi \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + y^2\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 1\right) - (0 - 0 + 0)\right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{-5 - 6 + 15}{15}\right) = 2\pi \left(\frac{4}{15}\right) = \frac{8\pi}{15}$$

(2) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sqrt{x-1}$ و $y = 2$ و $y = 0$ و $x = 0$ ، حول محور x .

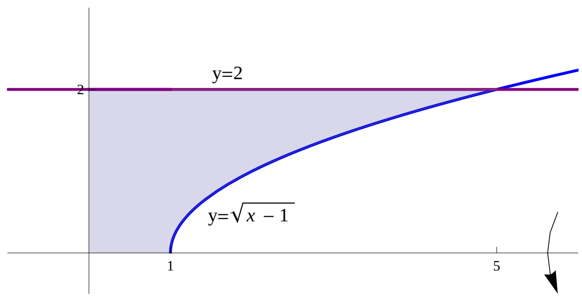
الحل :

المنحنى $y = \sqrt{x-1}$ يمثل النصف العلوي للقطع المكافئ $x = y^2 + 1$ الذي رأسه $(1, 0)$ وفتحته لليمين .

المنحنى $y = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور x ويمر بالنقطة $(0,2)$.

المنحنى $y = 0$ يمثل محور x .

المنحنى $x = 0$ يمثل محور y .



باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = \sqrt{x-1} \implies y^2 = x - 1 \implies x = y^2 + 1$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y\,(y^2+1)\,dy = 2\pi \int_0^2 (y^3 + y)\,dy = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right]_0^2$$

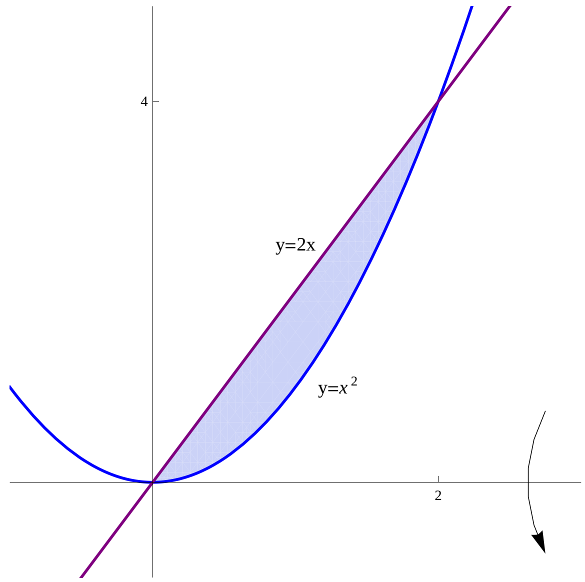
$$= 2\pi \left[\left(\frac{16}{4} + \frac{4}{2}\right) - (0+0)\right] = 2\pi\,(4+2) = 12\pi$$

(3) أحسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$ حول محور x .

الحل :

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .

المنحنى $y = 2x$ يمثل خط مستقيم ميله 2 ويمر بنقطة الأصل .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x^2$ و $y = 2x$:

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0$$

$$\implies x = 0\,,\ x = 2 \implies y = 0\,,\ y = 4$$

باستخدام طريقة الشرائح الأسطوانية :

$$y = x^2 \implies x = \sqrt{y}$$

$$y = 2x \implies x = \frac{1}{2}y$$

$$V = 2\pi \int_0^4 y \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y\right)\,dy = 2\pi \int_0^4 \left(y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right)\,dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\pi \left[\left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(4)^3}{6}\right) - (0-0)\right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6}\right) = 128\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{128}{30}\pi = \frac{64}{15}\pi$$

3.7 طول القوس

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ فإن طول منحنى الدالة f من $x=a$ إلى $x=b$ يساوي $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

أمثلة :

(1) أحسب طول القوس للدالة $y=1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ من $x=0$ إلى $x=3$.

الحل :

$$f(x)=1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \implies f'(x)=x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_0^3 \sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx=\int_0^3 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\left[\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{3}(8)-\frac{2}{3}(1)=\frac{16-2}{3}=\frac{14}{3}$$

(2) أحسب طول القوس للدالة $y=\cosh x$ من $x=0$ إلى $x=\ln 2$.

الحل :

$$f(x)=\cosh x \implies f'(x)=\sinh x$$

$$L=\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+(\sinh x)^2}\,dx=\int_0^{\ln 2} \sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2} \sqrt{\cosh^2 x}\,dx=\int_0^{\ln 2} \cosh x\,dx=[\sinh x]_0^{\ln 2}$$

$$=\sinh(\ln 2)-\sinh(0)=\sinh(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

ملاحظة : تذكر أن

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \implies \cosh^2 x=1+\sinh^2 x$$

(3) أحسب طول القوس للدالة $y=\sqrt{4-x^2}$ من $x=-2$ إلى $x=2$.

الحل :

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \implies f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{-2}^{2} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx = 2\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \\
&= 2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} = 2\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1)\right] = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi
\end{aligned}
$$

4.7 مساحة سطح الدوران

إذا كانت الدالة f موجبة و قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران الدالة f من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور x تساوي $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

أمثلة :

(1) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \frac{1}{3}x^3$ ، $0 \le x \le 1$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \implies f'(x) = x^2$$

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3\sqrt{1 + (x^2)^2}\, dx = \frac{2\pi}{3} \int x^3\sqrt{1 + x^4}\, dx$$

$$= \frac{2\pi}{3}\frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{2}} (4x^3)\, dx = \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

(2) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{x}$ ، $1 \le x \le 4$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\, \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 2\pi\, \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx = \pi \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \pi\, \frac{1}{4} \int_1^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}(4)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(17)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6}\left[(17)^{\frac{3}{2}} - (5)^{\frac{3}{2}}\right]$$

(3) أحسب مساحة سطح الجسم الناشئ عن دوران المنحنى $y = \sqrt{9 - x^2}$ ، $-3 \le x \le 3$ حول محور x .

الحل :

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\sqrt{\frac{(9-x^2)+x^2}{9-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 6\pi \int_{-3}^{3} 1\,dx$$

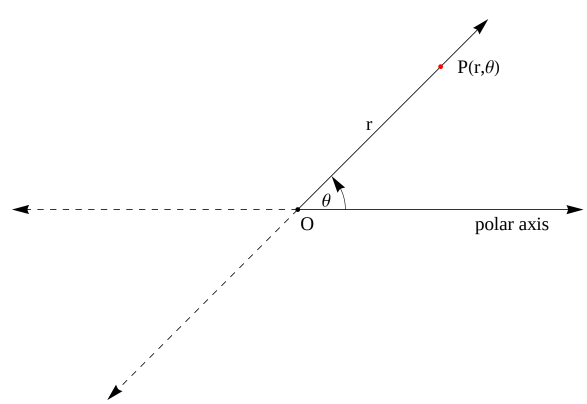
$$= 6\pi\,[x]_{-3}^{3} = 6\pi[3-(-3)] = 6\pi\,(6) = 36\pi$$

باب 8

الإحداثيات القطبية

1.8 الإحداثيات القطبية

تمثل أي نقطة في المستوى الديكارتي بواسطة الزوج المرتب (a,b) حيث يرمز a للإحداثي x بينما يرمز b للإحداثي y .
يمكن تمثيل أي نقطة بطريقة أخرى تسمى الإحداثيات القطبية .
يتكون المستوى القطبي من القطب والمحور القطبي . القطب هو نقطة الأصل في المستوى الديكارتي ، والمحور القطبي هو محور x في المستوى الديكارتي .
إذا كانت P أي نقطة في المستوى نحرك المحور القطبي في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حتى نصل إلى النقطة P نرمز للمسافة بين P والقطب بالرمز r ، ونرمز للزاوية التي يصنعها المحور بعد تحريكه حتى نصل إلى P بالرمز θ ، نسمي الزوج المرتب (r,θ) بالتمثيل القطبي للنقطة P .

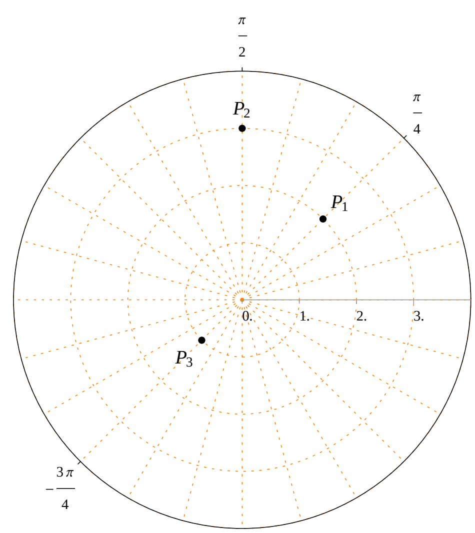


ملاحظات :

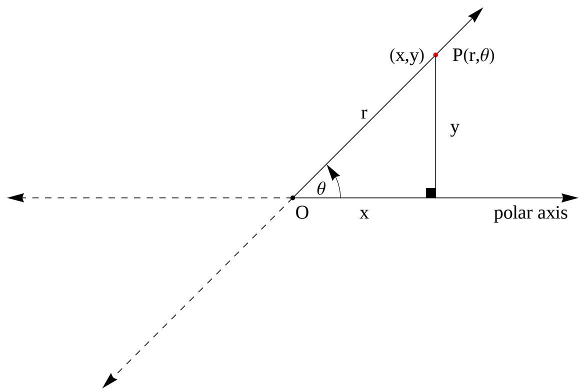
- في التمثيل القطبي لنقاط المستوى نستخدم القياس الدائري للزوايا .
- التمثيل القطبي لنقطة الأصل أو القطب هو $(0,\theta)$ لأي زاوية θ .
- التمثيل القطبي لأي نقطة ليس وحيداً .

الإحداثيات القطبية $\left(-2,-\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-2,\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ تمثل نفس النقطة في المستوى .

مثال : أرسم النقاط التالية
$P_1\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$, $P_2\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$, $P_3\left(1,-\frac{3\pi}{4}\right)$
الحل :



2.8 العلاقة بين الإحداثيات القطبية والديكارتية



- إذا كان (x, y) هو التمثيل الديكارتي للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات القطبية للنقطة P من العلاقتين :

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \implies \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

- إذا كان (r, θ) هو التمثيل القطبي للنقطة P فيمكن حساب الإحداثيات الديكارتية للنقطة P من العلاقتين :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \implies x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \implies y = r\sin\theta$$

مثال :

(1) أوجد الإحداثيات القطبية للنقطة التي إحداثياتها الديكارتية هي $(1, \sqrt{3})$

الحل :

$$x = 1\,,\; y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \implies \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

الإحداثيات القطبية هي $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

(2) أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة التي إحداثياتها القطبية هي $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$

الحل :

$$r = 2\ ,\ \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$y = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الإحداثيات الديكارتية هي $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

مثال :

(1) حول المعادلة القطبية $r = 3\sec\theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 3\sec\theta \implies r = \frac{3}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = 3 \implies x = 3$$

المعادلة الديكارتية $x = 3$ تمثل خط عمودي .

(2) حول المعادلة القطبية $r = 2$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2 \implies r^2 = 4 \implies x^2 + y^2 = 4$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + y^2 = 4$ تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

(3) حول المعادلة القطبية $r = 2\sin\theta$ إلى معادلة ديكارتية .

الحل :

$$r = 2\sin\theta \implies r^2 = 2\,(r\ \sin\theta) \implies x^2 + y^2 = 2y$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1 \implies x^2 + (y-1)^2 = 1$$

المعادلة الديكارتية $x^2 + (y-1)^2 = 1$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(0, 1)$ ونصف قطرها 1 .

3.8 المنحنيات القطبية

اختبار التناظر :

(1) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المحور القطبي إذاكان $r(\theta) = r(-\theta)$.

(2) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذاكان $r(\theta) = -r(-\theta)$.

(3) يكون بيان المعادلة القطبية $r = r(\theta)$ متناظراً حول االقطب إذاكان $r(\theta) = -r(\theta)$.

أولاً - الخطوط المستقيمة :

(1) الخط المستقيم المار بالقطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية للخط المستقيم المار بالقطب هي $\theta = \theta_0$.

$$\theta = \theta_0 \implies \tan(\theta) = \tan(\theta_0) \implies \frac{y}{x} = \tan(\theta_0) \implies y = \tan(\theta_0)\ x$$

$\theta = \theta_0$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب وميله $\tan(\theta_0)$.

(2) الخط المستقيم العمودي على المحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم العمودي على المحور القطبي هي $r = a\ \sec\theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$r = a\ \sec\theta = \frac{a}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = a \implies x = a$$

$r = a\sec\theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (a, 0)$.

(3) الخط المستقيم الموازي للمحور القطبي :

المعادلة القطبية للخط المستقيم الموازي للمحور القطبي هي $r = a\ \csc\theta$ حيث $a \neq 0$ و $\theta \in (0, \pi)$.

$$r = a\ \csc\theta = \frac{a}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = a \implies y = a$$

$r = a\csc\theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r, \theta) = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

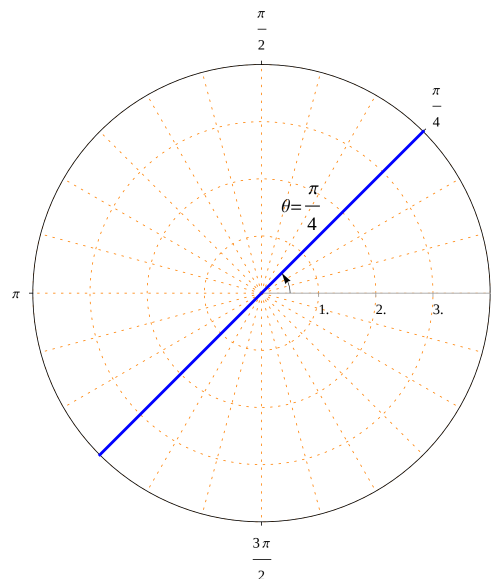
مثال : حول المعادلات القطبية التالية إلى معادلات ديكارتية وارسمها :

(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$

الحل :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \implies \tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \frac{y}{x} = 1 \implies y = x$$

المعادلة $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ تمثل خط مستقيم يمر بالقطب وميله 1 .

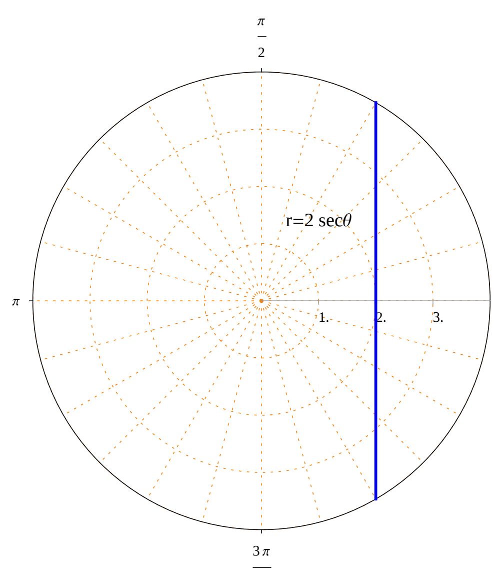


$r = 2\sec\theta$ (2)

الحل :

$$r = 2\sec\theta = \frac{2}{\cos\theta} \implies r\cos\theta = 2 \implies x = 2$$

المعادلة $r = 2\sec\theta$ تمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = (2,0)$.

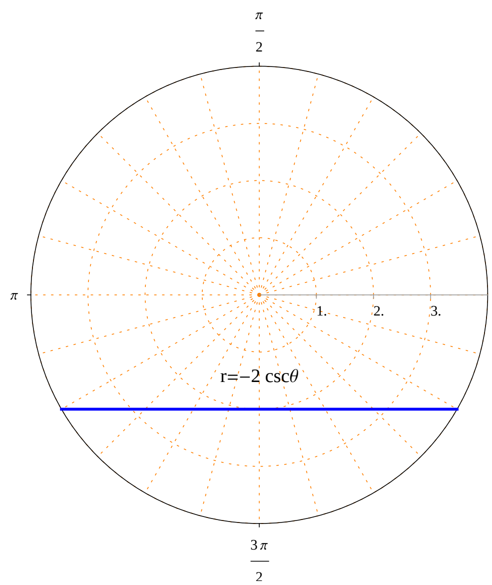


(3) $r = -2\csc\theta$

الحل :

$$r = -2\csc\theta = \frac{-2}{\sin\theta} \implies r\sin\theta = 2 \implies y = -2$$

المعادلة $r = -2\csc\theta$ تمثل خط مستقيم يوازي المحور القطبي ويمر بالنقطة $(r,\theta) = \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$.



ثانياً - الدوائر

(1) الدوائر التي مركزها القطب (نقطة الأصل) :

المعادلة القطبية $r = a$ حيث $a \neq 0$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها $|a|$.

$$r = a \implies r^2 = a^2 \implies x^2 + y^2 = a^2$$

(2) الدوائر على الصورة $r = a\cos\theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$r = a\cos\theta \implies r^2 = a(r\cos\theta) \implies x^2 + y^2 = ax$$

$$\implies (x^2 - ax) + y^2 = 0 \implies \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r,\theta) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a\cos\theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a\cos\theta$ تقع على يمين الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a\cos\theta$ تقع على يسار الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(3) الدوائر على الصورة $r = a\sin\theta$ ، حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$r = a\sin\theta \implies r^2 = a(r\sin\theta) \implies x^2 + y^2 = ay$$

$$\implies x^2 + y^2 - ay = 0 \implies x^2 + \left(y^2 - ay + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$\implies x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

المعادلة $r = a\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها النقطة $(r,\theta) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.

لاحظ أن الدائرة $r = a\sin\theta$ تمر بالقطب .

إذا كانت $a > 0$ فإن الدائرة $r = a\sin\theta$ تقع أعلى المحور القطبي .

إذا كانت $a < 0$ فإن الدائرة $r = a\sin\theta$ تقع أسفل المحور القطبي .

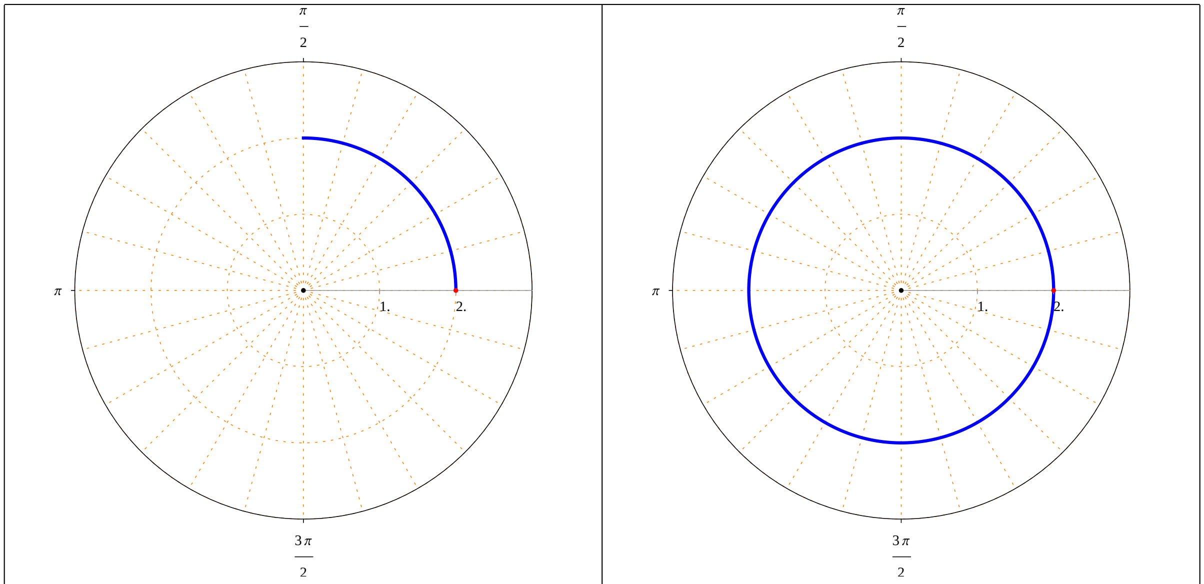
مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية :

(1) $r = 2$

الحل :

المعادلة $r = 2$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

لاحظ أن نقطة البداية هي $(r,\theta) = (2,0)$.



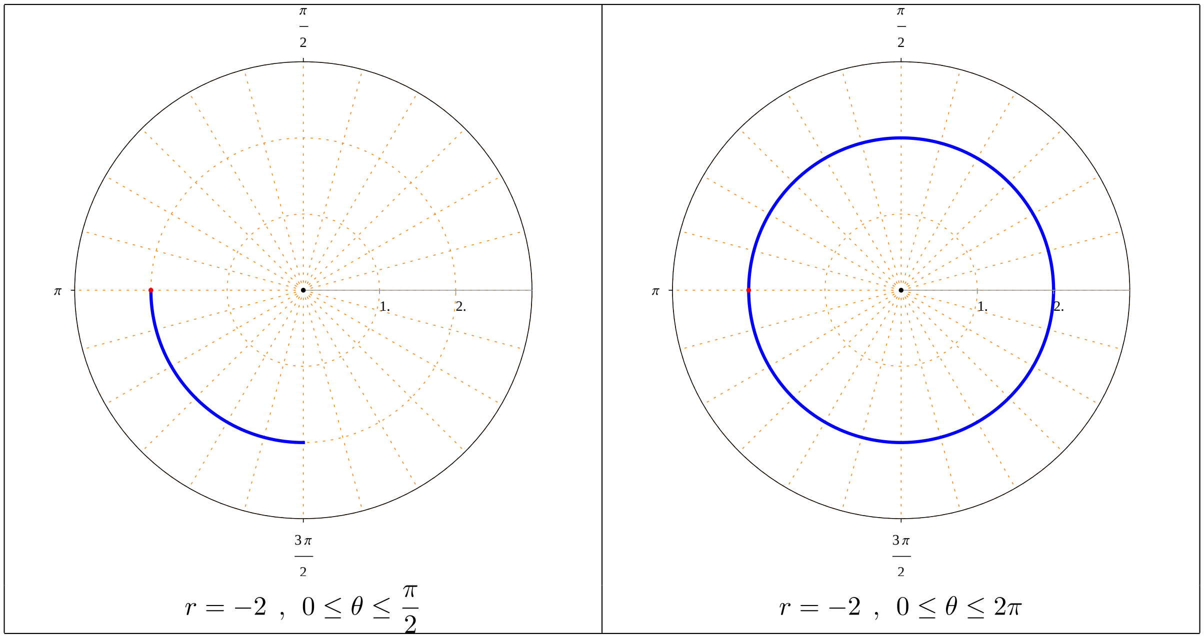
$r = 2 \ , \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $r = 2 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$r = -2$ (2)

الحل :

المعادلة $r = -2$ تمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

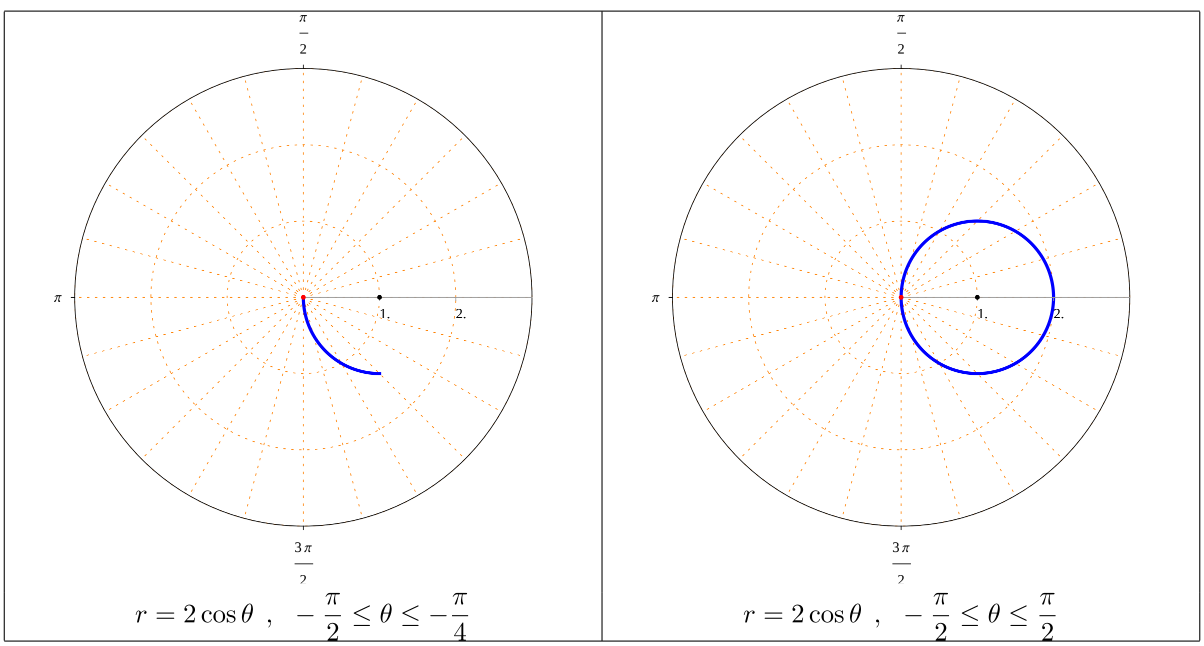
لاحظ أن نقطة البداية هي $(r, \theta) = (-2, 0)$.



(3) $r = 2\cos\theta \,,\; -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

الحل :

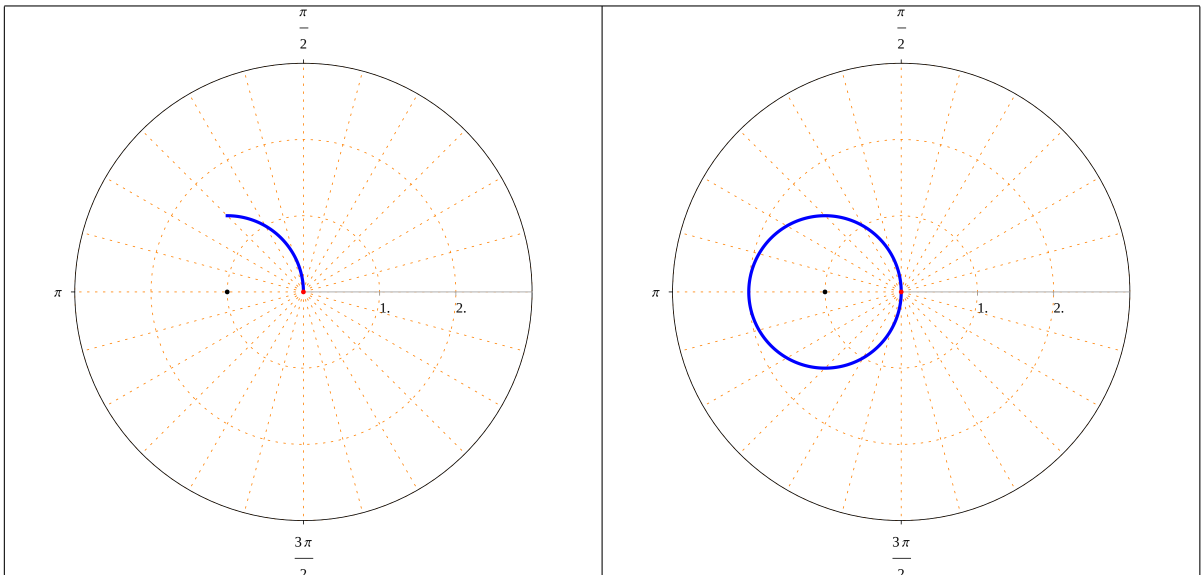
المعادلة $r = 2\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = (1,0)$ ونصف قطرها 1 .



$r = -2\cos\theta\ ,\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ (4)

الحل :

المعادلة $r = -2\cos\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = (-1,0)$ ونصف قطرها 1 .



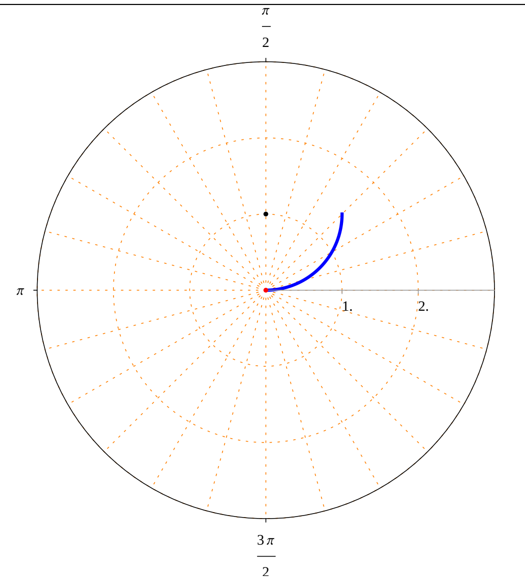
$r = -2\cos\theta\ \ ,\ \ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\dfrac{\pi}{4}$

$r = -2\cos\theta\ \ ,\ \ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

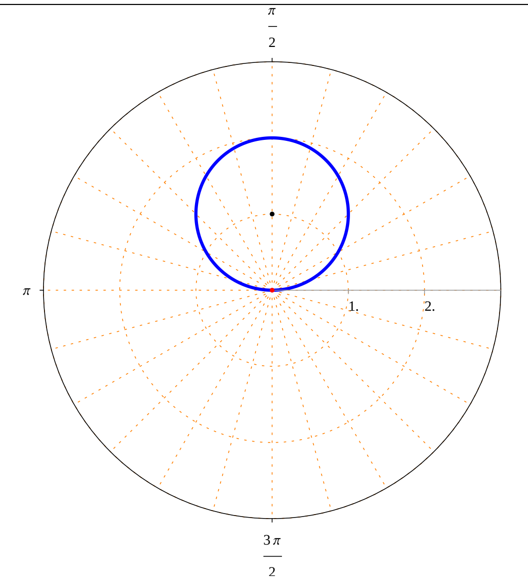
$r = 2\sin\theta\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi$ (5)

الحل :

المعادلة $r = 2\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 1 .



$r = 2\sin\theta \;,\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

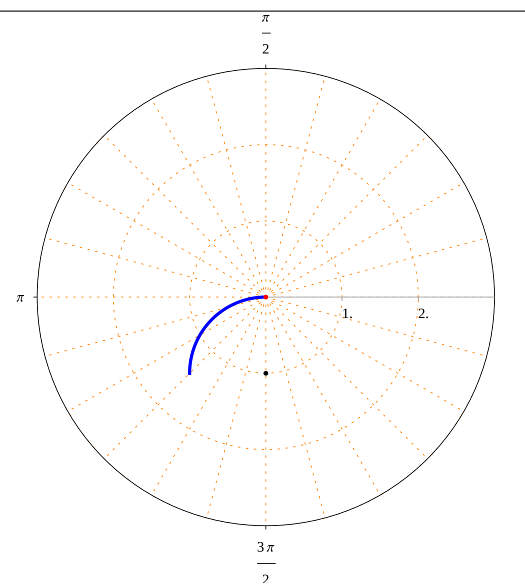


$r = 2\sin\theta \;,\; 0 \le \theta \le \pi$

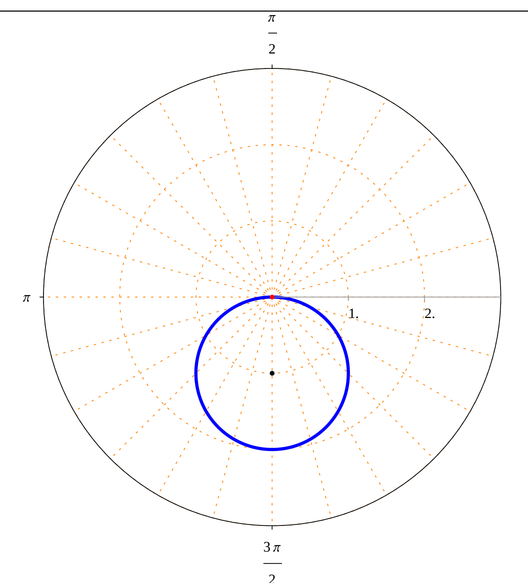
$r = -2\sin\theta \,,\, 0 \le \theta \le \pi$ (6)

الحل :

المعادلة $r = -2\sin\theta$ تمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 1 .



$r = -2\sin\theta \;,\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$



$r = -2\sin\theta \;,\; 0 \le \theta \le \pi$

ثالثاً - المنحنيات القلبية :

(1) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \cos\theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

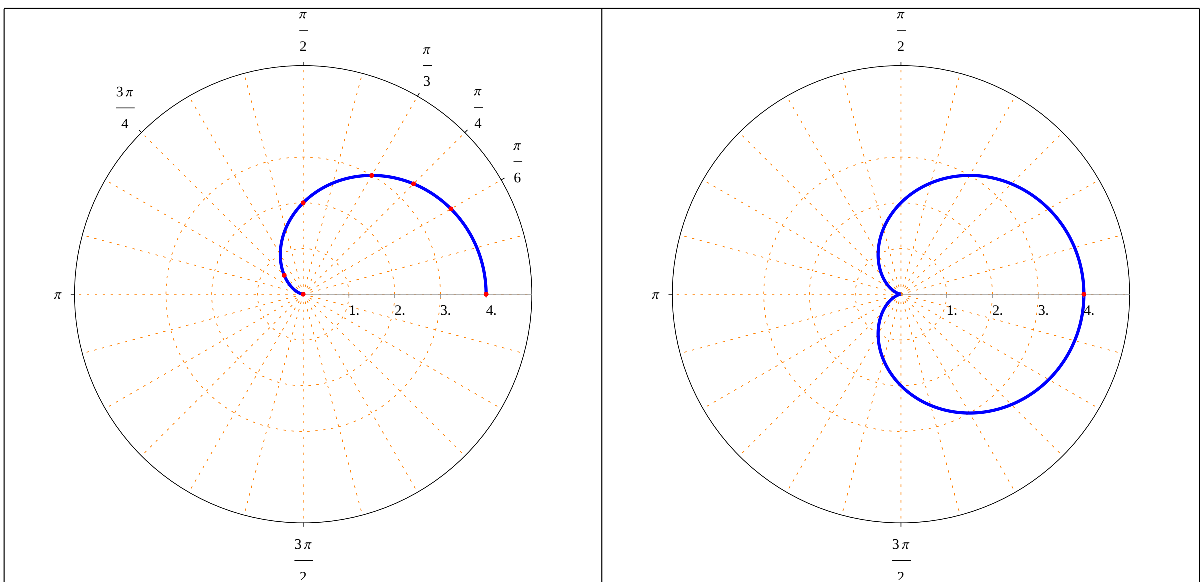
(2) المعادلة القطبية $r = a(1 \pm \sin\theta)$ حيث $a \neq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ تمثل منحنى قلبي متناظر حول الخط المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

مثال : أرسم المنحنيات القطبية التالية

(1) $r = 2 + 2\cos\theta$

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .

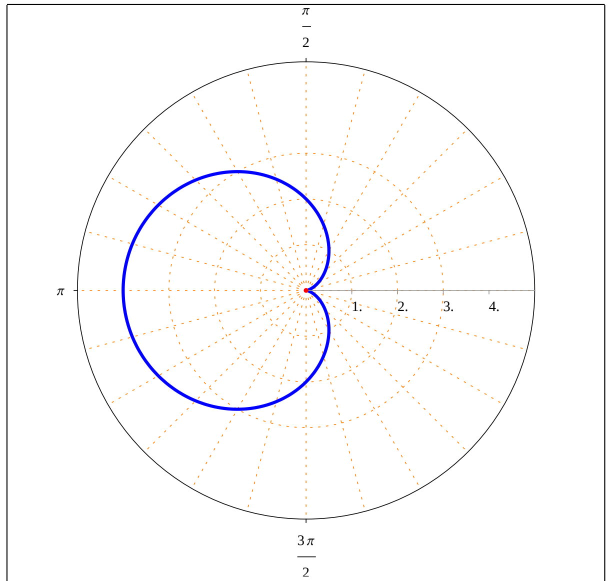
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r(\theta)$	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	$2-\sqrt{2}$	0



$r = 2 + 2\cos\theta \; , \; 0 \leq \theta \leq \pi$ $\qquad$ $r = 2 + 2\cos\theta \; , \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

(2) $r = 2 - 2\cos\theta$

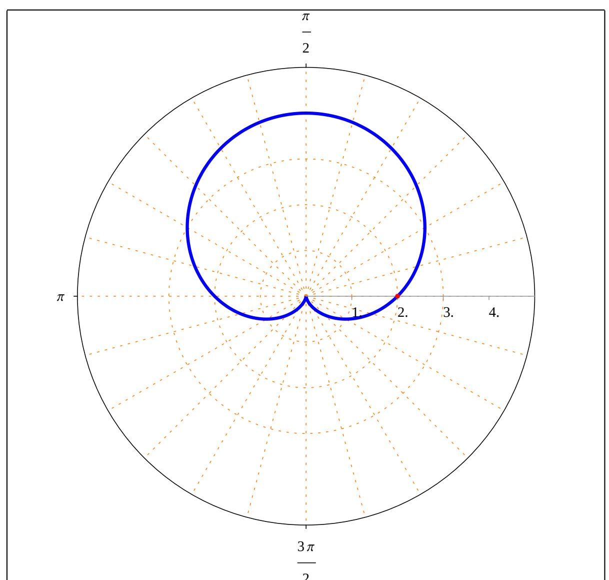
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المحور القطبي .



$r = 2 - 2\cos\theta \ , \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$r = 2 + 2\sin\theta$ (3)

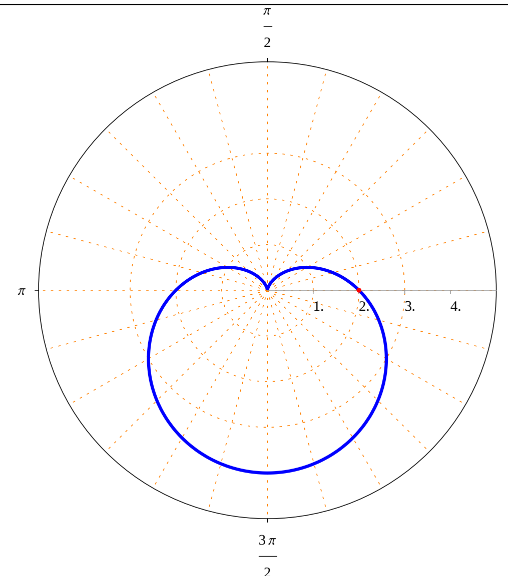
لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.



$r = 2 + 2\sin\theta \ , \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

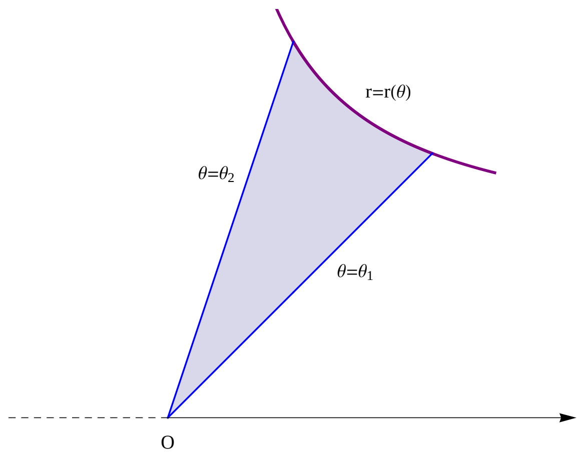
$r = 2 - 2\sin\theta$ (4)

لاحظ أن المنحنى القطبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

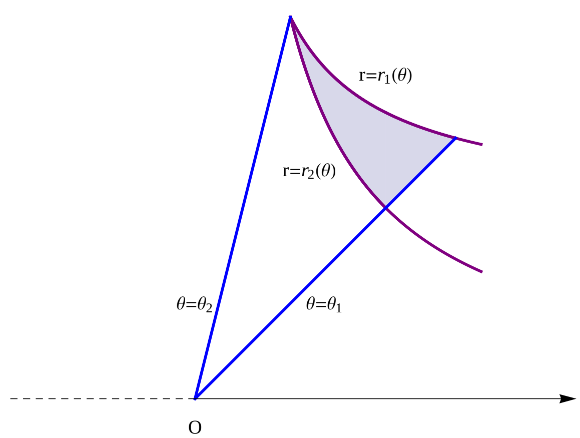


$r = 2 - 2\sin\theta \ , \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

4.8 المساحات في الإحداثيات القطبية



إذا كانت الدالة $r = r(\theta)$ دالة متصلة و موجبة فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $r(\theta)$ والمستقيمين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ تساوي $d\theta$ $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [r(\theta)]^2 \, d\theta$



مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات القطبية $r_1(\theta)$ و $r_2(\theta)$ و $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ تساوي $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left([r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2\right) \, d\theta$

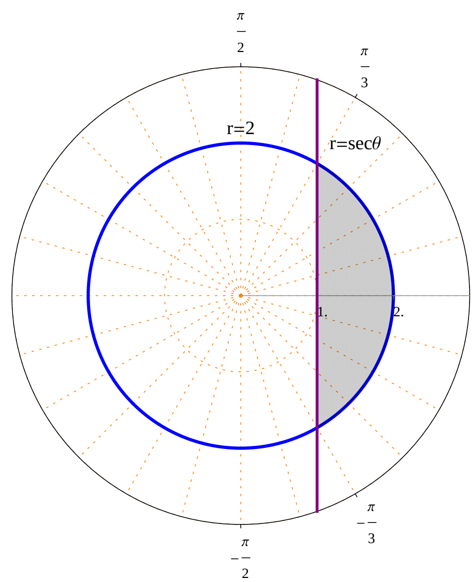
أمثلة :

(1) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2$ وإلى اليمين من المستقيم $r = \sec\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

المنحنى $r = \sec\theta$ يمثل خط مستقيم عمودي على المحور القطبي في النقطة $(r, \theta) = (1, 0)$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2$ مع المنحنى $r = \sec\theta$:

$$\sec\theta = 2 \implies \frac{1}{\cos\theta} = 2 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3}\ ,\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2)^2 - (\sec\theta)^2\right]\, d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 - \sec^2\theta\right)\, d\theta$$

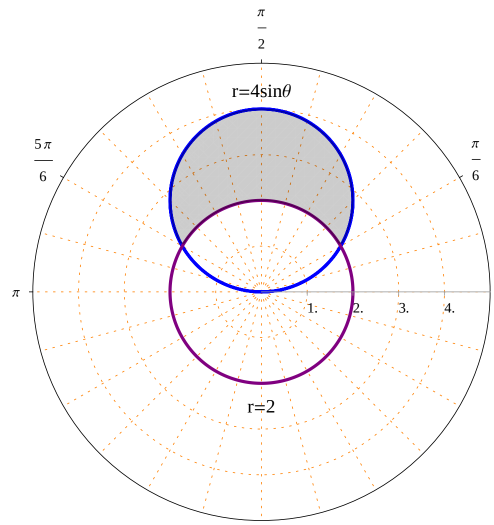
$$= \left[4\theta - \tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - (4(0) - \tan(0)) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(2) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 4\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .

المنحنى $r = 4\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 4\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$4\sin\theta = 2 \implies \sin\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6} \;,\; \theta = \frac{5\pi}{6}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(4\sin\theta)^2 - (2)^2\right]\, d\theta\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(16\sin^2\theta - 4\right)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[16\,\frac{1}{2}\,(1-\cos 2\theta) - 4\right]\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8\cos\theta - 4)\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 8\cos\theta)\, d\theta = [4\theta - 4\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[4\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\sin\left(4\,\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[4\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4\sin\left(2\,\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= (2\pi - 4\sin(2\pi)) - \left(\frac{2\pi}{3} - 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

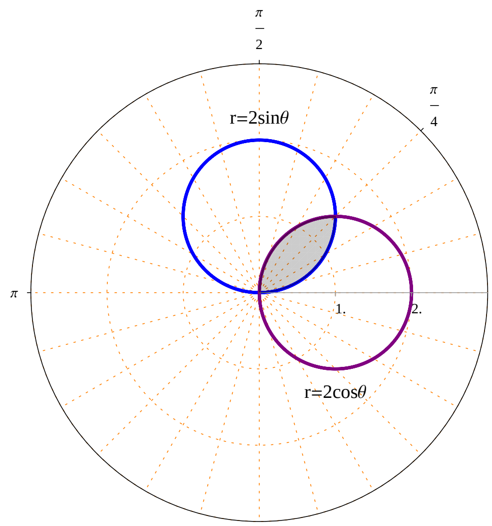
$$= 2\pi - 0 - \frac{2\pi}{3} + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المشتركة بين المنحنيين $r = 2\cos\theta$ و $r = 2\sin\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها 1 .

المنحنى $r = 2\cos\theta$ يمثل دائرة مركزها $(r,\theta) = (1,0)$ ونصف قطرها 1 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2\cos\theta$:

$$2\sin\theta = 2\cos\theta \implies \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \implies \tan\theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\theta)^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\sin^2\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[4\,\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4\,\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2-2\cos 2\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2+2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[2\theta + \sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - (0-0)\right] + \frac{1}{2}\left[(\pi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right]$$

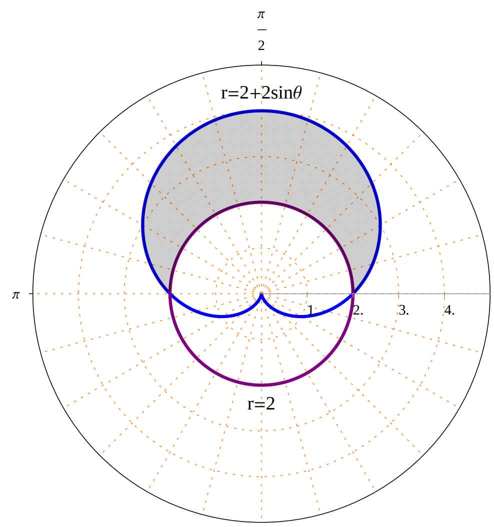
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(4) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 2$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 2$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 2 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\sin\theta$ مع المنحنى $r = 2$:

$$2 + 2\sin\theta = 2 \implies \sin\theta = 0 \implies \theta = 0 \;,\; \theta = \pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2+2\sin\theta)^2 - (2)^2\right]\, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(4 + 8\sin\theta + 4\sin^2\theta) - 4\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin\theta + 4\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8\sin\theta + 4\,\frac{1}{2}\,(1 - \cos 2\theta)\right]\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 8\sin\theta - 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[2\theta - 8\cos\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\,\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[2\,(0) - 8\cos(0) - \sin(2\,(0))\right]$$

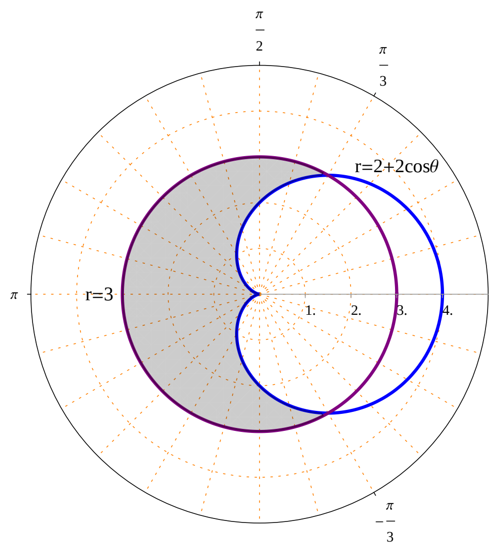
$$= (\pi - 0 - 0) - (0 - 8 - 0) = 8 + \pi$$

(5) أحسب مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3$ وخارج المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2\cos\theta = 3 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = -\frac{\pi}{3} \ , \ \theta = \frac{\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي .

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[(3)^2 - (2 + 2\cos\theta)^2\right] \, d\theta\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[9 - (4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left[5 - 8\cos\theta - 4\,\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] \, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3 - 8\cos\theta - 2\cos 2\theta) \, d\theta = [3\theta - 8\sin\theta - \sin 2\theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= [3\,(\pi) - 8\sin(\pi) - \sin(2\pi)] - \left[3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= [3\pi - 8(0) - (0)] - \left[\pi - 8\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2}\right]$$

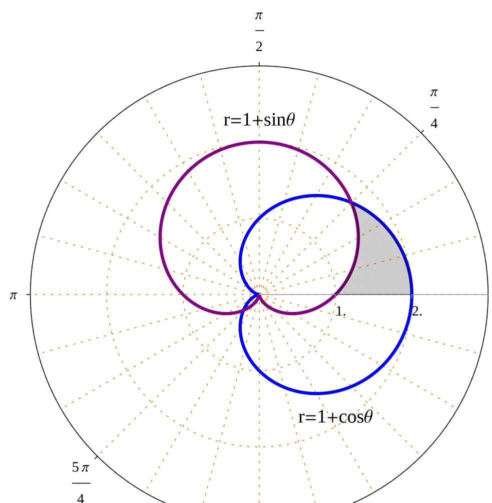
$$= 3\pi - \pi + 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(6) أحسب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و داخل المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 1 + \sin\theta$.

الحل :

المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 1 + \sin\theta$ يمثل منحنى قلبي متناظر حول المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.



نقاط تقاطع المنحنى $r = 1 + \cos\theta$ مع المنحنى $r = 1 + \sin\theta$:

$$1 + \cos\theta = 1 + \sin\theta \implies \cos\theta = \sin\theta \implies \theta = \frac{\pi}{4} \;,\; \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1+\cos\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2\right]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) - (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\right]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\cos\theta - 2\sin\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta\right]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2\cos\theta - 2\sin\theta + \cos 2\theta)\right]\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sin\theta + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(2(0) + 2(1) + \frac{1}{2}(0)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - 0 - 2 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{3}{4}$$