جامعة الملك سعود King Saud University — كلية العلوم - قسم الرياضيات	الإختبار النهائي لمقرر111 ريض
الإسم /.. الرقم الجامعي / .... أستاذ المقرر /	الفصل الصيفي 1438 / 1439 هـ الزمن: 3 ساعات الدرجة: 40

ملاحظات : 1. عدد الورقات 6 2. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

السؤال 1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6
3 درجات	3 درجات	14 درجات	6 درجات	8 درجات	6 درجات

السؤال الأول : استخدم **مجموع ريمان** لحساب التكامل $\int_1^2 (x-1)^2\,dx$ (3 درجات)

$f(x) = (x-1)^2 \quad , \quad x_k = 1 + \frac{k}{n}$

$\int_1^2 (x-1)^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$

1 $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$

1 $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{1}{=} \frac{1}{3}$

$\int_1^2 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}$

السؤال الثاني :

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2^x$ على الفترة $[0,1]$. (3 درجات)

0,5 $\int_0^1 2^x\,dx = 2^c \qquad c \in (0,1)$

1 $\Rightarrow \left[\frac{1}{\ln 2} 2^x\right]_0^1 = 2^c$

0,5 $\Rightarrow \frac{1}{\ln 2} = 2^c$

1 $\Rightarrow c = \log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$

السؤال الثالث: احسب التكاملات التالية :

(1) $I = \int (x-1)\sqrt{x+1}\, dx$

(درجتان)

(0.5) $u = x+1 \Rightarrow du = dx$

(0.5) $I = \int (u-2)\, u^{1/2}\, du = \int (u^{3/2} - 2u^{1/2})\, du$

(0.5) $= \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} + c$

(0.5) $= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + c$

(2) $I = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(درجتان)

(1) $I = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) dx$

(1) $= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + c$

(3) $I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

(درجتان)

(1) $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

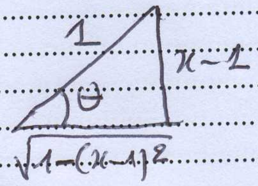
(1) $= \sqrt{x^2+4} + 2 \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

(4) $I = \int \sqrt{2x - x^2}\ dx$

(3 درجات)

0,5 $I = \int \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx$

$x - 1 = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$



0,5 $I = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta$

0,5 + 0,5 $= \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right] + C$

1 $= \frac{1}{2}\left[\theta + \sin\theta\cos\theta\right] + C = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(x-1) + (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\right] + C$

(5) $I = \int \frac{16}{(x-2)(x^2-4)}\, dx$

(3 درجات)

1,5 $\frac{16}{(x-2)(x^2-4)} = \frac{16}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{x+2}$

1,5 $I = -\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + \ln|x+2| + C$

(6) $I=\int \frac{2^x}{4+4^x}\,dx$ (درجتان)

(1) $I=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{(\ln 2)\,2^x}{2^2+(2^x)^2}\,dx$

(1) $=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln 2}\tan^{-1}\left(\frac{2^x}{2}\right)+C$

السؤال الرابع :

(أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+3\right)^{\frac{1}{x}}$ (3 درجات)

$y=(e^x+1)^{1/x}$

(1) $\ln y=\frac{\ln(e^x+3)}{x}$

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+3}}{1}$

$=1$

(1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(e^x+1)^{1/x}=e$

(ب) بيَن فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$ متقارب أم متباعد (أوجد قيمته في حالة التقارب) . (3 درجات)

(0,5) $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{\ln x}{x^2}\,dx$

(0,5) $\begin{cases}u=\ln x\\ v'=\frac{1}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=\frac{1}{x}\\ v=-\frac{1}{x}\end{cases}$

(1) $\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$

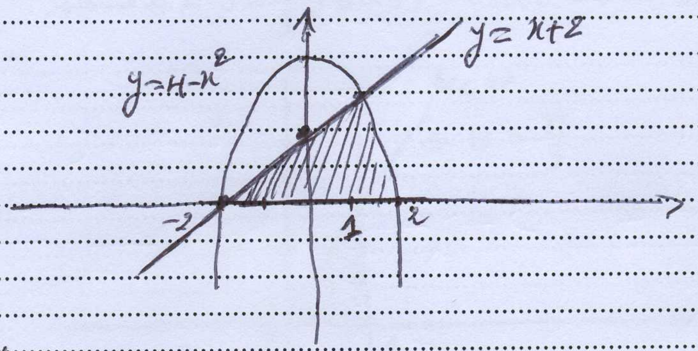
(0,5) $I=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^t=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[-\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}+1\right]$

(0,5) $=1$

السؤال الخامس :

(أ) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ و $y = 0$ ثم جد مساحتها. (4 درجات)

1



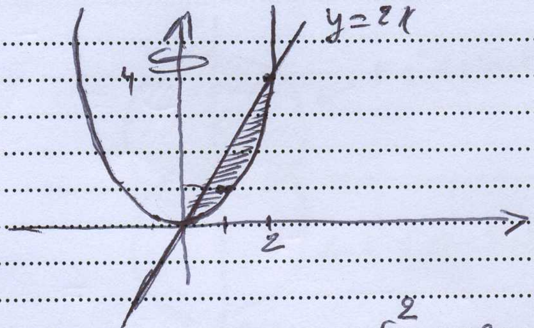
1 $A = \int_{-2}^{1} (x+2)\,dx + \int_{1}^{2} (4-x^2)\,dx$

1 $= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}$

1 $= \frac{9}{2} + \frac{5}{3} = \frac{37}{6}$

(ب) ارسم المنطقة R المحصورة بين المنحنيات $y = x^2$ و $y = 2x$ ثم جد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة R حول المحور (Oy). (4 درجات)

1



1 $V = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx$

1+1 $= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi$

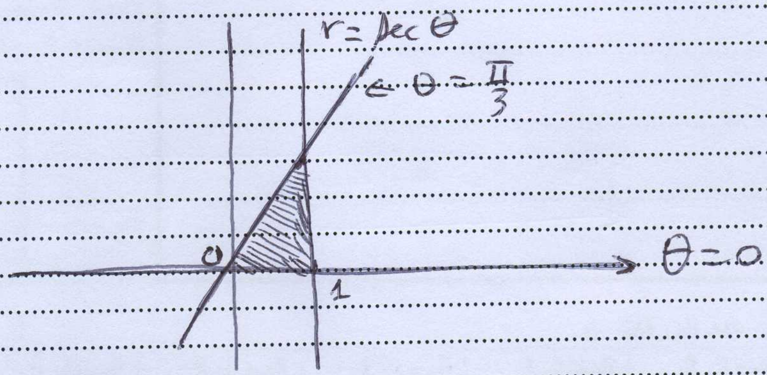
$\boxed{\text{أو}}$

$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{1}{4}y^2\right) dy$

$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{12}y^3\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$

السؤال السادس :

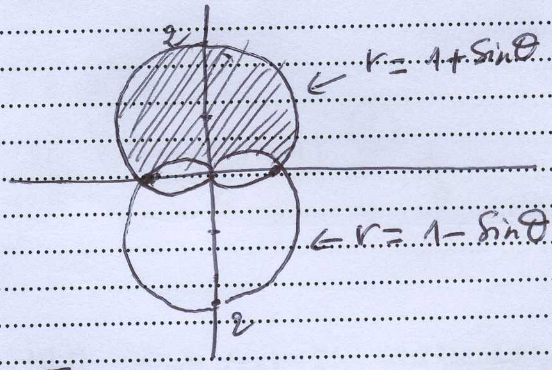
(أ) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $r=\sec\theta$ و $\theta=0$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ ثم جد مساحتها. (3 درجات).



1 $A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sec^2\theta\,d\theta$

1 $=\frac{1}{2}\left[\tan\theta\right]_0^{\pi/3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ب) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r=1+\sin\theta$ وخارج المنحنى $r=1-\sin\theta$ ثم جد مساحتها. (3 درجات)



1 $A=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2\,d\theta\right]$

0,5 $=\int_0^{\pi/2}4\sin\theta\,d\theta$

$=4\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$

0,5 $=4$