جامعة الملك سعود	**كلية العلوم**	**قسم الرياضيات**
الفصل الثاني 1437–1438 هـ/352–ريض/ الاختبار الفصلي الاول/ الزمن: 90 دقيقة		

السؤال الأوّل:[5]

اوجد عدد التكرارت اللازمة للحصول على حل في الفترة $\left[\frac{3}{2},2\right]$ بدقة 10^{-5} للمعادلة $x^3-3x+1=0$ باستخدام طريقة التنصيف.أوجد كذلك الحل التقريبي الثالت والحد الاعلى لخطأ هذا التقريب.

السؤال الثاني: [5])

أوجد اي من المتتاليتين التاليتين

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}[3x_n+1-\frac{x_n^2}{5}] \quad , \; x_{n+1}=x_n+1-\frac{x_n^2}{5}$$

تتقارب أسرع من $\sqrt{5}$. باستخدام هذه المتتالية اوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على دقة 10^{-4} وذلك بوضع $x_0=2$ على الفترة $\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

السؤال الثالث: [5]

لتكن α حل للمعادلة $f(x)=0$ بحيث $f'(\alpha)\neq 0$ و $f''(\alpha)\neq 0$.

اوجد الشروط التي يجب ان يحققها الثابت K بحيث يكون معدل تقارب المتتالية $x_{n+1}=x_n^2-Kf(x_n),\, n\geq 0$ تربيعيا.

السؤال الرابع:[5]

ابتداءا من $(x^0,y^0)=(1,1)$ استخدم طريقة نيوتن لحساب الحل التقريبي الأول للنظام غير الخطي

$$y+xe^y=6$$
$$xy^2-x^3=1$$

السؤال الخامس:[5]

لتكن g دالة تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة . اذا كان $g'(\alpha)=g''(\alpha)=0$ و $g'''(\alpha)\neq 0$ حيث $\alpha=g(\alpha)$. اثبت أن المتتالية $x_n=g(x_{n-1})$ تتقارب من النقطة الثابتة الوحيدة α بمعدل تقارب تكعيبي.

السؤال الاول

← عدد التكرارات اللازمة: $n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}10^5\right)}{\ln(2)} = 15{,}61$

يلزم 16 تكرار (1)

← الحل: $f(3/2) < 0 \quad , \quad f(2) > 0$

$[a_1, b_1] = [3/2, 2] \quad , \quad x_1 = \dfrac{3/2 + 2}{2} = \dfrac{7}{4}$ (1)

$[a_2, b_2] = [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}] \quad f(7/4) > 0 \quad , \quad x_2 = \dfrac{3/2 + 7/4}{2} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$ (1)

$[a_3, b_3] = [\frac{3}{2}, \frac{13}{8}] \quad f(13/8) > 0 \quad , \quad x_3 = \dfrac{3/2 + 13/8}{2} = 1{,}5625$ (1)

(1) الحد الاعلى للخطأ: $|x_3 - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^3} = \dfrac{2 - 3/2}{8} = 0{,}0625$

السؤال الثاني

$g_1(x) = x + 1 - \dfrac{x^2}{5} \quad , \quad g_1'(x) = 1 - \dfrac{2x}{5}$

$g_2(x) = \dfrac{1}{3}\left[3x + 1 - \dfrac{x^2}{5}\right] \quad , \quad g_2'(x) = \dfrac{1}{3}\left[3 - \dfrac{2x}{5}\right]$

$|g_1'(\sqrt{5})| = \left|1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right| = 0{,}1055 \quad , \quad |g_2'(\sqrt{5})| = \left|1 - \dfrac{2\sqrt{5}}{15}\right| = 0{,}7018 < 1$

(1) تتقارب (1)

باستخدام المتتالية $x_{n+1} = g_2(x_n)$ على الفترة $[2, 5/2]$

$k = \max_{x \in (2, 2.5)} |g_1'(x)| = g_1'(2) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ (1)

$x_1 = g_1(x_0) = g_1(2) = \dfrac{11}{5} = 2{,}2$ (1)

السؤال الثالث

$$g(x) = x^2 - K f(x)$$

معدل التقارب تربيعي $\Leftrightarrow$ $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) \neq 0$

$g'(x) = 2x - K f'(x)$ $\Leftrightarrow$ $g'(\alpha) = 2\alpha - K f'(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{K = \dfrac{2\alpha}{f'(\alpha)}}$ الشرط الاول

كذلك $g''(x) = 2 - K f''(x)$, $g''(\alpha) = 2 - K f''(\alpha) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{K \neq \dfrac{2}{f''(\alpha)}}$ الشرط الثاني

السؤال الرابع

$f_1(x,y) = y + xe^y - 6 \longrightarrow f_1(1,1) = -5 + e^1$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = e^y \longrightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) = e^1$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 1 + xe^y \longrightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) = 1 + e^1$

$f_2(x,y) = xy^2 - x^3 - 1 \longrightarrow f_2(1,1) = -1$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = y^2 - 3x^2 \longrightarrow \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) = -2$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 2xy \longrightarrow \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) = 2$

$$J = \begin{pmatrix} e & 1+e \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow J^{-1} = \frac{1}{4e+2}\begin{pmatrix} 2 & -1-e \\ 2 & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4e+2}\begin{pmatrix} 2 & -1-e \\ 2 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5+e \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.36 \\ 1.56 \end{pmatrix}$$

السؤال الخامس

بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الثانية

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x-\alpha)^3$$

حيث أن $\xi \in (x, \alpha)$

بما أن $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ فإنه

$$g(x) = \alpha + \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}(x-\alpha)^3$$

بوضع $x = x_{n-1}$ نجد

$$x_n = g(x_{n-1}) = \alpha + \frac{g^{(3)}(\xi_{n-1})}{6}(x_{n-1}-\alpha)^3$$

$$\rightarrow \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1}-\alpha|^3} = \frac{1}{6}\left|g^{(3)}(\xi_{n-1})\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1}-\alpha|^3} = \frac{1}{6} g^{(3)}(\alpha)$$

بما أن $g^{(3)}(\alpha) \neq 0$ إذا معدل التقارب تكعيبي