382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الثاني 1437 - 1438
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق بن عبدالرحمن محمد الفاضل

أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية

(1) السؤال الأول (سبع درجات)

(i) هات مثالاً لما يلي :

- مجموعة محدودة وغير قابلة للعد .
  الحل : الفترة (a, b) حيث $a < b$ و $a, b \in \mathbb{R}$.
- مجموعة غير خالية A ومحدودة بحيث $\sup(A) \in A$ و $\inf(A) \notin A$.
  الحل : الفترة $A = (a, b]$ حيث $a < b$ و $a, b \in \mathbb{R}$
  $\inf(a) = a \notin (a, b]$ بينما $\sup(A) = b \in (a, b]$

(ii) إذا كانت $A, B \subseteq \mathbb{R}$ مجموعتين غير خاليتين و محدودتين من أسفل وكانت $A \subseteq B$ فأثبت أن $\inf(B) \leq \inf(A)$.

الحل : من تعريف $\inf(B)$ نجد أن $b \geq \inf(B)$ لكل $b \in B$

بما أن $A \subseteq B$ فإن $a \geq \inf(B)$ لكل $a \in A$

أي أن $\inf(B)$ حد سفلي للمجموعة A

وبالتالي $\inf(A) \geq \inf(B)$ لأن $\inf(A)$ أكبر حد سفلي للمجموعة A

(iii) إذا كانت $A, B \subseteq \mathbb{R}$ مجموعتين غير منتهيتين وقابلتين للعد فأثبت أن $A \times B$ مجموعة قابلة للعد .

الحل : أنظر الكتاب .

(2) السؤال الثاني (تسع درجات)

(i) هات مثالاً لما يلي :

- متتالية متقاربة وليست مطردة .
  الحل : المتتالية $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$
- مجموعة غير منتهية وليس لها أي نقطة تراكم .
  الحل : المجموعة $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{Z}$.
- متتالية ليست متقاربة ولها متتالية جزئية من نوع كوشي .
  الحل : المتتالية (x_n) حيث $x_n = \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \dfrac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$

(x_n) غير محدودة وبالتالي ليست متقاربة .

المتتالية الجزئية $(x_{2n}) = \left(\dfrac{1}{2n}\right)$ متقاربة إلى الصفر وبالتالي هي من نوع كوشي .

(ii) إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة فأثبت أن نهايتها وحيدة .

الحل : أنظر الكتاب .

(iii)

- أذكر نص نظرية الحصر للمتتاليات .

الحل : أنظر الكتاب .

- إذا كان $x_n = \left(\dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{\cos(n)}{n+3}\right)^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

أثبت أن $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{\cos(n)}{n+3}\right| \leq \dfrac{3}{4}$

الحل : $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{\cos(n)}{n+3}\right| \leq \left|\dfrac{(-1)^n}{2n}\right| + \left|\dfrac{\cos(n)}{n+3}\right|$

$$= \frac{|(-1)^n|}{|2n|} + \frac{|\cos(n)|}{|n+3|} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

احسب $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$

الحل : لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$|x_n| = \left|\left(\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{\cos(n)}{n+3}\right)^n\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{\cos(n)}{n+3}\right|^n$$

وبالتالي $0 \leq |x_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{2n} + \dfrac{\cos(n)}{n+3}\right|^n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

من نظرية الحصر لمتتاليات $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$

استنتج قيمة $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (مع تبرير الإجابة) .

الحل : نعلم أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Longleftarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

(3) السؤال الثالث (تسع درجات)

(i) إذا كانت (x_n) متتالية تناقصية ومحدودة من أسفل فأثبت أنها متقاربة .

الحل : أنظر الكتاب .

(ii) إذا كان $k > 1$ و $x_1 = 1$ وكان $x_{n+1} = \sqrt{kx_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

- أثبت أن المتتالية (x_n) متزايدة .

الحل : بالاستقراء الرياضي

نثبت صحة العبارة عندما $n = 1$

$$k > 1 \Longrightarrow \sqrt{k} > 1 \Longrightarrow x_2 \geq x_1$$

نفرض صحة العبارة في الحالة n أي $x_n \geq x_{n-1}$

نثبت صحة العبارة في الحالة $n + 1$

$$x_n \geq x_{n-1} \Longrightarrow kx_n \geq kx_{n-1} \Longrightarrow \sqrt{kx_n} \geq \sqrt{kx_{n-1}}$$

أي أن $x_{n+1} \geq x_n$

المتتالية (x_n) متزايدة .

- أثبت أن المتتالية (x_n) محدودة من أعلى .

الحل : نثبت بالاستقراء الرياضي أن $x_n \leq k$ لكل $n \in \mathbb{N}$

نثبت صحة العبارة عندما $n = 1$

$$x_1 \leq k$$

نفرض صحة العبارة في الحالة n أي $x_n \leq k$

نثبت صحة العبارة في الحالة $n + 1$

$$x_n \leq k \Longrightarrow kx_n \leq k^2 \Longrightarrow \sqrt{kx_n} \leq \sqrt{k^2} = |k| = k$$
$$\Longrightarrow x_{n+1} \leq k$$

أي أن $x_n \leq k$ لكل $n \in \mathbb{N}$

وبالتالي المتتالية (x_n) محدودة من أعلى .

بما أن (x_n) متزايدة ومحدودة من أعلى إذاً فهي متقاربة .

- أحسب $\lim_{n\to\infty} x_n$

الحل : نفرض أن $x_n \longrightarrow l$

$$x_{n+1} = \sqrt{kx_n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{kx_n}$$
$$\Longrightarrow l = \sqrt{kl} \Longrightarrow l^2 = kl \Longrightarrow l^2 - kl = 0$$
$$\Longrightarrow l(l-k) = 0 \Longrightarrow l = k \ , \ l = 0$$

لاحظ أن $l = 0$ مرفوض لأن $1 \leq x_n \leq k$ لكل $n \in \mathbb{N}$

إذاً $\lim_{n\to\infty} x_n = k$

(iii) إذا كانت (x_n) متتالية من نوع كوشي فأثبت أنها محدودة .

الحل : أنظر الكتاب .

(iv) إذا كانت $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت المتتالية $((-1)^n x_n)$ متقاربة :

- أثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة .

الحل : ضع $y_n = (-1)^n x_n$

$x_n = |x_n| = |(-1)^n x_n| = |y_n|$ ، لاحظ أن $x_n = |x_n| \Longrightarrow x_n \geq 0$.
نعلم أن المتتالية (y_n) متقاربة $\Longleftarrow$ المتتالية $(|y_n|)$ متقاربة
وبالتالي المتتالية (x_n) متقاربة

- أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

الحل : لنفرض أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$
بما أن المتتالية (y_n) متقاربة فإن جميع متتالياتها الجزئية متقاربة ولنفس النهاية .
$y_{2n} = x_{2n} \longrightarrow l$ و $y_{2n-1} = -x_{2n-1} \longrightarrow -l$
$l = -l \Longrightarrow l = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الثاني 1437 - 1438
حل الاختبار النهائي
د. طارق بن عبدالرحمن محمد الفاضل

أجب عن الأسئلة الخمسة التالية

(1) السؤال الأول (6 درجات) :

(1) اذكر نص نظرية بولزانو - فايرشتراس

الحل : كل مجموعة غير منتهية ومحدودة لها نقطة تراكم واحدة على الأقل .

(2) أعط مثالاً لمتتالية ليس لها أي متتالية جزئية متقاربة .

الحل : المتتالية التي حدها النوني هو $x_n = n$.

(3) إذا كان $0 < a < b$ فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$

الحل : $b^n < a^n + b^n < b^n + b^n = 2b^n$

$$b = \sqrt[n]{b^n} < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2b^n} = b\sqrt[n]{2} = b\,(2)^{\frac{1}{n}}$$

لاحظ أن $\lim\limits_{n\to\infty} b\,(2)^{\frac{1}{n}} = b\,(1) = b$

أيضاً $\lim\limits_{n\to\infty} b = b$

من نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$

(4) إذا كانت $x_n \geq 0$ و $x_{n+1} < \dfrac{1}{2}x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

- أثبت أن المتتالية (x_n) تناقصية فعلاً ومحدودة من أسفل .

  الحل : لكل $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} < \dfrac{1}{2}x_n < x_n$

  أي أن المتتالية (x_n) تناقصية فعلاً

  لكل $n \in \mathbb{N}$: $x_n \geq 0$

  أي أن المتتالية (x_n) محدودة من أسفل بالعدد 0

- أثبت أن $x_{n+1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n x_1$ لكل $n \in \mathbb{N}$

  الحل : بالاستقراء الرياضي

  لاحظ أن $x_2 < \dfrac{1}{2}x_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 x_1$ ، أي أن العبارة صحيحة في الحالة $k = 1$

  نفرض أن العبارة صحيحة في الحالة $k = n$ ، أي أن $x_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} x_1$

  نثبت صحة العبارة في الحالة $k = n + 1$

$$x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} x_1$$

- احسب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

الحل : لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $0 \le x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x_1$

لاحظ أن $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x_1 = (0)x_1 = 0$

من نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

(2) السؤال الثاني (9 درجات) :

(1) أعط مثالاً لدالتين مختلفتين f و g ونقطة c بحيث $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة و $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ غير موجودة ، بينما $\lim\limits_{x\to c} (f+g)(x)$ موجودة

الحل : $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \ge 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة .

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \ge 0 \\ 2 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة .

$$\lim_{x\to 0} (f+g)(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

(2) لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ فأثبت أن لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \longrightarrow c$ فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها l .

الحل : انظر الكتاب

(3) بين أن $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{2x}\right)$ غير موجودة .

الحل : ضع $x_n = \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$ و $y_n = \frac{1}{2(0+2n\pi)} = \frac{1}{4n\pi}$

لاحظ أن $x_n \neq 0$ و $x_n \longrightarrow 0$ ايضاً $y_n \neq 0$ و $y_n \longrightarrow 0$

$$\sin\left(\frac{1}{2x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \longrightarrow 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{2y_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \longrightarrow 0$$

أي أن $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{2x}\right)$ غير موجودة .

(4) لتكن $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة متزايدة فعلاً وليست محدودة من أعلى ، أثبت أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$

الحل : نريد أثبات أن لكل $M>0$ توجد $\delta>0$ بحيث
$$x\in(a,b)\ ,\ 0<b-x<\delta\Longrightarrow f(x)>M$$
لتكن $M>0$ ، بما أن f ليست محدودة من أعلى على (a,b) إذاً يوجد $x_0\in(a,b)$ بحيث يكون $f\left(x_0\right)>M$
ضع $\delta=b-x_0$ عندئذ $\delta>0$
لكل $x\in\left(x_0,b\right)$ فإن $0<b-x<\delta$ و $x>x_0$ ، وبما أن f تزايدية فعلاً على (a,b) فإن $f(x)>f\left(x_0\right)$
$$x\in(a,b)\ ,\ 0<b-x<\delta\Longrightarrow x>x_0\Longrightarrow f(x)>f\left(x_0\right)>M$$
أي أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$

(3) السؤال الثالث (7 درجات) :

(1) افرض أن $f\ :\ D\longrightarrow\mathbb{R}$ و $g\ :\ E\longrightarrow\mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D)\subseteq E$. إذا كانت f متصلة عند $c\in D$ و g متصلة عند $f(c)$ فأثبت أن $g\circ f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة عند c .

الحل : انظر الكتاب

(2) إذا كانت $f\ :\ I\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة متصلة و I فترة مغلقة ومحدودة فأثبت وجود $x_0\in I$ بحيث $f\left(x_0\right)=m=\inf(f(I))$

الحل : لكل $n\in\mathbb{N}$ توجد $x_n\in I$ بحيث $m\leq f\left(x_n\right)<m+\dfrac{1}{n}$
أي أن المتتالية $\left(f\left(x_n\right)\right)$ متقاربة و $f\left(x_n\right)\longrightarrow m$
بما أن $\left(x_n\right)$ متتالية في I و I فترة محدودة فإنه توجد متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ متقاربة ، أي أن $x_{n_k}\longrightarrow x_0$
بما أن I فترة مغلقة فإن $x_0\in I$
بما أن f دالة متصلة على I و $x_{n_k}\longrightarrow x_0$ فإن $f\left(x_{n_k}\right)\longrightarrow f\left(x_0\right)$
المتتالية $\left(f\left(x_{n_k}\right)\right)$ هي متتالية جزئية من المتتالية المتقاربة $\left(f\left(x_n\right)\right)$ وبالتالي كلاهما متقاربتان لنفس النهاية .
أي أن $f\left(x_0\right)=\lim\limits_{n_k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=m$

(3) اذكر نص نظرية القيمة البينية .

الحل : إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة متصلة وكان λ عدداً حقيقياً يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث يكون $f(c)=\lambda$

أثبت أن للمعادلة $x2^x=1$ حلاً في $\mathbb{R}$

الحل : عرف الدالة $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ كالتالي $f(x)=x2^x-1$
الدالة متصلة على الفترة $[0,1]$
$f(0)=0-1=-1<0$ و $f(1)=2-1=1>0$ أي أن $f(0)<0<f(1)$
من نظرية القيمة البينية يوجد $c\in(0,1)$ يحقق $f(c)=0$
$$f(c)=0\Longrightarrow c2^c-1=0\Longrightarrow c2^c=1$$

أي أن $c \in (0,1)$ حلاً حقيقياً للمعادلة $x2^x = 1$

(4) السؤال الرابع (8 درجات) :

(1) بين أن الدالة $f(x) = \ln x$ ليست متصلة بانتظام على الفترة $(0,1)$.

الحل : ضع $x_n = e^{-n}$ و $t_n = e^{-(n+1)}$

المتتاليتان (x_n) و (t_n) تقعان في $(0,1)$

$$|x_n - t_n| = \left|e^{-n} - e^{-(n+1)}\right| \longrightarrow |0-0| = 0$$

$$|\ln x_n - \ln t_n| = \left|\ln e^{-n} - \ln e^{-(n+1)}\right| = |-n-(-(n+1))| = |1| = 1 \longrightarrow 1 \nrightarrow 0$$

إذاً الدالة $f(x) = \ln x$ ليست متصلة بانتظام على $(0,1)$.

(2) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة بانتظام على D وكانت (x_n) متتالية في D من نوع كوشي فأثبت أن المتتالية $(f(x_n))$ من نوع كوشي .

الحل : انظر الكتاب .

(3) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكانت D مجموعة متراصة ، فأثبت أن المجموعة $f(D)$ متراصة .

الحل : انظر الكتاب .

(4) إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة ، فأثبت أن $\{x \in \mathbb{R} : 1 < f(x) < 2\}$ مجموعة مفتوحة .

الحل : $\{x \in \mathbb{R} : 1 < f(x) < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (1,2)\} = f^{-1}((1,2))$

بما أن $(1,2)$ مجموعة مفتوحة و f دالة متصلة فإن الصورة العكسية لمجموعة مفتوحة هي أيضاً مجموعة مفتوحة.

أي أن $\{x \in \mathbb{R} : 1 < f(x) < 2\} = f^{-1}((1,2))$ مجموعة مفتوحة .

(5) السؤال الخامس (10 درجات) :

(1) اذكر نص نظرية القيمة المتوسطة وبرهنها .

الحل : إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) فإنه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان : انظر الكتاب

(2) أثبت أن $\left|\tan^{-1} x - \tan^{-1} y\right| \le |x-y|$ لكل $x, y \in \mathbb{R}$.

الحل : لتكن $x, y \in \mathbb{R}$ و $x \ne y$

الدالة $\tan^{-1} x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة الواقعة بين x و y .

أي أنه يوجد c في تلك الفترة يحقق $\dfrac{1}{1+c^2} = \dfrac{\tan^{-1}x - \tan^{-1}y}{x-y}$

لكل $c \in \mathbb{R}$ فإن $\dfrac{1}{1+c^2} \leq 1 \Longleftarrow c^2+1 \geq 1$

$$\left|\frac{\tan^{-1}x - \tan^{-1}y}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{1+c^2}\right| = \frac{1}{1+c^2} \leq 1$$

$$\frac{\left|\tan^{-1}x - \tan^{-1}y\right|}{|x-y|} \leq 1 \Longrightarrow \left|\tan^{-1}x - \tan^{-1}y\right| \leq |x-y|$$

(3) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق و $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$ فأثبت أن الدالة f متزايدة فعلاً على $[a,b]$

الحل : لتكن $x,y \in [a,b]$ و $x < y$

الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[x,y]$

أي أنه يوجد $c \in (x,y)$ يحقق $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) > 0$

بما أن $x < y$ فإن $y - x > 0$ وبالتالي $f(y) - f(x) > 0$ أي أن $f(y) > f(x)$

أي أن الدالة f متزايدة فعلاً على الفترة $[a,b]$

(4) إذا كانت $r \in \mathbb{Q}$ و $r > 1$ فأثبت أن $(1+x)^r > 1 + rx$ لكل $x > 0$

الحل : ضع $f(x) = (1+x)^r - (1+rx)$

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = r\left[(1+x)^{r-1} - 1\right]$$

لكل $x > 0$ فإن $1 + x > 1$ ، وبما أن $r > 1$ أي $r - 1 > 0$ فإن $(1+x)^{r-1} > 1$

وبالتالي $f'(x) = r\left[(1+x)^{r-1} - 1\right] > 0$

أي أن الدالة f تزايدية فعلاً على الفترة $[0,\infty)$ وبالتالي $f(x) > f(0) = 0$

$(1+x)^r - (1+rx) > 0$ ، أي أن $(1+x)^r > 1 + rx$ لكل $x > 0$