382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الأول 1438 - 1439
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية

(1) السؤال الأول (سبع درجات)

(i) هات مثالاً لما يلي :

- مجموعتان غير منتهيتان A و B بحيث $A \subset B$ و $A \sim B$.
  الحل : $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{Q}$
  أو $A = (0,1)$ و $B = \mathbb{R}$
- مجموعة A غير خالية و $\inf(A) = -\infty$ و $\sup(A) = \max(A)$.
  الحل : $A = (-\infty, a]$ حيث $a \in \mathbb{R}$

(ii) أثبت أن مجموعة الأعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ كثيفة .
الحل : انظر الكتاب .

(iii) أثبت أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد .
الحل : انظر الكتاب .

(2) السؤال الثاني (عشر درجات)

(i) هات مثالاً لما يلي :

- متتالية مطردة وليست متقاربة .
  الحل : $(x_n) = (n)$ أو $(x_n) = (-n)$
- مجموعة A قابلة للعد بينما $\hat{A}$ غير قابلة للعد .
  الحل : $A = \mathbb{Q} \implies \hat{A} = \mathbb{R}$
- متتالية ليست متقاربة ولها متتالية جزئية محدودة .
  الحل : المتتالية $(x_n) = ((-1)^n)$
  أو المتتالية التي حدها النوني

$$x_n = \begin{cases} n & , \quad n \in \mathbb{N}_1 \\ \dfrac{1}{n} & , \quad n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

(ii) إذا كانت المتتاليتان (x_n) و (y_n) متقاربتين ، فأثبت باستخدام التعريف أن المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة .
الحل : انظر الكتاب .

(iii) أذكر نص نظرية الحصر للمتتاليات وبرهنها .
الحل : انظر الكتاب .

(iv) إذا كان $0 < a < b$ فأثبت أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

الحل : $b^n \leq a_n + b^n \leq b^n + b^n = 2b^n$

$$\sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n}$$

$$b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2}\, b = 2^{\frac{1}{n}} b$$

لاحظ أن $\lim_{n\to\infty} b = b$

أيضاً $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} b = (1)b = b$

من نظرية الحصر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$

(3) السؤال الثالث (ثمان درجات)

(i) إذا كانت $a_i \geq 0$ لكل $i \in \mathbb{N}$ وكانت $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ لكل $n \in \mathbb{N}$:

- أثبت أن المتتالية (x_n) تزايدية .
الحل : لكل $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} \geq 0$$

إذاً المتتالية (x_n) تزايدية .

- إذا كانت $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت المتتالية (y_n) متقاربة ، فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة .
الحل : بما أن المتتالية (y_n) متقاربة فهي محدودة .
أي يوجد عدداً حقيقياً $M > 0$ بحيث يكون $|y_n| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x_n \leq y_n = |y_n| \leq M$.
أي أن المتتالية (x_n) محدودة من أعلى وبالتالي فهي متقاربة .

(ii) إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة فأثبت أنها من نوع كوشي .
الحل : انظر الكتاب .

(iii) لتكن (x_n) متتالية ما و متتالياتها الجزئية (x_{2n}) ، (x_{2n+1}) ، (x_{3n}) متقاربة ، أثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة.
الحل : لنفرض أن

$x_{2n} \longrightarrow l_1$ و $x_{2n+1} \longrightarrow l_2$ و $x_{3n} \longrightarrow l_3$

يكفي أن نثبت أن $l_1 = l_2$

المتتالية (x_{6n}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{2n})
وبالتالي $x_{6n} \longrightarrow l_1$
المتتالية (x_{6n}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{3n})
وبالتالي $x_{6n} \longrightarrow l_3$
من وحدانية نهاية المتتالية فإن $l_1 = l_3$
المتتالية (x_{6n+3}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{2n+1})
وبالتالي $x_{6n+3} \longrightarrow l_2$
المتتالية (x_{6n+3}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{3n})
وبالتالي $x_{6n+3} \longrightarrow l_3$
من وحدانية نهاية المتتالية فإن $l_2 = l_3$
إذاً $l_1 = l_3 = l_2 \implies l_1 = l_2$
وبالتالي المتتالية (x_n) متقاربة و $x_n \longrightarrow l_1 = l_2$