382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الأول 1438 - 1439
حل الاختبار الفصلي الأول
د. طارق بن عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية

(1) السؤال الأول (سبع درجات)

(i) هات مثالاً لما يلي :

- مجموعتان غير منتهيتان A و B بحيث $A \subset B$ و $A \sim B$.
  الحل : $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{Q}$
  أو $A = (0, 1)$ و $B = \mathbb{R}$
- مجموعة A غير خالية و $\inf(A) = -\infty$ و $\sup(A) = \max(A)$.
  الحل : $A = (-\infty, a]$ حيث $a \in \mathbb{R}$

(ii) أثبت أن مجموعة الأعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ كثيفة .
الحل : انظر الكتاب .

(iii) أثبت أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد .
الحل : انظر الكتاب .

(2) السؤال الثاني (عشر درجات)

(i) هات مثالاً لما يلي :

- متتالية مطردة وليست متقاربة .
  الحل : $(x_n) = (n)$ أو $(x_n) = (-n)$
- مجموعة A قابلة للعد بينما $\hat{A}$ غير قابلة للعد .
  الحل : $A = \mathbb{Q} \implies \hat{A} = \mathbb{R}$
- متتالية ليست متقاربة ولها متتالية جزئية محدودة .
  الحل : المتتالية $(x_n) = ((-1)^n)$
  أو المتتالية التي حدها النوني

$$x_n = \begin{cases} n & , \quad n \in \mathbb{N}_1 \\ \dfrac{1}{n} & , \quad n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

(ii) إذا كانت المتتاليتان (x_n) و (y_n) متقاربتين ، فأثبت باستخدام التعريف أن المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة .
الحل : انظر الكتاب .

(iii) أذكر نص نظرية الحصر للمتتاليات وبرهنها .
الحل : انظر الكتاب .

(iv) إذا كان $0 < a < b$ فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

الحل : $b^n \le a_n + b^n \le b^n + b^n = 2b^n$

$$\sqrt[n]{b^n} \le \sqrt[n]{a^n + b^n} \le \sqrt[n]{2b^n}$$

$$b \le \sqrt[n]{a^n + b^n} \le \sqrt[n]{2}\, b = 2^{\frac{1}{n}} b$$

لاحظ أن $\lim\limits_{n\to\infty} b = b$

أيضاً $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} b = (1)b = b$

من نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$

(3) السؤال الثالث (ثمان درجات)

(i) إذا كانت $a_i \ge 0$ لكل $i \in \mathbb{N}$ وكانت $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ لكل $n \in \mathbb{N}$:

- أثبت أن المتتالية (x_n) تزايدية .
  الحل : لكل $n \in \mathbb{N}$
  $$x_{n+1} - x_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} \ge 0$$
  إذاً المتتالية (x_n) تزايدية .
- إذا كانت $x_n \le y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت المتتالية (y_n) متقاربة ، فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة .
  الحل : بما أن المتتالية (y_n) متقاربة فهي محدودة .
  أي يوجد عدداً حقيقياً $M > 0$ بحيث يكون $|y_n| \le M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
  لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x_n \le y_n = |y_n| \le M$.
  أي أن المتتالية (x_n) محدودة من أعلى وبالتالي فهي متقاربة .

(ii) إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة فأثبت أنها من نوع كوشي .
الحل : انظر الكتاب .

(iii) لتكن (x_n) متتالية ما و متتالياتها الجزئية (x_{2n}) ، (x_{2n+1}) ، (x_{3n}) متقاربة ، أثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة.
الحل : لنفرض أن

$x_{2n} \longrightarrow l_1$ و $x_{2n+1} \longrightarrow l_2$ و $x_{3n} \longrightarrow l_3$

يكفي أن نثبت أن $l_1 = l_2$

المتتالية (x_{6n}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{2n})

وبالتالي $x_{6n} \longrightarrow l_1$

المتتالية (x_{6n}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{3n})

وبالتالي $x_{6n} \longrightarrow l_3$

من وحدانية نهاية المتتالية فإن $l_1 = l_3$

المتتالية (x_{6n+3}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{2n+1})

وبالتالي $x_{6n+3} \longrightarrow l_2$

المتتالية (x_{6n+3}) هي متتالية جزئية من المتتالية (x_{3n})

وبالتالي $x_{6n+3} \longrightarrow l_3$

من وحدانية نهاية المتتالية فإن $l_2 = l_3$

إذاً $l_1 = l_3 = l_2 \implies l_1 = l_2$

وبالتالي المتتالية (x_n) متقاربة و $x_n \longrightarrow l_1 = l_2$

382 ريض - التحليل الحقيقي (1)
الفصل الدراسي الأول 1438 - 1439
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق بن عبدالرحمن محمد الفاضل

أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية

(1) السؤال الأول (عشر درجات)

(i) • أعط مثالاً لدالة f و نقطة c بحيث تكون $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^2$ موجودة بينما $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة.

الحل : الدالة $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x\geq 0 \\ -1 & , \quad x<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^2=1$ بينما $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة .

• بين أن $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ غير موجودة .

الحل : لتكن $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

خذ المتتالية التي حدها $x_n=2+\dfrac{1}{n}$

لاحظ أن $x_n\longrightarrow 2$ و $x_n\neq 2$ لكل $n\in\mathbb{N}$

$$f\left(x_n\right)=\frac{1}{x_n-2}=\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)-2}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$$

أي أن المتتالية $(f\left(x_n\right))$ غير محدودة وبالتالي ليست متقاربة .

إذاً $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ غير موجودة .

(ii) إذا كانت $f\,:\,D\longrightarrow\mathbb{R}$ و $c\in\hat{D}$ وكانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$ فأثبت أن لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n\longrightarrow c$ فإن $f\left(x_n\right)\longrightarrow l$.

الحل : انظر الكتاب .

(iii) إذا كانت $f\,:\,\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة متزايدة و $f(x)=ax$ لكل $x\in\mathbb{Q}$ حيث $a\in\mathbb{R}$ فأثبت أن $f(x)=ax$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

الحل : لتكن $c\in\mathbb{R}$

من كثافة المجموعة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}$ بحيث $x_n\longrightarrow c$ و $x_n>c$ لكل $n\in\mathbb{N}$

وتوجد متتالية (y_n) في $\mathbb{Q}$ بحيث $y_n\longrightarrow c$ و $y_n<c$ لكل $n\in\mathbb{N}$

أي أن $y_n<c<x_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$

بما أن الدالة f متزايدة فإن $f\left(y_n\right)\leq f(c)\leq f\left(x_n\right)$

وبالتالي $ay_n\leq f(c)\leq ax_n$

بأخذ النهاية عندما $n \longrightarrow \infty$ نحصل على $ac \leq f(c) \leq ac$ ومن ثم $f(c) = ac$
أي أن $f(x) = ax$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(iv) إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l > 0$ و $g(x) > 0$ لكل $x > 0$
فأثبت أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longleftarrow \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

الحل : لإثبات أن $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ يجب إثبات أن لكل $M > 0$ يوجد $N > 0$ بحيث يتحقق

$$x > N \implies g(x) > M$$

بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l > 0$ فبوضع $\epsilon = \dfrac{l}{2} > 0$ فإنه يوجد $N_1 > 0$ بحيث

$$x > N_1 \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \epsilon = \frac{l}{2} \implies \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2} \implies \frac{2}{3l}\, f(x) < g(x)$$

الآن لتكن $M > 0$ بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ فإنه يوجد $N_2 > 0$ بحيث

$$x > N_2 \implies f(x) > \frac{3l}{2} M$$

بوضع $N = \max\{N_1, N_2\}$ فإنه

$$x > N \implies g(x) > \frac{2}{3l}\, f(x) > \frac{2}{3l}\,\frac{3l}{2}\, M = M$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

(2) السؤال الثاني (سبع درجات)

(i) أعط مثالاً لما يلي :

- دالتين أحدهما غير متصلة عند c ولكن تحصيلهما دالة متصلة عند c .

الحل : الدالة $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$ غير متصلة عند $c = 0$ والدالة $g(x) = |x|$ متصلة عند $c = 0$

$(g \circ f)(x) = 1$ متصلة عند $c = 0$

- دالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق قيمتها العظمى فقط على D .

الحل : $f(x) = x$ على $D = (0, 1]$ تحقق قيمتها العظمى فقط وهي $f(1) = 1$.

حل آخر : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ على $D = \mathbb{R}$ تحقق قيمتها العظمى فقط وهي $f(0) = 1$

(ii) إذا كانت الدالة f تحقق $|f(x)| \leq |x|^2$ لكل $x \in (-1, 1)$ فأثبت أن الدالة f متصلة عند الصفر .

الحل : $0 \leq |f(0)| \leq |0|^2 = 0$ وبالتالي $f(0) = 0$

لاحظ أن $0 \leq |f(x)| \leq |x|^2$ لكل $x \in (-1, 1)$

$\lim_{x\to 0} 0 = 0$ و $\lim_{x\to 0} |x|^2 = 0$

من نظرية الحصر للدوال فإن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

وبالتالي الدالة f متصلة عند $x = 0$.

(iii) إذا كانت الدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة و I فترة مغلقة ومحدودة فأثبت أن $f(I)$ مجموعة محدودة .

الحل : انظر الكتاب .

(3) السؤال الثالث (ثمان درجات)

(i) إذا كانت الدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة و I فترة مغلقة ومحدودة فأثبت أن الدالة f تحقق قيمتها العظمى على I .

الحل : انظر الكتاب .

(ii)

- أذكر نص نظرية القيمة البينية .

  الحل : انظر الكتاب .

- إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$ وكانت $f(x_1) = x_2$ و $f(x_2) = x_1$ فأثبت وجود $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $f(x_0) = x_0$.

  الحل : عرف الدالة $h : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ كالتالي $h(x) = f(x) - x$

  الدالة h متصلة على الفترة $[x_1, x_2]$

  $h(x_1) = f(x_1) - x_1 = x_2 - x_1 > 0$

  $h(x_2) = f(x_2) - x_2 = x_1 - x_2 < 0$

  أي أن $h(x_2) < 0 < h(x_1)$

  من نظرية القيمة البينية يوجد $x_0 \in (x_1, x_2)$ بحيث يكون $h(x_0) = 0$

  وبالتالي $f(x_0) - x_0 = 0 \implies f(x_0) = x_0$

(iii) إذا كانت $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة وتحقق $f(x) > 0$ لكل $x \in [a,b]$ أثبت وجود $k > 0$ بحيث يكون $f(x) > k$ لكل $x \in [a,b]$.

الحل : بما أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ فإن f تحقق قيمتها الصغرى m عند نقطة ما $x_0 \in [a,b]$.

أي أن $f(x) \geq f(x_0) = m$ لكل $x \in [a,b]$

بما أن $f(x) > 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن $f(x_0) = m > 0$

ضع $k = \dfrac{m}{2}$ عندئذ $k > 0$ و $f(x) \geq f(x_0) = m > k > 0$ لكل $x \in [a,b]$

أي أن $f(x) > k > 0$ لكل $x \in [a,b]$