جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

382 ريض
التحليل الحقيقي (1)
مسودة محاضرات
الفصل الثاني 1438 – 1437

د طارق عبدالرحمن الفاضل
أستاذ مشارك بقسم الرياضيات
e − mail : alfadhel@ksu.edu.sa
url : http://fac.ksu.edu.sa/alfadhel

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

المرجع الرئيس للمقرر 382ريض (التحليل الحقيقي 1) هو كتاب مبادئ التحليل الحقيقي (الجزء الأول) للمؤلفين د. محمد بن عبدالرحمن القويز و د. صالح بن عبدالله السنوسي .

هذه المسودة تحوي التعاريف ونصوص النظريات والأمثلة ، والغرض منها اختصار الوقت والتركيز بشكل أكبر على براهين النظريات وحلول الأمثلة .

المحتويات

باب 1

بعض المفاهيم الأساسية

1.1 المنطق

2.1 المجموعات

3.1 الدوال

سبق دراستها في مقرر 131 ريض

باب 2

الأعداد الحقيقية

1.2 مسلمات الحقل

سبق دراسته

2.2 مسلمات الترتيب

سبق دراسته

3.2 الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية

نظرية (خاصية الترتيب التام للمجموعة $\mathbb{N}$) :
كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر .
أي إذا كانت $S \subset \mathbb{N}$ ، $S \neq \phi$ ، فإن هنالك $m \in S$ بحيث $m \leq n$ لكل $n \in S$.
في هذه الحالة $m = min\{S\}$.
البرهان :

تعريف (مجموعة الأعداد النسبية) :
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \, , \, b \in \mathbb{Z}^*\}$

نظرية :
لا يوجد عدد $x \in \mathbb{Q}$ يحقق المعادلة $x^2 = 2$.
البرهان :

ملاحظة : إذا كان p عدداً أولياً فإن $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

4.2 مسلمة التمام

تعريف : إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية

(1) نقول أن $b \in \mathbb{R}$ حداً علوياً للمجموعة A إذا كان $a \leq b$ لكل $a \in A$.

نقول أن المجموعة A محدودة من أعلى إذا كان لها حداً علوياً .

(2) نقول أن $c \in \mathbb{R}$ حداً سفلياً للمجموعة A إذا كان $a \geq c$ لكل $a \in A$.

نقول أن المجموعة A محدودة من أسفل إذا كان لها حداً سفلياً .

(3) نقول أن المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من أعلى و محدودة من أسفل (أي لها حد علوي ولها حد سفلي) .

أي يوجد $b, c \in \mathbb{R}$ بحيث $c \leq a \leq b$ لكل $a \in A$

تعريف : لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية

(1) نقول أن $b \in \mathbb{R}$ حداً علوياً أصغر للمجموعة A إذا تحقق الشرطين :

(أ) $a \leq b$ لكل $a \in A$.

(ب) إذا كان u حداً علوياً آخر للمجموعة A فإن $b \leq u$.

(2) نقول أن $c \in \mathbb{R}$ حداً سفلياً أكبر للمجموعة A إذا تحقق الشرطين :

(أ) $a \geq c$ لكل $a \in A$.

(ب) إذا كان u حداً سفلياً آخر للمجموعة A فإن $c \geq u$.

ملاحظة : من التعريف السابق

(1) $b = sup(A)$ أصغر حد علوي للمجموعة A .

(2) $c = inf(A)$ أكبر حد سفلي للمجموعة A .

(3) أصغر حد علوي لمجموعة ما وحيد (متى ما وجد) .

(4) أكبر حد سفلي لمجموعة ما وحيد (متى ما وجد) .

(5) إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية وليست محدودة من أعلى فإن $sup(A) = \infty$.

(5) إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية وليست محدودة من أسفل فإن $inf(A) = -\infty$.

مثال : أحسب $sup(A)$ و $inf(A)$ للتالي :

(1) A هي أحد الجموعات $[a, b]$ ، $(a, b]$ ، $[a, b)$ ، (a, b) .

(2) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

تمهيد : إذا كانت $-A = \{-x : x \in A\}$ فإن
المجموعة A محدودة من أسفل $\Leftrightarrow$ المجموعة $-A$ محدودة من أعلى
أيضاً $inf(A) = -sup(-A)$

مسلمة التمام :

(1) إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية ومحدودة من أعلى فإن لها حداً علوياً أصغر في $\mathbb{R}$.

(2) إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية ومحدودة من أسفل فإن لها حداً سفلياً أكبر في $\mathbb{R}$.

نظرية (نظرية أرخميدس) :
المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى .
البرهان :

نتيجة (خاصية أرخميدس) :
لكل عدد حقيقي موجب $x > 0$ ، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $x > \frac{1}{n}$.
البرهان :

ملاحظات :

(1) إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $x < \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x \leq 0$.

(2) إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $0 \leq x < \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x = 0$.

(3) إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ و $x < y + \epsilon$ لكل $\epsilon > 0$ فإن $x \leq y$.

(4) إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $|x| < \epsilon$ لكل $\epsilon > 0$ فإن $x = 0$.

نتيجة :
لكل عدد حقيقي غير سالب $x \geq 0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n - 1 \leq x < n$.
البرهان :

نظرية (كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$) :
كل فترة مفتوحة تحتوي عدداً نسبياً .
أي إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ و $x < y$ يوجد $q \in \mathbb{Q}$ بحيث $x < q < y$.
البرهان :

ملاحظة : أي فترة مفتوحة تحتوي على عدد لا نهائي من عناصر $\mathbb{Q}$.

نظرية (كثافة الأعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$) :
إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ و $x < y$ فإنه يوجد عدد غير نسبي $r \in \mathbb{Q}^c$ بحيث $x < r < y$.
البرهان :

المفكوك العشري للأعداد الحقيقية :
لكل عدد حقيقي موجب x يوجد عدد صحيح غير سالب x_0 وأعداد $x_1, x_2, x_3, \cdots$ في المجموعة $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ بحيث

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^n}$$ لكل $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ونكتب $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$
نسمي $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ المفكوك العشري للعدد x .

ملاحظات :

(1) إذا كان لعددين حقيقيين نفس المفكوك العشري فإن العددين متساويان .

(2) لكل عدد حقيقي موجب مفكوك عشري وحيد .

تمارين

(1) احسب $\sup(A)$ و $\inf(A)$ إن وجدا فيما يلي :

(i) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 > 0\right\}$

(ii) $A = \left\{1 - \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(iii) $A = \mathbb{Q}$

(iv) $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$

(v) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \pi\right\}$

(2) إذا كان b حداً علوياً للمجموعة A فأثبت أن

$b = \sup(A)$ إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث $a > b - \epsilon$.

اكتب وأثبت نتيجة مماثلة للحالة $\inf(A)$.

(3) إذا كانت A و B مجموعتين محدودتين من أعلى و $A \subseteq B$

فأثبت أن $\sup(A) \leq \sup(B)$

اكتب وأثبت نتيجة مماثلة للحالة $\inf(A)$.

(4) إذا كانت A و B محدودتين من أعلى فأثبت أن $A \cup B$ محدودة من أعلى وأن

$\sup(A \cup B) = max\{\sup(A), \sup(B)\}$

اكتب وأثبت نتيجة مماثلة للحالة $\inf(A \cup B)$.

(5) إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$

نعرف $A + B = \{a + b : a \in A\ ,\ b \in B\}$

أثبت أن $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

متى كانت A و B محدودتين من أعلى .

اكتب وأثبت نتيجة مماثلة للحالة $\inf(A + B)$.

(6) لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ، $k \in \mathbb{R}$ ولنعرف $kA = \{ka : a \in A\}$

إذا كانت A محدودة من أعلى و $k > 0$ فأثبت أن $\sup(kA) = k\ \sup(A)$.

ناقش الحالة عندما $k \leq 0$.

(7) إذا كانت $x > 0$ فأثبت أن لكل $y \in \mathbb{R}$ توجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $nx > y$.

(8) استخدم المفكوك العشري لتثبت كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

5.2 المجموعات القابلة للعد

تعريف :
نقول أن المجموعتين A و B متكافئتان إذا وجدت دالة تقابل من A إلى B .
نرمز لذلك بالرمز $A \sim B$

نظرية : لأي ثلاث مجموعات A ، B ، C فإن
(1) $A \sim A$.
(2) $A \sim B \implies B \sim A$.
(3) $A \sim B \, , \, B \sim C \implies A \sim C$

البرهان :

تعريف :
نقول أن المجموعة A منتهية إذا كانت خالية أو وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$.

مثال :
إذا كانت $\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \cdots\}$ و $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \cdots\}$ فإن المجموعات $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}_1$ ، $\mathbb{N}_2$ متكافئة كلها .

مثال :
المجموعتان $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ متكافئتان .

تعريف :
نقول أن المجموعة A قابلة للعد إذا كانت منتهية أو كانت مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

ملاحظة :
المجموعات $\mathbb{N}_1$ و $\mathbb{N}_2$ و $\mathbb{Z}$ كلها مجموعات قابلة للعد .

تمهيد :
كل مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية قابلة للعد .
البرهان :

نظرية :
كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي أيضاً قابلة للعد .
البرهان :

نظرية :
إذا كانت كل من A و B قابلة للعد فإن $A \times B$ قابلة للعد .
البرهان :

نظرية :
إذا كانت المجموعة A_n لكل $n \in \mathbb{N}$ قابلة العد ، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ قابلة للعد .

البرهان :

نظرية :
المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد .
البرهان :

نظرية :
المجموعة $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد .
البرهان :

نتيجة :
مجموعة الأعداد غير النسبية $\mathbb{Q}^c$ غير قابلة للعد .

تمارين

(1) أثبت أن $(0,1) \sim (a,b)$.

(2) أثبت أن $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

(3) أثبت أن الفترات $(0,1)$ و $[0,1)$ و $(0,1]$ و $[0,1]$ جميعها متكافئة .

(4) أثبت أن مربع الوحدة $[0,1] \times [0,1]$ يكافئ $[0,1]$.

باب 3

المتتاليات

1.3 المتتاليات والتقارب

تعريف :
المتتالية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية .
نرمز للمتتالية بالرمز (a_n) ، ونسمي a_n حد المتتالية رقم n .

أمثلة :

(1) $(2n)$ متتالية مداها الأعداد الطبيعية الزوجية .

(2) $((-1)^n)$ متتالية مداها المجموعة المنتهية $\{-1, 1\}$.

(3) $\left(\frac{1}{n}\right)$ متتالية مداها $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$.

(4) قد تعرف المتتالية باستخدام الاستقراء ، مثل :

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ لكل } n \geq 3$$

مدى هذه المتتالية هو $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$ وتسمى متتالية فيبوناتشي .

تعريف :
نقول أن المتتالية (x_n) تتقارب إلى العدد $x \in \mathbb{R}$ إذا كان : لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ تحقق
$n \geq N \implies |x_n - x| < \epsilon$
ونكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ أو $x_n \longrightarrow x$.

ملاحظات :

(1) لاحظ أن جميع حدود المتتالية ماعدا $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ تقع جميعها في الفترة المفتوحة $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

(2) إذا كانت المتتالية (x_n) تحقق : لكل $\epsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ تحقق
$|x_n - x| < C\epsilon$ لكل $n \geq N$ حيث C ثابت موجب ، فإن $x_n \longrightarrow x$.

(3) تقارب أو عدم تقارب متتالية يعتمد على حدودها المتأخرة أو مايعرف بمتتالية الذيل .

(4) من تعريف تقارب المتتالية نلاحظ أن :
$x_n \longrightarrow x \iff |x_n - x| \longrightarrow 0$

أمثلة :

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

(4) المتتالية $((-1)^n)$ غير متقاربة .

(5) المتتالية (n) غير متقاربة .

الحل :

نظرية :
إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
البرهان :

تمارين

(1) أثبت باستخدام التعريف مايلي :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{3n^3+n}=\frac{1}{3} \quad (i)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2}=0 \quad (ii)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)=1 \quad (iii)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=0 \quad (iv)$$ ، لكل $k\in\mathbb{R}$

(2) أثبت أن المتتالية الثابتة متقاربة .

(3) إذا كانت $x_n \longrightarrow z$ ، $y_n \longrightarrow z$ فأثبت أن المتتالية $(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots)$ متقاربة ونهايتها z .

(4) أثبت أن الفترة المفتوحة (a,b) جوار لكل عنصر من عناصرها .

(5) أثبت أن $\mathbb{R}\setminus\{c\}$ جوار لكل $x\neq c$.

2.3 الخواص الأساسية للمتتاليات المتقاربة

تعريف :
نقول أن المتتالية (x_n) محدودة إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ يحقق
$|x_n| \leq K$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
أي أن مدى المتتالية (x_n) مجموعة محدودة .

نظرية :
المتتالية المتقاربة محدودة .
البرهان :

ملاحظة :
عكس النظرية غير صحيح . أي إذا كانت المتتالية محدودة فليس شرطاً أن تكون متقاربة .
مثلاً ، المتتالية $((-1)^n)$ محدودة ولكنها ليست متقاربة .

نظرية :
إذا كانت $x_n \longrightarrow x$ و $x \neq 0$ فإن هنالك $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث
$n \geq N \implies |x_n| > M$
البرهان :

نظرية :
إذا كانت (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها x وكانت (y_n) متتالية متقاربة ونهايتها y فإن :

(1) المتتالية $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $x + y$.

(2) المتتالية $(x_n y_n)$ متقاربة ونهايتها xy .

ونستنتج من ذلك :

(i) لكل $k \in \mathbb{R}$ ، المتتالية (kx_n) متقاربة ونهايتها kx .
(ii) المتتالية $(x_n - y_n)$ متقاربة ونهايتها $x - y$.

(3) إذا كانت $y \neq 0$ فإن المتتالية $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ متقاربة ونهايتها $\dfrac{x}{y}$.

البرهان :

نظرية :
إفرض أن $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$.
إذا كان $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x \leq y$.
البرهان :

ملاحظات :

(1) إذا كان $x_n < y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فليس شرطاً أن يكون $x < y$.

مثلاً ، $x_n = 0$ و $y_n = \dfrac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(2) النظرية تبقى صحيحة بتخفيف الشرط إلى $x_n \leq y_n$ لكل $n \geq N_0$ حيث N_0 عدد طبيعي .

نظرية (نظرية الحصر) :
إذا كانت $x_n \leq y_n \leq z_n$ لكل $n \geq N_0$
وكانت $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = l$
فإن (y_n) متقاربة ونهايتها l .
البرهان :

مثال :
إذا كانت $x_n \longrightarrow x$ فإن $|x_n| \longrightarrow |x|$.
الحل :

مثال :
إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
الحل :

مثال :
إذا كانت $c > 0$ فإن $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$.
الحل :

مثال :
إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \longrightarrow x$ فإن $\sqrt{x_n} \longrightarrow \sqrt{x}$.
الحل :

مثال :
$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.
الحل :

تمارين

(1) قرر ما إذا كانت (x_n) متقاربة أم لا . احسب النهاية متى وجدت

$$x_n = \frac{2n^3+3}{n^2+4} \quad (i)$$

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{2n+1} \quad (ii)*$$

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (iii)*$$

$$x_n = \frac{\sin n}{n} \quad (iv)$$

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_1 \\ 0 & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases} \quad (v)$$

(2) إذا كانت $(x_n + y_n)$ متقاربة و (x_n) متقاربة فأثبت أن (y_n) متقاربة . ما نهايتها ؟

هل تستطيع تقديم نتيجة مشابهة تتعلق بالمتتالية $(x_n y_n)$.

(3) هات مثالاً لمتتاليتين (x_n) و (y_n) بحيث تكون $(x_n + y_n)$ متقاربة دون أن تكون (x_n) و (y_n) متقاربتين .

(4) هات مثالاً لمتتالية (x_n) غير متقاربة بحيث تكون $(|x_n|)$ متقاربة .

متى يكون التقرير $x_n \longrightarrow x \implies |x_n| \longrightarrow |x|$ صحيحاً ؟

(5) إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0$ فأثبت أن (x_n) محدودة ثم استنتج أن $x_n \longrightarrow 1$.

(6)* إذا كان $0 < b < 1$ فأثبت أن $nb^n \longrightarrow 0$.

(7) إذا كان $0 < a < b$ فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$

(8) (i) أثبت أن $n! \leq n^{n-1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(ii) استخدم نظرية الحصر لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

(9) إذا كان $x_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

استخدم نظرية الحصر لحساب $\lim_{n\to\infty} x_n$

(10) لتكن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. إذا كان $L < 1$ فأثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(11) أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}$ بحيث $x_n \longrightarrow x$.

$*$(12) أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}^c$ بحيث $x_n \longrightarrow x$.

3.3 المتتاليات المطردة

تعريف :

(1) نقول أن المتتالية (x_n) متزايدة إذا كان $x_n \leq x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

إذا كانت $x_n < x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فنقول أن (x_n) متزايدة فعلاً .

(2) نقول أن المتتالية (x_n) متناقصة إذا كان $x_n \geq x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

إذا كانت $x_n > x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فنقول أن (x_n) متناقصة فعلاً .

ملاحظة :
(x_n) متزايدة $\Longleftrightarrow$ $(-x_n)$ متناقصة .

أمثلة :

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)$ متتالية متناقصة (فعلاً) .

(2) (2^n) متتالية متزايدة (فعلاً) .

(3) $((-1)^n)$ ليست مطردة .

نظرية :
المتتالية المطردة متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة . وبالتحديد

(1) إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة من أعلى فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(2) إذا كانت (x_n) متناقصة ومحدودة من أسفل فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

البرهان :

تعريف (مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة) :
نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة بالرمز $\overline{\mathbb{R}}$ ، وتعرف كالتالي $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$

تعريف :

(1) نقول أن $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ إذا كان لكل عدد حقيقي $M > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n > M$ لكل $n \geq N$.

(2) نقول أن $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ إذا كان لكل عدد حقيقي $M < 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n < M$ لكل $n \geq N$.

نظرية :

(1) إذا كانت (x_n) متتالية متزايدة وليست محدودة من أعلى فإن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

(2) إذا كانت (x_n) متتالية متناقصة وليست محدودة من أسفل فإن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

البرهان :

أمثلة :

(1) إذا كان $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ فأثبت أن (x_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

(2) إذا كان $x_1 = \sqrt{2}$ و $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ فأثبت أن (x_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

(3) ليكن $a > 0$. إذا كان $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها $\sqrt{a}$.

تمارين

(1) أثبت فيما يلي أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم احسب نهايتها

$(i)*$ $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n + 5)$

$(ii)*$ $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

(iii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}$

(2) إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة .

(3) افرض أن $0 < x_1 < y_1$ وأن المتتاليتين (x_n) و (y_n) معرفتان بالتالي :

$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ ، $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

أثبت أن (x_n) و (y_n) متقاربتان ومن النهاية نفسها .

(4) افرض أن $x_n = \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2.4.6 \cdots (2n)}$

(i) أثبت أن (x_n) متقاربة .

(ii) أثبت أن $\left((2n+1)x_n^2\right)$ متقاربة .

(iii) احسب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

(5) إذا كانت $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن :

- المتتالية (x_n) تزايدية فعلاً.
- المتتالية (x_n) محدودة من أعلى بالعدد 2 .
- هل المتتالية (x_n) متقاربة ؟ برر إجابتك
- استنتج أن المتتالية التي حدها النوني $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x^p}$ متقاربة لكل $p \geq 2$

(6) إذا كان $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكان $x_{n+1} < cx_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ حيث $c \in (0,1)$

(i) أثبت أن المتتالية (x_n) متناقصة و استنتج أنها متقاربة .

(ii) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن $x_n < c^{n-1}x_1$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(iii) استخدم نظرية الحصر لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

(7) إذا كانت A غير خالية ومحدودة من أعلى فأثبت أن فيها متتالية متزايدة (x_n) بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup(A)$.

4.3 معيار كوشي ونظرية بولزانو - فايرشتراس

تعريف (متتالية كوشي) :
تسمى المتتالية (x_n) من نوع كوشي أو متتالية كوشي إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث
$m, n \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$

نظرية :
إذا كانت (x_n) متقاربة فهي من نوع كوشي .
البرهان :

تعريف :

(1) نقول إن $x \in \mathbb{R}$ نقطة تراكم للمجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصراً $a \in A$ مغايراً للعنصر x .

نرمز لمجموعة نقاط تراكم المجموعة A بالرمز $\widehat{A}$.

(2) إذا كانت $x \in A \backslash \widehat{A}$ فإن x تسمى نقطة معزولة من نقاط A .

ملاحظات :

(1) $x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $a \in A$ بحيث $0 < |x - a| < \epsilon$.

(2) $x \in A$ نقطة معزولة إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x لا يتقاطع مع A إلا في x ، أي إذا وجد جوار V للنقطة x بحيث $V \cap A = \{x\}$.

تمهيد :
$x \in \widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عدداً غير منته من عناصر A .
البرهان :

أمثلة :

(1) لكل فترة (a, b) نجد أن $\widehat{(a,b)} = [a, b]$.

(2) $\widehat{\mathbb{Z}} = \phi$

(3) $\widehat{\mathbb{Q}} = \widehat{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$

الحل :

نظرية :

(1) إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فبالإمكان اختيار متتالية (x_n) في A ذات عناصر مختلفة بحيث $x_n \longrightarrow x$.

(2) إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة من x والمجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهية فإن $x \in \widehat{A}$.

البرهان :

تمهيد (نظرية كانتور للفترات المتداخلة) :
افرض أن (I_n) متتالية من الفترات المحدودة المغلقة .
إذا كانت $I_{n+1} \subset I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ مجموعة غير خالية .

بالإضافة إلى ذلك ، إذا كان $\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$ حيث يمثل $|I_n|$ طول الفترة I_n ، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ يحوي نقطة واحدة فقط .
البرهان :

نظرية (نظرية بولزانو - فايرشتراس) :
إذا كانت A مجموعة محدودة وغير منتهية فإن للمجموعة A نقطة تراكم واحدة على الأقل .
البرهان :

تمهيد :
إذا كانت المتتالية (x_n) من نوع كوشي فهي محدودة .
البرهان :

نظرية (معيار كوشي) :
إذا كانت المتتالية (x_n) من نوع كوشي فهي متقاربة .
البرهان :

مثال :
إذا كانت $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ فأثبت أن المتتالية (x_n) من نوع كوشي .
الحل :

تمارين

(1) أوجد $\widehat{A}$ فيما يلي :

$(i)*$ $A=\mathbb{N}$

$(ii)*$ $A=[0,1)\cup(3,4)\cup(5,6]$

(iii) $A=\left\{3^n+\frac{1}{k}:n,k\in\mathbb{N}\right\}$

$(iv)*$ $A=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

(2) إذا كانت $A\subseteq B$ فأثبت أن $\widehat{A}\subseteq\widehat{B}$

(3) هات مثالاً

(i) لمجموعة $A\subseteq\mathbb{R}$ لها أربع نقاط تراكم فقط .

(ii) لمجموعة $A\subseteq\mathbb{R}$ بحيث تكون $\widehat{A}$ قابلة للعد .

(4) لكل $A,B\subseteq\mathbb{R}$ أثبت مايلي :

(i) $(\widehat{A\cup B})=\widehat{A}\cup\widehat{B}$

(ii) $\widehat{A\cap B}\subseteq\widehat{A}\cap\widehat{B}$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $\widehat{A\cap B}\neq\widehat{A}\cap\widehat{B}$

(5) إذا كانت $A\subseteq\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من أعلى و $\sup(A)\notin A$ فأثبت أن $\sup(A)\in\widehat{A}$

(6) هات مثالاً لمتتالية من الفترات المفتوحة المحدودة (I_n) بحيث $I_{n+1}\subset I_n$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\phi$

$*$(7) إذا كانت (x_n) و (y_n) من نوع كوشي فأثبت أن كلاً من (x_n+y_n) و (x_ny_n) من نوع كوشي .

(8) إذا كانت $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فأثبت أن المتتالية (x_n) ليست من نوع كوشي .

5.3 المتتاليات الجزئية

لتكن (x_n) متتالية ما. إذا كانت (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلاً ، أي إذا كانت $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ فإننا نسمي المتتالية (x_{n_k}) متتالية جزئية من (x_n) .

أمثلة :

(1) كل ذيل من المتتالية (x_n) يشكل متتالية جزئية منها .

(2) الحدود الفردية تشكل متتالية جزئية من (x_n) ، هنا $n_k = 2k - 1$.

الحدود الزوجية تشكل متتالية جزئية من (x_n) ، هنا $n_k = 2k$.

(3) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots\right)$ ليست متتالية جزئية من $\left(\frac{1}{n}\right)$ وذلك لاختلال الترتيب .

(4) $(1, -1, 2, -2, \cdots)$ ليست متتالية جزئية من المتتالية (n) وذلك لوجود بعض الحدود غير الواردة في (n) .

ملاحظات :

(1) كل متتالية جزئية من متتالية جزئية من (x_n) هي الأخرى متتالية جزئية من (x_n) .

(2) لاحظ أن الشرط $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ يقتضي أن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$.

نظرية :
إذا كانت (x_n) متقاربة ونهايتها x فإن كل متتالية جزئية من (x_n) متقاربة للنهاية نفسها .
البرهان :

ملاحظات :

(1) إذا أمكن إيجاد متتاليتين جزئيتين (x_{n_k}) و (x_{n_j}) متقاربتين لنهايتين مختلفتين فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة .

(2) إذا أمكن إيجاد متتالية جزئية (x_{n_k}) غير متقاربة فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة .

مثال :

(1) المتتالية $((-1)^n)$ ليست متقاربة .

(2) المتتالية $\left(\frac{(-1)^n n}{2n+1}\right)$ ليست متقاربة .

(3) إذا كانت

$$x_n = \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_1 \\ \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$$

فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة .

الحل :

نتيجة :
إذا كانت (x_n) متقاربة ولها متتالية جزئية متقاربة من x فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
البرهان :

نظرية :
إذا كانت (x_n) محدودة فإن لها متتالية جزئية متقاربة .
البرهان :

نظرية :
افرض أن (x_n) متتالية محدودة . إذا كانت كل متتالياتها الجزئية المتقاربة لها نفس النهاية فإن (x_n) متقاربة ولذات النهاية .
البرهان :

مثال :
لتكن (x_n) متتالية ، ومتتالياتها الجزئية (x_{2n}) , (x_{3n}) , (x_{2n+1}) متقاربة ، فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة .

تمارين

(1) مثل لما يلي :

(i) متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة .

(ii) متتالية غير محدودة لها متتالية جزئية متقاربة .

(2) إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية نهايتها 0 فأثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(3) افرض أن $x_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا كانت $((-1)^n x_n)$ متقاربة فأثبت أن (x_n) متقاربة . ما هي النهاية ؟ .

(4) افرض أن (x_n) متتالية محدودة وعناصرها مختلفة ($x_n \neq x_m$ لكل $n \neq m$). إذا كانت للمجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ نقطة تراكم واحدة x فأثبت أن $x_n \longrightarrow x$.

(5) إذا كانت المتتالية (x_n) تزايدية ولها متتالية جزئية محدودة من أعلى فأثبت أن المتتالية (x_n) متقاربة .

6.3 المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة

تعريف :
نقول أن المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ مفتوحة إذا كانت A جواراً لكل عنصر من عناصرها ، أي أذا كان لكل $x \in A$ توجد $\epsilon > 0$ بحيث $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A$.

أمثلة :

(1) كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة .

(2) لكل عنصر $y \in \mathbb{R}$ المجموعة $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ مفتوحة .

(3) $[a,b)$ ليست مفتوحة .

(4) $\mathbb{Z}$ ليست مفتوحة .

(5) $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة .

نظرية :

(1) $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مفتوحتان .

(2) إذا كانت G_λ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ مجموعة مفتوحة .

(3) إذا كانت كل من $G_1, G_2, \cdot, G_n$ مجموعة مفتوحة فإن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مجموعة مفتوحة .

نظرية :
المجموعة $G \subseteq \mathbb{R}$ مفتوحة إذا وفقط إذا كانت اتحاداً لعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة .

تعريف :
نقول أن المجموعة A مغلقة إذا كانت متممتها A^c مفتوحة .

أمثلة :

(1) الفترات $[a,b]$ ، $[a,\infty)$ ، $(-\infty,a]$ جميعها مغلقة .

(2) $[a,b)$ ليست مغلقة .

(3) $\mathbb{Q}$ ليست مغلقة .

(4) $\mathbb{Z}$ ليست مغلقة .

نظرية :

(1) $\mathbb{R}$ و ϕ مجموعتان مغلقتان .

(2) إذا كانت $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ مجموعة منتهية من المجموعات المغلقة فإن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مجموعة مغلقة .

(3) إذا كانت F_λ مجموعة مغلقة لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مغلقة .

نظرية :
التقارير الثلاثة التالية متكافئة :

(1) F مجموعة مغلقة .

(2) $\widehat{F} \subseteq F$

(3) F تحوي نهايات متتالياتها المتقاربة ، أي أن

$$x_n \in F\ ,\ x_n \longrightarrow x \implies x \in F$$

مجموعة كانتور الثلاثية :

ملاحظات :

(1) مجموعة كانتور الثلاثية مجموعة مغلقة .

(2) مجموعة كانتور الثلاثية تكافئ الفترة $[0,1]$ ، أي أنها غير قابلة للعد .

(3) طول مجموعة كانتور الثلاثية يساوي الصفر .

تمارين

(1) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مفتوحة ومحدودة فأثبت أن $\sup(A) \notin A$ و $\inf(A) \notin A$.

(2) إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ مغلقة ومحدودة فأثبت أن $\sup(A) \in A$ و $\inf(A) \in A$.

(3) هات مثالاً لمجموعات مغلقة اتحادها لا يكون مجموعة مغلقة .

(4) أثبت أن $A \subseteq \mathbb{R}$ مغلقة $\Longleftrightarrow$ كل متتالية في A من نوع كوشي لها نهاية في A .

(5) نعرف داخل المجموعة A بأنه أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A ، ونرمز له بالرمز A° . أثبت مايلي :

(i) A مفتوحة $\Longleftrightarrow A = A^\circ$

(ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ، $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$

(6) نعرف إنغلاق المجموعة A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A ، ونرمز له بالرمز $\overline{A}$. أثبت مايلي :

(i) A مغلقة $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$

(ii) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ لكل $\epsilon > 0$ نجد أن $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A \neq \phi$

(iii) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ توجد متتالية (x_n) في A بحيث $x_n \longrightarrow x$

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ، $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

(v) $\overline{A} = A \cup \widehat{A}$

(7) نعرف حافة A بأنها المجموعة $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

أثبت أن $A^\circ \cap \partial A = \phi$ وأن $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$

مسائل إضافية

(1) إذا كان $x_n = \left(\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{\sin\left(n^2\right)}{n+2}\right)^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(i) أثبت أن $\left|\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{\sin\left(n^2\right)}{n+2}\right| \leq \frac{5}{6}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(ii) استخدم نظرية الحصر لحساب $\lim_{n\to\infty} |x_n|$

(iii) احسب $\lim_{n\to\infty} x_n$

(2) بين أن $(\sin(n))$ متتالية غير متقاربة .

(3) هل للمتتالية $\left(\tan^{-1} n\right)$ متتالية جزئية متقاربة .

(4) إذا كانت $y_n \geq x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ فأثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(5) إذا كانت $a_n \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وكانت $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ و $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن :

- المتتالية (x_n) تزايدية .
- إذا كانت المتتالية (y_n) متقاربة ، فأثبت أن (x_n) متقاربة .

(6) إذا كانت (x_n) متتالية تزايدية و (y_n) متتالية تناقصية وكانت $x_n \leq (y_n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(i) أثبت أن (x_n) متتالية متقاربة .

(ii) أثبت أن (y_n) متتالية متقاربة .

(iii) إذا كانت $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$

أثبت أن $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$

باب 4

نهاية الدالة

1.4 نهاية الدالة

تعريف :

افرض أن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ وأن c نقطة تراكم للمجموعة D .

نقول أن للدالة f نهاية عند c وقيمتها l إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ تحقق

$x \in D \, , \; 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

وسنعبر عن ذلك اختصاراً بكتابة $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

أو $f(x) \longrightarrow l$ عندما $x \longrightarrow c$

مثال :

إذا كانت $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ أثبت أن $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b$

الحل :

مثال :

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ اثبت أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

الحل :

مثال :

لتكن $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$ حيث $(p, q) = 1$

أثبت أن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ لكل $c \in (0, 1]$

الحل :

ملاحظات :

(1) في تعريف النهاية إذا وجدنا $\delta > 0$ تحقق المطلوب $|f(x) - l| < \epsilon$ فإن كل $\delta' \in (0, \delta)$ تفي بالغرض .

(2) لإثبات أن $|f(x)-l|<\epsilon$ يكفي أن نجد لكل $\epsilon>0$ عدداً $\delta>0$ يحقق

$$x \in D\ ,\ 0<|x-c|<\delta \implies |f(x)-l|<a\epsilon$$

حيث $a>0$ عدد حقيقي ثابت .

(3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$ تعني أن لكل جوار V للنقطة l يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x \in U\cap D\ ,\ x\neq c \implies f(x)\in V$$

نظرية :
افرض أن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ وأن $c\in\widehat{D}$. التقريران التاليان متكافئان :

(1) $\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$

(2) لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ ، و $x_n\longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها l .

البرهان :

نتيجة :
لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$ ، وافرض أن S هي مجموعة المتتاليات (x_n) في D التي تحقق $x_n\neq c$ و $x_n\longrightarrow c$.

(1) إذا وجدت متتالية (x_n) في S بحيث تكون $(f(x_n))$ غير متقاربة فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة .

(2) إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (y_n) في S بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة .

أمثلة :

(1) الدالة $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ليس لها نهاية عند 0 .

(2) الدالة sgn المعرفة على $\mathbb{R}$ بالقاعدة $sgn(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ ليس لها نهاية عند 0 .

(3) الدالة $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ليس لها نهاية عند 0 .

(4) لتكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كالتالي $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ فإن الدالة f ليس لها نهاية عند أي $c\in\mathbb{R}$

الحل :

نظرية :
لتكن $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. التقريران التاليان متكافئان :

(i) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة .

(ii) لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ و $x_n \longrightarrow c$، تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة .

البرهان :

نظرية :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة ، فهي وحيدة .
البرهان :

تمارين

(1) باستخدام التعريف أثبت فيما يلي أن $\lim_{x\to c} f(x) = l$

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ، $c = 1$ و $l = 1$.

(ii) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ ، $c = 2$ و $l = \sqrt{2}$.

(2) أثبت أن النهايات التالية غير موجودة :

(i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{2x^2}\right)$

(iii) $\lim_{x\to 0} \left(x^2 + sgn(x)\right)$

(3) إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة $\iff c = 0$.

(4) لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. إذا كانت $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $g(x) = f(ax)$ حيث $a > 0$ ، فأثبت أن $\lim_{x\to 0} g(x) = l$

(5) لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c} [f(x)]^2 = 0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

أعط مثالاً لدالة بحيث تكون $\lim_{x\to c} [f(x)]^2$ موجودة بينما $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة .

(6) افرض أن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $f(x) = g(x)$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c و $\lim_{x\to c} f(x) = l$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} g(x) = l$.

2.4 النظريات الأساسية

نظرية :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ ، إذا كانت للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c ، أي أنه يوجد جوار U للنقطة c وعدد حقيقي ثابت $M > 0$ بحيث $|f(x)| \leq M \ , \ \forall x \in U \cap D \setminus \{c\}$.
البرهان :

نظرية :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ حيث $l \neq 0$ فإن هنالك جواراً U للنقطة c وعدداً موجباً M بحيث $|f(x)| > M \ , \ \forall x \in U \cap D \setminus \{c\}$
البرهان :

نظرية :
لتكن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ ، وافرض أن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ ، $\lim\limits_{x \to c} g(x) = m$ عندئذ

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = l + m \quad (i)$$

$$\lim_{x \to c} [f(x)\, g(x)] = lm \quad (ii)$$

من هذا نجد أن

$$\lim_{x \to c} kf(x) = kl \ , \ \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = l - m$$

(iii) إذا كان $m \neq 0$ فإن $g(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c ، وعندئذ $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$

البرهان :

نظرية :
لتكن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$ وافرض أن لكل من f و g نهاية عند c إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث $f(x) \leq g(x) \ , \ \forall x \in U \cap D \setminus \{c\}$ فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) \leq \lim\limits_{x \to c} g(x)$
البرهان :

نظرية :
لتكن $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كان هنالك جوار للنقطة c بحيث $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ , \ \forall x \in U \cap D \setminus \{c\}$ وكانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = l$ فإن $\lim\limits_{x \to c} g(x) = l$
البرهان :

أمثلة :

(1) إذا كانت P كثيرة حدود فإن $\lim\limits_{x \to c} P(x) = P(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim\limits_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$ و $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

$\lim_{\theta\to\theta_0} \sin\theta = \sin\theta_0$ و $\lim_{\theta\to\theta_0} \cos\theta = \cos\theta_0$

(3) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

(4) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

الحل :

تمارين

(1) أعط أمثلة لدالتين f, g بحيث

(i) كل من $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة لكن للدالة $f+g$ نهاية عند c .

(ii) كل من $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة لكن للدالة fg نهاية عند c .

(iii) $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ و $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ موجودة .

(2) إذا كانت $a \le f(x) \le b$ لكل $x \in D_f$ و $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ، فأثبت أن $a \le \lim_{x\to c} f(x) \le b$

ماذا يمكن قوله إذا كانت $a < f(x) < b$ لكل $x \in D_f$

(3) لتكن $f(x) \ge 0$ لكل $x \in D_f$. إذا كانت $c \in \widehat{D_f}$ و $\lim_{x\to c} f(x) = l$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.

هل تستطيع أن تعمم هذه النتيجة للجذر النوني

(4) أحسب النهايتين التاليتين (متى وجدتا) :

(i) $\lim_{x\to 0} sgn\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(ii) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(5) إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ و g دالة محدودة في جوار ما للنقطة c فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$

(6) إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = l$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$

متى يكون العكس صحيحاً

(7) إذا كانت $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = l$ فأثبت أن $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(ax)}{x} = al$ لكل $a \ne 0$

ماذا يحدث لو كانت $a = 0$.

احسب $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

(8) لتكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق $f(x+y) = f(x) + f(y)$ لكل $x, y \in \mathbb{R}$.

أثبت أن للدالة f نهاية عند كل $c \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ للدالة f نهاية عند 0 $\Longleftrightarrow$ الدالة محدودة في جوار ما للنقطة 0 .

3.4 بعض الامتدادات لتعريف نهاية الدالة

تعريف :

(1) لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و c نقطة تراكم للمجموعة $D \cap (c, \infty)$. نقول أن نهاية الدالة f اليمنى عند c هي l إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D\ ,\ 0 < x - c < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

ونكتب $\lim_{x \to c^+} f(x) = l$

(2) لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و c نقطة تراكم للمجموعة $D \cap (-\infty, c)$. نقول أن نهاية الدالة f اليسرى عند c هي m إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D\ ,\ 0 < c - x < \delta \implies |f(x) - m| < \epsilon$$

ونكتب $\lim_{x \to c^-} f(x) = m$

نظرية :

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ وافرض أن c نقطة تراكم لكل من $D \cap (c, \infty)$ و $D \cap (-\infty, c)$. عندئذ
$\lim_{x \to c} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$

البرهان :

أمثلة :

(1) $\lim_{x \to 0} sgn(x)$ غير موجودة .

(2) إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & x > 4 \\ 0 & x = 4 \\ 2x - 4 & x < 4 \end{cases}$$

فإن $\lim_{x \to 4} f(x) = 4$

(3) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ فإن $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة .

تعريف :

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$

(1) نقول أن $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ إذا كان لكل $M > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D\ ,\ 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

(2) نقول أن $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ إذا كان لكل $M < 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D \ , \ 0 < |x-c| < \delta \Longrightarrow f(x) < M$$

تعريف :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) **نقول أن** $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ **إذا كان لكل** $\epsilon > 0$ **توجد** $M > 0$ **بحيث**

$$x \in D \ , \ x > M \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

(2) **نقول أن** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ **إذا كان لكل** $\epsilon > 0$ **توجد** $M < 0$ **بحيث**

$$x \in D \ , \ x < M \implies |f(x) - l| < \epsilon$$

أمثلة :

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

تمارين

(1) لتكن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث $f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in D \cap U \backslash \{c\}$ فأثبت مايلي :

(i) إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$

(ii) إذا كانت $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

(2) احسب النهايات اليمنى واليسرى ، إن وجدت :

(i) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$

(ii) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iii) $\lim_{x\to 0} x[x]$

(iv) $\lim_{x\to 1} x[x]$

(3) لتكن $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. أثبت أن

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

(4) لتكن $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ، إذا كانت $g(x) > 0$ لكل $x \in [0, \infty)$ وكانت $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l > 0$ فأثبت أن

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

(5) لتكن $\lim_{x\to c} f(x) = l$ و $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$. إذا كان $l > 0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$

4.4 الدوال المطردة

تعريف :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) نقول أن f متزايدة إذا كان $x, y \in D \ , \ y > x \Longrightarrow f(y) \geq f(x)$

نقول أن f متزايدة فعلاً إذا كان $x, y \in D \ , \ y > x \Longrightarrow f(y) > f(x)$

(2) نقول أن f متناقصة إذا كان $x, y \in D \ , \ y > x \Longrightarrow f(y) \leq f(x)$

نقول أن f متناقصة فعلاً إذا كان $x, y \in D \ , \ y > x \Longrightarrow f(y) < f(x)$

ملاحظات :

(1) نقول أن الدالة f مطردة إذا كانت f متزايدة أو كانت متناقصة .

نقول أن الدالة f مطردة فعلاً إذا كانت f متزايدة فعلاً أو متناقصة فعلاً .

(2) f متزايدة (متزايدة فعلاً) $\Longleftrightarrow$ $-f$ متناقصة (متناقصة فعلاً)

نظرية :
إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متزايدة ، فلكل $c \in (a, b)$ تكون النهايتان $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ موجودتين وتكون

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

كذلك كل من $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ موجودة وتحقق

$$f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x) \ ، \ \lim_{x \to b^-} f(x) \leq f(b)$$

البرهان :

نظرية :
إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مطردة فإن مجموعة النقاط A التي لا يوجد عندها للدالة f نهاية هي مجموعة قابلة للعد .
ولكل $c \in [a, b] \setminus A$ نجد أن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

البرهان :

تمارين

(1) أثبت أن الدالة المطردة فعلاً متباينة ومعكوسها دالة مطردة فعلاً .

(2) إذا كانت f متزايدة على الفترة (a,b) وغير محدودة من أعلى على (a,b) ، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$.

(3) إذا كانت $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين متزايدتين على D

(i) أثبت أن $f+g$ متزايدة على D .

(ii) إذا كانت $f(x)\geq 0$ و $g(x)\geq 0$ لكل $x\in D$ فأثبت أن $f.g$ متزايدة على D .

(iii) لتكن $D=[0,1]$ ، $f(x)=x$ ، $g(x)=1-x$. أثبت أن كلاً من f و g دالة مطردة ولكن fg ليست مطردة .

(4) إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تحقق $f(x+y)=f(x)+f(y)$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$. إذا كانت f مطردة فأثبت وجود $m\in\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=mx$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

(أثبت أولاً أن $f(q)=mq$ لكل $q\in\mathbb{Q}$) .

باب 5

الاتصال

1.5 الدوال المتصلة

تعريف :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in D$. نقول أن الدالة f متصلة عند النقطة c إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث
$x \in D \, , \; |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$

ملاحظات :

(1) تعرف نهاية الدالة f عند أي نقطة في $\widehat{D}$ (وإن لم تكن في D) .

يعرف الاتصال عند أي نقطة في D (ولو كانت نقطة معزولة) .

(2) لتكن $c \in D \cap \widehat{D}$

الدالة f متصلة عند $c \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

(3) الدالة f متصلة عند كل نقطة معزولة من مجال تعريفها .

(4) الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$ إذا كان لكل جوار V للنقطة $f(c)$ يوجد جوار U للنقطة c بحيث $f\left(U \cap D\right) \subset V$

(5) نقول أن الدالة f متصلة على مجموعة ما $E \subset D$ إذا كانت f متصلة عند كل نقطة في E .

نظرية :
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$ إذا وفقط إذا كان لكل متتالية (x_n) في D متقاربة من c ، تكون المتتالية $(f\left(x_n\right))$ متقاربة من $f(c)$.
البرهان :

نتيجة :
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير متصلة عند $c \in D$ إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) في D متقاربة من c ولكن صورتها $(f\left(x_n\right))$ غير متقاربة من $f(c)$.

أمثلة :

(1) أي كثيرة حدود هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

(2) دالتا $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$.

(3) الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

بينما الدالة $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ متصلة على $\mathbb{R}$

(4) الدالة $$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(5) الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ متصلة على $(0, \infty)$

لايمكن إعادة تعريف الدالة f عند $x = 0$ لتصبح متصلة على الفترة $[0, \infty)$ لأن $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ غير موجودة .

(6) الدالة $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

لايمكن إعادة تعريف الدالة f عند $x = 0$ لتصبح متصلة على $\mathbb{R}$ لأن $\lim_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ غير موجودة .

(7) الدالة $$g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ متصلة على $\mathbb{R}$

(8) الدالة $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ غير متصلة عند أي نقطة في $\mathbb{R}$

(9) إذا كانت $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap (0,1] \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1]\ ,\ (p,q) = 1 \end{cases}$$

نعلم أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ لكل $c \in (0,1]$

وبالتالي f متصلة عند الأعداد غير النسبية في $(0,1)$ وغير متصلة عند الأعداد النسبية .

تصنيف حالات عدم الاتصال :

(1) عدم الاتصال قابل للإزالة :

في هذه الحالة تكون $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ولكنها لا تساوي قيمة $f(c)$.

لإزالة عدم الاتصال نعيد تعريف الدالة عند النقطة c بحيث تكون $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

المثالان (3) و (7) يمثلان هذه الحالة .

(2) عدم الاتصال القفزي :

في هذه الحالة تكون النهايتان اليمنى واليسرى موجودتين عند النقطة c ولكنهما غير متساويتين .

أي أن $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

المثال (4) يمثل هذه الحالة .

(3) عدم الاتصال المتذبذب :

في هذه الحالة تكون إحدى النهايتين $\lim_{x\to c^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to c^+} f(x)$ (أو كلتاهما) غير موجودة وأيضاً يوجد جوار للنقطة c تكون فيه الدالة f محدودة .

الأمثلة (6) و (8) و (9) تمثل هذه الحالة .

(4) عدم الاتصال اللانهائي :

في هذه الحالة تكون الدالة f غير محدودة في كل جوار للنقطة c وبالتالي $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة .

المثال (5) يمثل هذه الحالة .

تمارين

(1) أوجد مجال الاتصال للدوال التالية

(i) $f(x) = |x|$

(ii) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

(iii) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(2) إذا كانت الدالة f المعرفة على $(-1,1)$ تحقق

$|f(x)| \leq |x|$ لكل $x \in (-1,1)$

فأثبت أن f متصلة عند $x = 0$.

(3) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$ فأثبت أن $|f|$ متصلة عند c .

(4) أعط مثالاً لدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير متصلة عند كل نقطة في D ، ولكن $|f|$ متصلة على D .

(5) عرف كلاً من الدوال التالية عند $x = 0$ بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة إن أمكن :

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin 3x \, , \; x \neq 0$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x^2 \, , \; x \neq 0$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin \sqrt{x} \, , \; x \neq 0$

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\sin x \, , \; x \neq 0$

(6) إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكان $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{Q}$

فأثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(7) افرض أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ تحقق

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ لكل $x, y \in \mathbb{R}$

إذا كانت f متصلة عند $x = 0$ فأثبت أنها متصلة على $\mathbb{R}$.

(8) افرض أن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ وأن g هي مقصور f على E حيث $E \subset D$

(i) إذا كانت f متصلة عند $c \in E$ فأثبت أن g أيضاً متصلة عند c .

(ii) أعط مثالاً يبين أن اتصال g عند c لا يقتضي بالضرورة اتصال f عند c .

(9) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة فأثبت أن المجموعة $\{x \in D : f(x) = 0\}$ مغلقة في D .

2.5 تركيب الدوال المتصلة

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين متصلتين عند $c \in D$ فإن

(i) $f+g$ ، $f-g$ ، fg جميعها دوال متصلة عند $c \in D$

(ii) الدالة $\dfrac{f}{g}$ متصلة عند c إذا كانت $g(c) \neq 0$

البرهان :

نتيجة : إذا كانت f دالة متصلة عند c فإن kf متصلة عند c لأي ثابت k .

نتيجة : إذا كانت f و g دالتين متصلتين على D فإن $f+g$ ، $f-g$ ، fg جميعها متصلة على D .
إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل $x \in D$ فإن الدالة $\dfrac{f}{g}$ متصلة على D .

مثال :
الدالة الكسرية $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيرتا حدود هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ماعدا أصفار Q الحقيقية .

(1) الدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

(2) الدالة $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+9}$ متصلة على $\mathbb{R}$

مثال :
الدالتان $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$

(1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi \, , \, n \in \mathbb{Z}\right\}$

(2) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{n\pi \, , \, n \in \mathbb{Z}\}$

(3) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi \, , \, n \in \mathbb{Z}\right\}$

(4) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{n\pi \, , \, n \in \mathbb{Z}\}$

نظرية :
افرض أن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D) \subseteq E$. إذا كانت f متصلة عند c و g متصلة عند $f(c)$ فإن دالة التحصيل $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند c .
البرهان :

مثال :
الدالة $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $g(x) = |x|$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$.
إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة على D فإن $(g \circ f)(x) = |f(x)|$ دالة متصلة على D .

مثال :
الدالة $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $g(x) = \sqrt{x}$ متصلة على $[0,\infty)$.
إذا كانت $f : D \longrightarrow [0,\infty)$ دالة متصلة على D فإن $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)}$ دالة متصلة على D .

تمارين

(1) إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة فأثبت أن الدالة f^n المعطاة بالقاعدة
$f^n(x) = (f(x))^n \ , \ x \in D \ , \ n \in \mathbb{N}$ أيضاً متصلة على D

(2) افرض أن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان متصلتان
أثبت أن الدالتين $max(f,g)$ و $min(f,g)$ المعرفتين على D كما يلي :
$max(f,g)(x) = max\left\{f(x), g(x)\right\}$ لكل $x \in D$
$min(f,g)(x) = min\left\{f(x), g(x)\right\}$ لكل $x \in D$
متصلتان على D .

(3) أعط مثالاً لدالتين غير متصلتين عند c ، ولكن مجموعهما دالة متصلة عند c .

(4) أعط مثالاً لدالتين إحداهما غير متصلة عند c ، ولكن حاصل ضربهما دالة متصلة عند c .

(5) أعط مثالاً لدالتين إحداهما غير متصلة عند c ، ولكن تحصيلهما دالة متصلة عند c .

3.5 خواص الاتصال على فترة

تعريف :
يقال أن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ محدودة على $E \subseteq D$ إذا وجد عدد $M \geq 0$ بحيث يكون $|f(x)| \leq M$ لكل $x \in E$.
ويقال أن f محدودة إذا كانت محدودة على D .

ملاحظة : الدالة f محدودة $\Longleftrightarrow$ المجموعة $f(D)$ محدودة .

نظرية :
لتكن $I = [a, b]$ فترة مغلقة ومحدودة في R . إذا كانت الدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة فهي محدودة .
البرهان :

تعريف :

(1) نقول أن للدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة صغرى مطلقة على D إذا وجد $x_1 \in D$ بحيث $f(x) \leq f(x_1)$ لكل $x \in D$.

(2) نقول أن للدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة عظمى مطلقة على D إذا وجد $x_2 \in D$ بحيث $f(x) \geq f(x_2)$ لكل $x \in D$.

تسمى القيمتان العظمى والصغرى متى وجدتا قيماً قصوى للدالة .

ملاحظات :

(1) عندما يكون للدالة f قيمة صغرى مطلقة عند x_1 وقيمة عظمى مطلقة عند x_2 فإن $f(D) \subseteq [f(x_1), f(x_2)]$.

(2) القيمة القصوى المطلقة للدالة (متى وجدت) فهي وحيدة وقد تأخذها الدالة عند أكثر من نقطة من نقاط مجالها .

أمثلة :

(1) الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sin x$

قيمتها العظمى المطلقة تساوي 1 وتأخذها الدالة عند القيم $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$.

قيمتها الصغرى المطلقة تساوي -1 وتأخذها الدالة عند القيم $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$.

(2) الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$

ليس لها قيمة عظمى مطلقة .

قيمتها الصغرى المطلقة تساوي 0 وتأخذها الدالة عند $x = 0$.

(3) الدالة $f : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$

ليس لها قيمة عظمى أو صغرى مطلقة على الفترة $(0, 1)$.

نظرية :
إذا كانت I فترة مغلقة ومحدودة وكانت الدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ، فإن للدالة f قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على I .
البرهان :

نظرية (نظرية القيمة البينية) :
إذا كانت $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة . إذا كان λ عدداً حقيقياً يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإن هناك عدداً $c \in (a,b)$ يحقق $f(c) = \lambda$.
البرهان :

نتيجة :
إذا كانت I فترة والدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ، فإن $f(I)$ فترة .
البرهان :

نتيجة :
إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $[a,b]$ فإن $f([a,b])$ فترة مغلقة ومحدودة .
البرهان :

نتيجة :
إذا كانت $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة وكانت إشارتا $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين فإن للدالة f صفراً في الفترة $[a,b]$.
البرهان :

مثال :
إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات درجة فردية فإن لها جذراً حقيقياً واحداً على الأقل .
الحل :

مثال :
إذا كانت $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ دالة متصلة ، فإن الدالة f لها نقطة ثابتة ، أي يوجد $c \in [a,b]$ بحيث $f(c) = c$.
الحل :

نظرية :
إذا كانت I فترة و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. إذا كانت f متصلة ومتباينة فإنها مطردة فعلياً .
البرهان :

تمهيد :
لتكن I فترة , $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مطردة فعلاً على I . إذا كان $g(I)$ فترة فإن g دالة متصلة .
البرهان :

نظرية :
لتكن I فترة و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. إذا كانت f متصلة ومتباينة فإن f^{-1} متصلة ومطردة فعلاً .
البرهان :

مثال :

(1) الدالة $f(x) = x^n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، متصلة ومتزايدة فعلاً على $[0, \infty)$.

وبالتالي دالتها العكسية $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ متصلة ومتزايدة فعلاً على $[0, \infty)$.

(2) لتكن f دالة معرفة على $[0, 1] \cup (2, 3]$ بالقاعدة $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

الدالة f متصلة على D_f ومتباينة .

دالتها العكسية $f^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, 1] \cup (2, 3]$

معرفة بالقاعدة $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

f^{-1} غير متصلة عند $x = 1$.

تمارين

(1) إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة وتحقق التالي :

لكل $x\in[a,b]$ يوجد $y\in[a,b]$ بحيث $|f(y)|\leq\frac{1}{2}|f(x)|$

فأثبت وجود $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$

(2) إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة وتحقق $f(x)>0$ لكل $x\in[a,b]$

فأثبت وجود $\alpha>0$ بحيث $f(x)>\alpha$ لكل $x\in[a,b]$

(3) أعط مثالاً لكثيرة حدود ليس لها جذر حقيقي .

(4) أعط مثالاً لدالة $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ ليس لها نقطة ثابتة .

(5) افرض أن f,g دالتان متصلتان على $[a,b]$ وأن $f(a)\geq g(a)$ و $f(b)\leq g(b)$. أثبت أن هنالك $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=g(x_0)$

(6) أثبت أن للمعادلة $\cos x=x$ حلاً في $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(7) أثبت أن للمعادلة $x2^x=1$ حلاً في $(0,1)$.

(8) عين فترة في $\mathbb{R}$ طولها 1 تحتوي حلاً للمعادلة $xe^x=1$.

(9) لتكن f متصلة على $[0,1]$ وافرض أن $f(0)=f(1)$.

أثبت وجود $c\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ بحيث $f(c)=f\left(c+\frac{1}{2}\right)$

(10) افرض أن الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة وأن $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

أثبت أن f محدودة على $\mathbb{R}$ وأن لها على الأقل قيمة قصوى واحدة .

أعط مثالاً يبين أنه قد لا يكون للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى معاً .

4.5 الاتصال المنتظم

تعريف (الاتصال المنتظم) :
نقول أن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على $A \subseteq D$ إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta(\epsilon) > 0$ بحيث
$x, t \in A \, , \; |x - t| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$

ملاحظات :

(1) $\delta(\epsilon) > 0$ تعني أن δ تعتمد فقط على ϵ ولا تعتمد على أي نقطة من نقاط A .

(2) الاتصال المنتظم يكون على مجموعة .

(3) الدالة المنتظمة الاتصال على مجموعة هي بالضرورة متصلة عند كل نقطة من نقاط المجموعة .

نظرية (معيار عدم الاتصال المنتظم) :
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا وجدت متتاليتين (x_n) و (t_n) في D بحيث

$|x_n - t_n| \longrightarrow 0$ (i)

$|f(x_n) - f(t_n)| \nrightarrow 0$ (ii)

البرهان :

نتيجة :
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال إذا وفقط ذا كان لكل متتاليتين (x_n) و (t_n) في D تحققان $|x_n - t_n| \longrightarrow 0$
فإن $|f(x_n) - f(t_n)| \longrightarrow 0$

مثال :

(1) الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ليست منتظمة الاتصال على $(0, 1)$

الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ منتظمة الاتصال على $[a, \infty)$ حيث $a > 0$.

(2) الدالة $f(x) = x^2$ غير منتظمة الاتصال على $\mathbb{R}$.

نظرية
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة . إذا كانت المجموعة D مغلقة ومحدودة فإن f متصلة بانتظام على D .
البرهان :

مثال :

(1) أي كثيرة حدود $P(x)$ هي دالة متصلة بانتظام على أي فترة $[a, b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$.

(2) الدالتان $\sin x$ و $\cos x$ متصلتان بانتظام على أي فترة $[a, b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$.

الحل :

تعريف :
نقول أن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز إذا كان هنالك عدد ثابت $K > 0$ بحيث $|f(x) - f(t)| < K|x - t|$ لكل $x, t \in D$

نتيجة :
إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز فإنها متصلة بانتظام على D .
البرهان :

مثال :

(1) الدالة $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $a > 0$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تحقق شرط ليبشتز على $[a, \infty)$

(2) الدالة $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $a > 0$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ تحقق شرط ليبشتز على $[a, \infty)$

الحل :

مثال :
الدالة $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام .
الحل :

نظرية :
إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ موجودة و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ موجودة فإن الدالة f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.
البرهان :

نتيجة :

(1) إذا كانت الدالة $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة حيث $a \in \mathbb{R}$ وكانت $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ موجودة فإن الدالة f متصلة بانتظام على $[a, \infty)$.

(2) إذا كانت الدالة $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة حيث $a \in \mathbb{R}$ وكانت $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ موجودة فإن الدالة f متصلة بانتظام على $(-\infty, a]$.

مثال :

(1) الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

(2) الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ حيث $\alpha > 0$ متصلة بانتظام على الفترة $[b, \infty)$ حيث $b > 0$.

(3) الدالة $f(x) = e^{x}$ متصلة بانتظام على الفترة $(-\infty, a]$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

تمهيدية :
إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ وكانت f متصلة بانتظام على D وكانت (x_n) متتالية في D من نوع كوشي فإن $(f(x_n))$ متتالية من نوع كوشي .
البرهان :

نظرية :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\overline{D} = D \cup \widehat{D}$. إذا كانت f متصلة بانتظام على D فإن بالإمكان تمديدها لدالة متصلة بانتظام على $\overline{D}$.
البرهان :

تمارين

(1) عين الدوال المتصلة بانتظام من بين الدوال التالية :

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ على $D = (0, \infty)$

(ii) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ على $D = \mathbb{R}$

(iii) $h(x) = x^{\frac{3}{2}}$ على $D = [0, \infty)$

(2) أثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

(3) أثبت أن الدالة $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

(4) إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام على D فأثبت أن $f+g$ ايضاً متصلة بانتظام على D .
هات مثالاً يوضح أن الدالة $f.g$ ليست بالضرورة متصلة بانتظام .

(5) إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام ومحدودة على D فأثبت أن $f.g$ هي الأخرى متصلة بانتظام .

(6) إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على D و $|f(x)| \geq k > 0$ لكل $x \in D$ حيث k عدد حقيقي ، فأثبت أن الدالة $\dfrac{1}{f}$ متصلة بانتظام على D .

(7) إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على D و D مجموعة محدودة ، فأثبت أن المجموعة $f(D)$ محدودة .

(8) إذا كانت $f : D \longrightarrow E$ و $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين متصلتين بانتظام فأثبت أن $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام على D .

(9) هات مثالاً لدالة متصلة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ومتتالية (x_n) في D من نوع كوشي ولكن المتتالية $(f(x_n))$ ليست من نوع كوشي .

(10) أثبت أن الدالة $f(x) = x \sin x$ ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

(11) تسمى الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دورية إذا وجد عدد ثابت $T > 0$ بحيث $f(x+T) = f(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$
إذا كانت الدالة f متصلة ودورية على $\mathbb{R}$ فأثبت أنها متصلة بانتظام .

5.5 المجموعات المتراصة والاتصال

تعريف (الغطاء المفتوح) :
افرض أن G_λ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ لكل $\lambda \in \Lambda$ ، حيث Λ مجموعة ترقيم . إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ بحيث $E \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ فإن المجموعة $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ تسمى غطاءً مفتوحاً للمجموعة E .
عندما تكون Λ منتهية يسمى الغطاء $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ غطاءً منتهياً .

أمثلة :

(1) تشكل المجموعة $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاءً مفتوحاً للفترة $(0,\infty)$.

(2) تشكل المجموعة $\left\{\left(n-\dfrac{1}{n}, n+\dfrac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ غطاءً مفتوحاً للمجموعة $\mathbb{N}$.

(3) $\{\mathbb{R}\}$ غطاء مفتوح ومنته لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

تعريف (المجموعة المتراصة) :
نقول أن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ متراصة إذا كان كل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة E يحتوي مجموعة جزئية منتهية $\{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \cdots, G_{\lambda_n}\}$ تغطي E .

أمثلة :

(1) المجموعة $\mathbb{R}$ غير متراصة .

(2) الفترة $(0,1)$ غير متراصة .

(3) أي مجموعة منتهية $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ من الأعداد الحقيقية هي مجموعة متراصة .

الحل :

نظرية هاين - بوريل :
تكون المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة .
البرهان :

نظرية :
إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ فالتقارير التالية متكافئة :

(i) المجموعة E متراصة .

(ii) المجموعة E مغلقة ومحدودة .

(iii) لكل متتالية من عناصر E يوجد متتالية جزئية متقاربة من نهاية في E .

البرهان :

نظرية :
إذا كانت D مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$ وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة على D فإن f متصلة بانتظام على D
البرهان :

نظرية :
إذا كانت الدالة f متصلة على المجموعة المتراصة D فإن $f(D)$ أيضاً مجموعة متراصة .
البرهان :

ملاحظات :

(1) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة على D وكانت D مجموعة مفتوحة فليس شرطاً أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة .

مثلاً $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = 1$ لكل $x \in (0,1)$

(2) إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة على D وكانت D مجموعة مغلقة فليس شرطاً أن تكون $f(D)$ مجموعة مغلقة .

مثلاً $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

نتيجة :
إذا كانت الدالة f متصلة على المجموعة المتراصة D فإنه يوجد $x_1, x_2 \in D$ بحيث $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ لكل $x \in D$
البرهان :

نظرية :
إذا كانت D مجموعة متراصة وكانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متباينة ومتصلة فإن $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ أيضاً متصلة .
البرهان :

ملاحظة :

(1) نقول أن المجموعة $E \subseteq D$ مفتوحة في D إذا وجدت مجموعة مفتوحة G في $\mathbb{R}$ بحيث $G \cap D = E$.

(2) نقول أن المجموعة $E \subseteq D$ مغلقة في D إذا وجدت مجموعة مغلقة H في $\mathbb{R}$ بحيث $H \cap D = E$.

نظرية :
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة مفتوحة في D .
البرهان :

نتيجة :
تكون الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.
البرهان :

نظرية :
تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة مغلقة في D .
البرهان :

تمارين

(1) عرف غطاءً مفتوحاً للفترة $(-1,1]$ لا يشمل غطاءً جزئياً منتهياً .

(2) لتكن K مجموعة متراصة و $F \subseteq K$

(i) إذا كانت F مغلقة فأثبت أن F متراصة .

(ii) إذا كانت F مغلقة في K فأثبت أن F متراصة .

(3) إذا كانت كل من K_1, K_2 مجموعة متراصة فأثبت أن كلاً من $K_1 \cup K_2$ و $K_1 \cap K_2$ متراصة .

(4) إذا كانت K_n مجموعة متراصة لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ مجموعة متراصة .

هات مثالاً يبن أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ليس بالضرورة مجموعة متراصة .

(5) إذا كانت K متراصة فأثبت أن $\sup(K) \in K$ و $\inf(K) \in K$.

(6) لأي $D \subseteq \mathbb{R}$ نعرف المسافة بين المجموعة D و $c \in \mathbb{R}$ بأنها $d(c, D) = \inf\{|x-c| : x \in D\}$.

إذا كانت D متراصة فأثبت وجود نقطة $a \in D$ أقرب ما تكون للنقطة c .

(7) افرض أن D متراصة و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة . أثبت أن المجموعة $\{x \in D : 0 \leq f(x) \leq 1\}$ متراصة .

باب 6

التفاضل

1.6 المشتقة وقوانين الاشتقاق

تعريف :

لتكن $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة حيث $I = [a, b]$ ، إذا كان $c \in I$ فإن النهاية $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ متى وجدت ، تسمى مشتقة f عند c ، ويرمز لها بالرمز $f'(c)$.

يقال إن f قابلة للاشتقاق عند c متى وجدت $f'(c)$.

ملاحظات :

(1) إذا كانت $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجودة فإن $f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(2) إذا كانت $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ موجودة فإن $f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$

أمثلة :

(1) إذا كانت $f(x) = k$ لكل $x \in \mathbb{R}$ حيث $k \in \mathbb{R}$ فإن $f'(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(2) إذا كانت $f(x) = x^n$ لكل $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(3) إذا كانت $f(x) = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن $f'(x) = \cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(4) الدالة $f(x) = |x|$ متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

نظرية :

إذا كانت الدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ فهي متصلة عند c .

البرهان :

نظرية :
افرض أن كلاً من الدالتين f و g معرفة على I وقابلة للاشتقاق عند $c \in I$. عندئذ

(1) $f+g$ قابلة للاشتقاق عند c و $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(2) fg قابلة للاشتقاق عند c و $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(3) إذا كانت $g(c) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند c و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}$$

البرهان :

ملاحظات :

(1) في الفقرة (2) من النظرية إذا وضعنا $g = k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ نحصل على $(kf)'(c) = kf'(c)$

(2) $(f-g)'(c) = f'(c) - g'(c)$

(3) $\left(f^2\right)'(c) = 2f(c)f'(c)$

نتيجة :
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن f^n لأي $n \in \mathbb{N}$ قابلة للاشتقاق عند c و $\left(f^n\right)'(c) = nf^{n-1}(c)f'(c)$

مثال :

(1) إذا كانت $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود من الدرجة $n \in \mathbb{N}$ حيث $a_0, a_1, \cdots, a^n \in \mathbb{R}$

فإن $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1$ هي كثيرة حدود من الدرجة $n-1$.

(2) إذا كانت $f(x) = x^{-n}$ حيث $x \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ فإن $f'(x) = -nx^{-n-1}$

نظرية :
لتكن I و J فترتين في $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على I بحيث $f(I) \subseteq J$. ولتكن g دالة معرفة على J . إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $c \in I$ وكانت g قابلة للاشتقاق عند $f(c)$ فإن $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند c و
$(g \circ f)'(c) = g'\left(f(c)\right).f'(c)$
البرهان :

ملاحظات :

(1) قاعدة السلسلة يمكن أن تكتب بالشكل

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$$

(2) إذا وضعنا $w = g(y)$ و $y = f(x)$ فإن

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{dy}.\frac{dy}{dx}=g'(y).f'(x)=g'\left(f(x)\right).f'(x)$$

(3) إذا وضعنا $g(y)=y^n$ حيث $n\in\mathbb{N}$ و $y\in\mathbb{R}$

$$(g\circ f)'(x)=nf^{n-1}(x).f'(x)$$

مثال :

(1) إذا كانت $f(x)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f'(x)=-\sin x$

(2) إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

(3) إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ فإن $f'(0)=0$

نظرية :
لتكن f دالة متباينة ومتصلة على الفترة I . إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $b\in I$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $c=f(b)$ إذا وفقط إذا كانت $f'(b)\neq 0$.
وعندئذ $\left(f^{-1}\right)'(c)=\dfrac{1}{f'(b)}$.
البرهان :

مثال :

(1) الدالة $f(x)=\sin x$ قابلة للاشتقاق ومتصلة على الفترة $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

دالتها العكسية $f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ ومشتقتها $\left(\sin^{-1}x\right)'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) ليكن $q=\dfrac{m}{n}$ حيث $m\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$

الدالة $f(x)=x^q$ قابلة للاشتقاق على $D\setminus\{0\}$ حيث $D=\mathbb{R}$ إذا كانت n عدداً فردياً و $D=[0,\infty)$ إذا كانت n عدداً زوجياً ومشتقتها $f'(x)=qx^{q-1}$

تمارين

(1) افرض أن $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$

اثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ ثم احسب $f'(0)$.

(2) إذا كانت الدالة f تحقق المتباينة $|f(x)| \le |x|^\alpha$ في جوار النقطة 0 وكان $\alpha > 1$ ، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(3) إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فأثبت أن $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

(4) إذا كانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فأثبت أن

(i) إذا كانت f دالة زوجية فإن f' فردية .

(ii) إذا كانت f دالة فردية فإن f' زوجية .

(5) أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة :

(i) $f(x) = \sqrt{|x|}$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = x|x|$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = |x^2 - 1|$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(6) باعتبار $\arccos$ هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = \cos x \; , \; x \in [0, \pi]$

احسب مشتقة $\arccos$ حيثما وجدت في الفترة $[-1, 1]$

2.6 نظرية القيمة المتوسطة

تعريف :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) نقول إن للدالة f قيمة عظمى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار U للنقطة c بحيث

$f(x) \leq f(c)$ لكل $x \in U \cap D$

(2) نقول إن للدالة f قيمة صغرى محلية عند $c \in D$ إذا وجد جوار U للنقطة c بحيث

$f(x) \geq f(c)$ لكل $x \in U \cap D$

ملاحظة :

القيمة العظمى (الصغرى) المطلقة لدالة ما هي قيمة عظمى (صغرى) محلية ولكن العكس غير صحيح .

نظرية :
إذا كانت للدالة قيمة قصوى على الفترة المفتوحة (a, b) عند النقطة c وكانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن $f'(c) = 0$.
البرهان :

تعريف (النقطة الحرجة) :
تسمى النقطة c نقطة حرجة للدالة f إذا كانت f غير قابلة للاشتقاق عند c أو كانت $f'(c) = 0$.

ملاحظات :

(1) إذا حققت الدالة f قيمة قصوى على فترة مفتوحة فهي تحققها عند إحدى نقاط f الحرجة في تلك الفترة .

(2) إذا حققت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة قصوى محلية عند نقطة c تقع داخل D فإن c نقطة حرجة للدالة f .

(3) إذا حققت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة قصوى محلية عند نقطة c تقع على حافة D فإن c قد لا تكون نقطة حرجة للدالة f

مثال $f(x) = x$ على الفترة $[0, 1]$

(4) إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f فليس شرطاً أن تحقق الدالة f قيمة قصوى محلية عند c .

مثال $f(x) = x^3$ و $c = 0$

نظرية (نظرية رول) :
إذا كانت الدالة f تحقق ما يلي :

(i) f متصلة على الفترة $[a, b]$

(ii) f قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b)

(iii) $f(a) = f(b)$

فإن هناك $c \in (a,b)$ بحيث $f'(c) = 0$
البرهان :

نظرية (نظرية القيمة المتوسطة) :
إذا كانت الدالة f

(i) متصلة على $[a,b]$

(ii) قابلة للاشتقاق على (a,b)

فإن هناك نقطة $c \in (a,b)$ بحيث $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

البرهان :

نظرية :
افرض أن الدالة $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b)

(i) إذا كان $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f دالة ثابتة على $[a,b]$

(ii) إذا كان $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f دالة متباينة على $[a,b]$

البرهان :

نتيجة :
افرض أن كلاً من f و g دالة متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b) . إذا كان $f'(x) = g'(x)$ لكل $x \in (a,b)$ فإن هناك عدداً ثابتاً $c \in \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = g(x) + c$ لكل $x \in [a,b]$.
البرهان :

نظرية :
لتكن الدالة f متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b)

(i) إذا كان $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متزايدة على $[a,b]$

(ii) إذا كان $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متناقصة على $[a,b]$

(iii) إذا كان $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متزايدة فعلاً على $[a,b]$

(iv) إذا كان $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$ فإن f متناقصة فعلاً على $[a,b]$

البرهان :

ملاحظات :

(1) إذا أسقطنا شرط الاتصال في النظرية السابقة تبقى النظرية صحيحة ولكن على الفترة (a,b)

(2) الدالة f متزايدة (متناقصة) على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ لكل $x \in (a,b)$

(3) إذا كانت الدالة f متزايدة فعلاً على الفترة $[a,b]$ فليس بالضرورة أن تكون $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$

مثلاً الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة فعلاً على الفترة $[-1,1]$ بينما $f'(0) = 0$

نظرية :
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على D
f' محدودة على D إذا وفقط إذا كانت f تحقق شرط ليبشتز على D
البرهان :

مثال :

(1) الدالة $f : [b, \infty)$ حيث $b > 0$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^{\alpha}$ حيث $0 < \alpha < 1$ تحقق شرط ليبشتز على $[b, \infty)$ وبالتالي متصلة بانتظام على $[b, \infty)$

(2) الدالتان $f(x) \sin x$ و $g(x) = \cos x$ تحققان شرط ليبشتز على $\mathbb{R}$

(3) الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$ تحقق شرط ليبشتز على $\mathbb{R}$

(4) الدالة $f(x) = \ln x$ تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[b, \infty)$ حيث $b > 0$

(5) $e^x \geq 1 + x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

مثال (متباينة برنولي) :
لأي $r \in \mathbb{Q}$ و $r > 1$ فإن $(1 + x)^r > 1 + rx$ لكل $x > -1$ و $x \neq 0$

نظرية (اختبار المشتقة الأولى لتصنيف النقاط الحرجة) :
لتكن c نقطة حرجة للدالة f وافرض أن f متصلة عند c

(i) إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D_f$ حول النقطة c بحيث

$f'(x) < 0 , \ \forall x \in U , \ x < c$ و $f'(x) > 0 , \ \forall x \in U , \ x > c$

فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

(ii) إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D_f$ حول النقطة c بحيث

$f'(x) > 0 , \ \forall x \in U , \ x < c$ و $f'(x) < 0 , \ \forall x \in U , \ x > c$

فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

(iii) إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D_f$ حول النقطة c بحيث يكون للمشتقة $f'(x)$ نفس الإشارة الجبرية لكل $x \in U \setminus \{c\}$ ، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية .

البرهان :

نظرية :
افرض أن f قابلة للاشتقاق ومشتقتها f' متصلة على الفترة المفتوحة I . إذا كانت $b \in I$ و $f'(b) \neq 0$ فإن هنالك فترة مفتوحة $J \subset I$ تحوي b بحيث تكون $f|_J$ متباينة ، والدالة $(f|_J)^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $f(b)$ و $\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b)) = \dfrac{1}{f'(b)}$
البرهان :

ملاحظة :
قابلية دالة ما للاشتقاق على فترة لا تضمن اتصال مشتقتها على تلك الفترة . ولكن عدم اتصالها ليس من النوع القفزي أو القابل

للرفع .

مثال : الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$

نظرية (نظرية داربو) :
افرض أن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق . إذا كان λ يقع بين $f'(a)$ و $f'(b)$ ، فإن هنالك $c\in(a,b)$ بحيث $f'(c)=\lambda$
البرهان :

ملاحظة :
الدالة $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\leq 0\end{cases}$ ليست مشتقة لأي دالة على أي جوار للصفر ، وذلك لعدم تحقيقها لنظرية داربو على ذلك الجوار .

تمارين

(1) عرف دالة $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث تكون متصلة على $[0,1]$ ، وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$ ، وتحقق $f(0)=f(1)=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 و 1 . أوجد النقطة $c\in(0,1)$ التي تحقق $f'(c)=0$.

(2) أعط مثالاً يوضح أن عدم وجود $f'(x)$ عند نقطة ما x في (a,b) يخل بنظرية القيمة المتوسطة .

(3) أثبت أن $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$

(4) إذا كانت $f''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ فأثبت أن f دالة خطية على (a,b) ، أي أن هناك ثابتين c_1,c_2 بحيث $f(x)=c_1x+c_2$ لكل $x\in(a,b)$

(5) أثبت مايلي :

(i) $x<\tan x$ لكل $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(ii) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ فإن f متزايدة على $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(iii) $x\leq\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$ لكل $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(iv) $\sqrt{1+x}\leq1+\frac{1}{2}x$ لكل $x>0$

(6) إذا كانت كل من f و g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وكانت $f'(x)<g'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$

فأثبت أن لكل $a\in\mathbb{R}$ فإن $f(x)-f(a)\leq g(x)-g(a)$ لكل $x\in[a,\infty)$

(7) افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $1\leq f'(x)\leq2$ لكل $x\in\mathbb{R}$. إذا كانت $f(0)=0$

فأثبت أن $|x|\leq|f(x)|\leq2|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

(8) لتكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b) . إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ موجودة وتساوي l فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند a وأن $f'(a)=l$.

(9) افرض أن c نقطة حرجة للدالة f وأن f' قابلة للاشتقاق في جوار c . أثبت ما يلي :

(i) إذا كانت $f''(c)>0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية .

(ii) إذا كانت $f''(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية .

(10) افرض أن f متصلة على $[0,\infty)$ وقابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$. إذا كانت f' متزايدة على $(0,\infty)$ و $f(0)=0$ فأثبت أن الدالة $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ متزايدة على $(0,\infty)$.

(11) افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $f(0)=0$ ، $f(1)=f(2)=-1$. أثبت وجود c_1,c_2,c_3 في $(0,2)$ بحيث

(i) $f'(c_1)=-\dfrac{1}{2}$

(ii) $f'(c_2)=-\dfrac{3}{4}$

(i) $f'(c_3)=-\dfrac{1}{11}$

(12) على افتراض $0<a<b$ وأن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ ، أثبت أن $b^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}<(b-a)^{\frac{1}{n}}$

(13) إذا كانت f و g دالتان متصلتان على الفترة $[a,b]$ وقابلتان للاشتقاق على (a,b) و $f(a)=f(b)$ و $g(a)=g(b)$ فأثبت وجود $c\in(a,b)$ يحقق $f'(c)+f(c)g'(c)=0$

3.6 قاعدة لوبيتال

نظرية (نظرية كوشي للقيمة المتوسطة):
إذا كانت كل من f و g متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b) فإن هناك $c \in (a,b)$ بحيث
$$[f(b)-f(a)]\,g'(c) = [g(b)-g(a)]\,f'(c)$$
البرهان :

نظرية (قاعدة لوبيتال):
افرض أن f و g دالتان متصلتان على فترة ما I تحتوي النقطة c ، وأن كلاً منهما قابلة للاشتقاق على $I\backslash\{c\}$. إذا كان

(i) $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I\backslash\{c\}$

(ii) $f(c) = g(c) = 0$

(iii) النهاية $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$

فإن $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
البرهان :

أمثلة :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ غير موجودة .

نظرية :
افرض أن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $[a,\infty)$ حيث $a>0$. إذا كان

(i) $g'(x) \neq 0$ لكل $x > a$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

(iii) النهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$

فإن $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
البرهان :

أمثلة :

(1) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ و $g(x) = \sin x$

احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(2) احسب $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$

نظرية :
افرض أن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على (a, b) . إذا كان

(i) $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

(iii) النهاية $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

فإن $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

البرهان :

تمارين

(1) إذا كانت $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة في $\mathbb{R}$ ، وكانت $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

(2) أوجد دالتين f و g قابلتين للاشتقاق على $(0,\infty)$ بحيث $g(x) \neq 0$ لكل $x \in (0,\infty)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ ، ولكن النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$.

(3) عرف دالتين f و g في جوار الصفر بحيث يكون $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ولكن $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة.

(4) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في الفترة $(0,\infty)$ وكانت $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجودة

- إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ موجودة فأثبت أنها تساوي الصفر .
- أعط مثالاً تكون فيه $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ غير موجودة .

(5) إذا كانت $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق مرتين و g'' متصلة و $g(0) = g'(0) = 0$ و $g''(0) = 6$ وكانت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل $x \neq 0$

- أحسب $f(0)$.
- هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر ؟

4.6 نظرية تيلور

نظرية (نظرية تيلور) :
افرض أن كلاً من f ومشتقاتها $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ متصلة على $[a,b]$ وأن $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كانت $x_0 \in [a,b]$ فإن لأي $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ توجد نقطة c تقع بين x و x_0 بحيث

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

البرهان :

ملاحظات :

(1) بوضع $n = 0$ نحصل على نظرية القيمة المتوسطة .

(2) المقدار $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ يسمى صيغة لاقرانج لباقي تايلور .

أمثلة :

(1) أكتب مفكوك تيلور للدالة e^x عند النقطة $x_0 = 0$ ، وبين أن $R_n(x) \longrightarrow 0$

(2) قرب العدد e بحيث لا يتجاوز الخطأ 10^{-6} .

(3) إذا كانت $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_n(x)$ لكل $|x| < 1$ فبين أن $R_n(x) \longrightarrow 0$.

نظرية (نظرية ينق) :
افرض أن كلاً من f ومشتقاتها إلى الرتبة n متصلة على $[a,b]$ وأن $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in [a,b]$. إذا كان $x \in [a,b]$ فإن

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + E$$

حيث $\dfrac{E}{(x-x_0)^{n+1}} \longrightarrow 0$ عندما $x \longrightarrow x_0$.

البرهان :

نتيجة :
افرض أن $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0$ وأن $f^{(m)}(c) \neq 0$

(i) إذا كان m عدداً فردياً فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية للدالة f .

(ii) إذا كان m عدداً زوجياً وكانت $f^{(m)}(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f .

(iii) إذا كان m عدداً زوجياً وكانت $f^{(m)}(c) > 0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f .

البرهان :

تمارين

(1) أثبت أن باقي تيلور للدالة $f(x) = \sin x$ يقترب من الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ لكل x و x_0 في $\mathbb{R}$.

(2) أثبت أن $\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$ لكل $x \in (0,1]$

ثم استخدم هذه المتباينة لتقريب $\ln 1.3$ بحيث لا يتعدى الخطأ 0.001 .

(3) حدد ما إذا كانت $f(0)$ قيمة قصوى للدالة f في الحالات الالية :

(i) $f(x) = \cos x - 1$

(ii) $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$

(iii) $f(x) = x \sin x$

(4) أثبت أن $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ لكل $x > 0$.

استخدم هذه المتباينة لتقريب $\sqrt{2}$ و $\sqrt{1.2}$

(5) أثبت أن $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(6) أثبت أن $\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040}$ لكل $|x| < 1$.