Mémoire

présentée en vue de l'obtention de
DEA de l'Université des Sciences et Technologies de Lille I
Spécialité : Mathématiques Pures
par

Borhen HALOUANI

Variétés complexes, presque-complexes et de Cauchy-Riemann
&
Problèmes d'intégrabilités et de plongements

Soutenue le 27 septembre 2002 devant le jury composé de :

P. Dèbes	Professeur, Université de Lille	Président
J. Michel	Professeur, Université du Littoral	Directeur
P. Honvault	MCF, Université du Littoral	Examinateur

U.M.R. CNRS 8524, UFR de Mathématiques, Université de Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur Joachim Michel, professeur à l'université du Littoral Côte d'Opale, c'est à lui qui va tout particulièrement ma reconnaissance pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordée. Ses qualités humaines et scientifiques, sa disponilité, sa gentillesse qu'il manifestait chaque fois que je m'adresse à lui, les conseils et la clarté des explications qu'il me prodiguait, je tiens à le remercier du fond du cœur.

Je remercie très sincèrement Monsieur Pierre Dèbes, professeur à l'université des sciences et technologies de Lille 1, qui me fait l'honneur de présider mon jury de DEA.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Pascal Honvault qui est intéressé à ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux Messieurs H. El Mir et K. Mokni, professeurs à la faculté des sciences de Monastir, ils m'ont encouragé à poursuivre mes études de troisième cycle. Qu'ils y trouvent ma profonde reconnaissance.

Je dédie ce mémoire de DEA à mes parents pour que j'éprouve un grand amour et un profond respect que je tiens à leur exprimer ici, de la manière la plus humble.

Introduction

On commence par définir les variétés différentiables, les variétés analytiques réelles et complexes. Puis, on va entamer d'autres types des variétés : variétés presque complexes, variétés intégrales et variétés de Cauchy-Riemann en utilisant des ingrédients géométriques et algèbriques : complexification des espaces et des formes, théorème de Frobenius.

Ensuite, on étudie le théorème de Newländer-Nirenberg qui prouve que si M est une variété portant une structure presque complexe et involutive est une variété complexe. Puis, on traite le théorème de plongement le cas où la variété est analytique réelle et on termine par la présentation le contre-exemple de Nirenberg qui montre que les variétés C^{∞} ne sont pas généralement plonger dans $\mathbb{C}^n$.

Table des matières

Chapitre 1

Variétés

Ce chapitre est consacré à rappeler de quelques propriétés concernant la notion de la variété et la notion de fibré qu'on va les utiliser dans la suite.

1.1 Définitions et remarques.

Définitions 1.1.1
1) Soit M un espace topologique vérifiant les propriétés suivantes :
i) Il est séparé.
ii) Il est à base dénombrable.
iii) Il existe un entier $m > 0$ tel que tout point de M posséde un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$.
Dans ces conditions, on dira que M est un espace localement euclidien de dimension m.
Si l'ouvert de M est U et si l'homéomorphisme est $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, le couple (U, φ) s'appelle une carte locale. C'est une carte locale au voisinage de p si $p \in M$.
Les composantes de $\varphi(p)$ s'appellent les fonctions coordonnées associées à la carte (U, φ).
2) Soit M un espace localement euclidien. Soient (U, φ), (V, ψ) deux cartes de M. On dira que ces cartes sont C^∞-compatibles si soit que les applications de changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ \psi^{-1}$ sont des difféomorphismes C^∞ soit que $U \cap V = \emptyset$.
3) Soit M un espace localement euclidien de dimension m. On dira que M est muni d'une structure différentiable (où de classe C^∞) lorsqu'on se donne une

famille $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \ / \ \alpha \in A\}$ des cartes locales indexées par un ensemble d'indices A, telle que :

c_1) Les U_α recouvrent M : $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

c_2) $\forall \alpha$ et $\forall \beta \in A$, les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (U_β, φ_β) sont C^∞-compatibles.

c_3) Toute carte locale (U, φ) de M compatible avec chaque $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in A$ est un élément de Ω.

On appellera variété différentiable de dimension m un espace localement euclidien de dimension m muni d'une structure différentiable. Une famille de cartes locales vérifiant c_1) et c_2) s'appelle un atlas.

4) Soit M un espace (soumis aux mêmes conditions c_1) et c_2)) est recouvert par des domaines U_α homéomorphes à des boules à $2m$ (respectivement à m) dimensions. Soient $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha$, où U'_α un ouvert de $\mathbb{C}^m$ (respectivement $\mathbb{R}^m$) ces homéomorphismes. On dit qu'un atlas $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \ / \ \alpha \in A\}$ est complexe (respectivement analytique réel) si, les changements de cartes $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$; $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sont toutes des applications biholomorphes (respectivement analytiques réelles) sur des ensembles ouverts correspondants de $\mathbb{C}^m$ (respectivement $\mathbb{R}^m$). Le couple (M, Ω) s'appelle variété complexe (respectivement variété analytique réelle).

Le nombre $m = \dim_{\mathbb{C}} M$ est la dimension complexe de la variété M.

5) Soit N une partie de M où M est une variété complexe de dimension n. N est une sous variété complexe de dimension m si

(i) N est une partie relativement fermée d'un ouvert U de M.

(ii) Pour tout $p \in N$, dans un voisinage ouvert W de p, il existe un système des coordonnées locales $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ tel qu'on ait :

$$N \cap \ W = \{w \in W \ /\varphi_{m+1}(w) \ = ... = \varphi_n(w) = 0\}.$$

1.2 Notion de la géométrie.

Définitions 1.2.1

1) Soient M et N deux variétés différentiables de dimension respectivement m et n. Soit $f : M \to N$ une application. On dit que f est différentiable au point $p \in M$, si on peut trouver (U, φ) une carte locale de M au voisinage de p et une carte locale (V, ψ) de N au voisinage de $f(p)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit différentiable sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, (on suppose que $f(U) \subset V$).

On dira que f est un difféomorphisme de M sur N si :

i) f est différentiable.
ii) f est une bijection de M sur N.
iii) $f^{-1} : N \to M$ est différentiable.
Dans ces conditions, on a : $\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{R}} N$.
2) On appelle vecteur tangent en p à M, une application X_p de $C^{\infty}(M)$[1] *dans $\mathbb{R}$ telle que, pour $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et f, $g \in C^{\infty}(M)$, on ait :*
i) $X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p f + \mu X_p g$.
ii) $X_p(f.g) = f(p).X_p g + g(p).X_p f$.
iii) Si la fonction $f = c$ est une constante, on a $X_p c = 0$.

Remarque 1.2.1
Si f est définie et est de classe C^{∞} au voisinage de p et $g : M \to \mathbb{R}$ de C^{∞} avec $f = g$ dans un voisinage de p, on pose $X_p f = X_p g$. Cette définition donne lieu à une relation d'équivalence dont les classes sont des germes de f.

L'ensemble des vecteurs tangents sur la variété M au point p forme l'espace tangent, il est noté $T_p(M)$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de même dimension à celle de la variété M.
Soient $f : M \to N$ une application différentiable (M et N sont deux variétés différentiables de dimensions respectivement m et n), $p \in M$ et $X_p \in T_p(M)$.
L'application $g \longmapsto X_p(g \circ f)$ est un vecteur tangent en $f(p)$ à N, noté $f_{*p}(X_p)$. On a donc $f_{*p}(X_p)(g) = X_p(g \circ f)$, $\forall g \in C^{\infty}(N)$.
L'application : $f_{*p} : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ est linéaire. On l'appelle la différentielle de f en p.
On a ainsi les diagrammes commutatifs suivants si (U, φ) est une carte de M au voisinage de p et (V, ψ) est une carte de N au voisinage de $f(p)$ avec $f(U) \subset V$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \psi(V) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} T_p(M) & \xrightarrow{f_{*p}} & T_{f(p)}(N) \\ \varphi_{*p} \downarrow & & \downarrow \psi_{*f(p)} \\ T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*\varphi(p)}} & T_{\psi \circ f(p)}(\mathbb{R}^n) \end{array}.$$

On peut montrer que si $f : M \to N$ et $g : L \to M$ sont deux applications de classe C^{∞} , on a

$$(f \circ g)_{*a} = f_{*g(a)} \circ g_{*a}.$$

Ici M, N et L sont des variétés de classe C^{∞} et $a \in L$. En particulier, si f est un difféomorphisme local dans un voisinage de $p \in M$ alors $(f^{-1})_{*f(p)} =$

[1] $C^{\infty}(M)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^{∞} sur un ouvert contenant M

$(f_{*p})^{-1}$.
Soit M est une sous variété réelle de $\mathbb{C}^n$ de dimension m, définie localement dans un voisinage U d'un point $p \in M$ par $k = 2n - m$ équations $\varphi_\mu(z) = 0$, où les φ_μ sont des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ et le $rang\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\nu}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \overline{z}_\nu}\right) = k$, (ici $\mu = 1, ..., k$ et $\nu = 1, ..., n$). L'espace tangent à M en p est donné par :

$$T_p(M) = \{v = \sum_{1 \le \nu \le n} \left(a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \overline{a}_\nu \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\right) / v(\varphi_1) = ... = v(\varphi_k) = 0\}.$$

Ici, les dérivées de φ sont prises au point p et les a_ν sont des fonctions de classe C^∞ au voisinage de p.

Définitions 1.2.2
1) Soit M, N deux variétés différentiables de dimensions respectivement m et n et $f : M \to N$ une fonction de classe C^∞. Soit $p \in M$, (U, φ) une carte de M au voisinage de p et (V, ψ) une carte de N au voisinage de $f(p)$. Si $f(U) \subset V$ alors l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

est de classe C^∞.
On appelle rang de f en p, le rang de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$. Le rang de f ne dépend pas des cartes choisies.
On dira que f est une immersion en p si le rang de f en p est égal à $m = \dim M$, $(m \le n)$.
On dira que f est un plongement si
(i) f est une immersion injective $(m \le n)$.
(ii) f est un homéomorphisme de M sur $f(M)$ où $f(M)$ est muni de la topologie induite celle de N.
On dit que f est une submersion en p si le rang de f en p est égal à $n = \dim N$, $(m \ge n)$.
2) Soit U un ouvert de la variété M. On appelle dérivation de l'algèbre $C^\infty(U)$, toute application linéaire $D : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ telle que pour tout f, $g \in C^\infty(U)$, on ait

$$D(f.g) = f.Dg \ + \ g.Df.$$

Un champ de vecteurs X sur un ouvert U de M est la donnée pour chaque $p \in U$ un vecteur tangent $X_p \in T_p(M)$.

Remarques 1.2.1
1) Si X est un champ de vecteurs C^∞ alors l'application $f \mapsto Xf$ est une dérivation de $C^\infty(U)$. Inversement, si D est une dérivation de $C^\infty(U)$ alors il existe un champ de vecteurs X, C^∞, unique tel que $Df = Xf$.
2) Soient X et Y sont deux champs de vecteurs définis sur U. L'application $[\ ,\ ] : \begin{cases} C^\infty(U) & \rightarrow & C^\infty(U) \\ f & \longmapsto & X(Yf) - Y(Xf) \end{cases}$ est une dérivation de $C^\infty(U)$.
Donc, on a un champ de vecteurs noté $[X, Y]$. Il est appelé le crochet de Lie de X et Y.

Exemple 1.2.1
$M = \mathbb{R}^n$ et on munit $\mathbb{R}^n$ par ces coordonnées canoniques $(x_1, ..., x_n)$. On a cette propriété : si $X = \sum_{1 \le i \le n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{1 \le j \le n} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $Z = [X, Y] = \sum_{1 \le k \le n} \zeta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ alors, pour tout $1 \le k \le n$, on a

$$\zeta_k = \sum_{1 \le p \le n} \xi_p \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_p}\right) - \eta_p \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_p}\right).$$

1.3 Notion de fibré.

Définition 1.3.1
Soient B, E et F trois variétés différentiables. Une application $\pi : E \to B$ de classe C^∞ est un fibré de fibre F si

- *π est surjective.*
- *$\exists$ un recouvrement dénombrable d'ouverts $\{U_i\ ,\ i \in I\}$ de B et des difféomorphismes $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \underset{C^\infty}{\sim} \to U_i \times F$ tels que ce diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \overset{\varphi_i}{\underset{\sim}{}} \rightarrow & U_i \times F \\ \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \\ \pi & U_i & pr1 \end{array}$$ *soit commutatif.*

Une section de $\pi : E \to B$ est une application $s : B \to E$ de classe C^∞ vérifiant $\pi \circ s = Id_B$.
Si le passage d'une carte à une autre induit une application linéaire sur F, on dira que le fibré est vectoriel.

Exemples 1.3.1
1) $E = B \times F$ où $\pi : B \times F \to B$ est la projection.
2) F est une variété de dimension 0, un fibré de fibre F s'appelle un revêtement.

1.3.1 Propriétés.

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, pour $i, j \in I$, on a :

$$U_i \cap U_j \times F \leftarrow \frac{\varphi_i}{\sim} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \frac{\varphi_j}{\sim} \rightarrow U_i \cap U_j \times F.$$

(i) Pour tout $x \in U_i$, $\varphi_{ii}(x) = Id$.
(ii) Pour tout $x \in U_i \cap U_j$, $\varphi_{ij}^{-1}(x) = \varphi_{ji}(x)$.
(iii) Pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, $\varphi_{ij}(x) = \varphi_{ik}(x) \circ \varphi_{kj}(x)$. Cette dernière propriété est dite propriété de cocycle.

1.3.2 Construction d'un fibré.

On se donne deux variétés B, F de classe C^∞ et un recouvrement $\{U_i, i \in I\}$ de B par des ouverts. On suppose que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les applications $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to Diff\acute{e}o\,(F)^2$, telles que $\left\{ \begin{array}{ccc} U_i \cap U_j \times F & \to & F \\ (x, \xi) & \longmapsto & \varphi_{ij}(x)\,\xi \end{array} \right.$ soient de classe C^∞ et vérifient les propriétés (i), (ii) et (iii).
Maintenant, on pose $E = \bigcup_{i \in I} U_i \times F \setminus \backsim$ où $\backsim$ est la relation d'équivalence suivante : $(x_i, \xi_i) \backsim (x_j, \xi_j) \Longleftrightarrow (x_i = x_j)$ et $\xi_i = \varphi_{ij}(x)\,\xi_j$.
Dans ce cas, on vérifie que E est une variété différentiable et que π : $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ [x_i, \xi_i] & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est un fibré de fibre F.

Remarque 1.3.1
La notion de fibré vectoriel se généralise sans changements aux variétés analytiques complexes. De plus, il est naturel de prendre $\mathbb{C}^n$ pour fibre. Dans ce cas, on peut mettre en évidence une classe de fibrés holomorphes. C'est-à-dire, des fibrés dont les φ_{ij} sont holomorphes. Ainsi pour les fibrés holomorphes, on peut envisager des sections holmorphes parallèlement aux sections continues et différentiables.

[2]Difféo(F) désigne l'ensemble des C^∞-difféomorphismes sur F

Exemple 1.3.1
$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ est un fibré de fibre $\mathbb{C}^*$ (la droite complexe privée d'un point). Ici $\mathbb{CP}^n$ désigne l'espace projective complexe.

1.3.3 Exemples des fibrés.

(1) Fibré Tangent : Soit M est une variété C^∞, de dimension n.

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M),$$

où $T_x(M)$ l'espace tangent réel de M au point x. $T(M)$ est un fibré vectoriel car pour tout $x \in M$, le fibre $F = \pi^{-1}(x) = T_x(M)$ est un espace vectoriel réel isomorphe à $\mathbb{R}^n$. En effet, si $\{(U_i, \psi_i)\}$ est un atlas de M et $x \in U_i \cap U_j$, on prend

$$\varphi_{ij}(x) = d_{\psi_j(x)}\left(\psi_i \circ \psi_j^{-1}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

C'est un difféomorphisme linéaire.
Une section de $\pi : T(M) \to M$ s'appelle un champ de vecteurs sur M.

(2) Fibré cotangent :

$$T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*(M) = \bigcup_{x \in M} \{f : T_x(M) \to \mathbb{R},\ f \textit{ est une forme linéaire}\}.$$

Ici, le fibre est $(\mathbb{R}^n)^*$. En effet, Soient $\{(U_i, \psi_i)\}$ un atlas de M et $x \in U_i \cap U_j$. Une forme linéaire $f : T_x(M) \to \mathbb{R}$ se lit dans U_i par $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et dans U_j par $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ainsi, on obtient ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow[\sim]{A_{ij}(x)} & \mathbb{R}^n \\ \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \\ f_i & \mathbb{R} & f_j \end{array}, \text{ où } A_{ij}(x) = d_{\psi_j(x)}\left(\psi_i \circ \psi_j^{-1}\right).$$

On prend $\varphi_{ij}(x) ={}^t A_{ij}(x)$, ($t$ représente la transposée d'une matrice).

$$\pi : T^*(M) \to M$$

est un fibré vectoriel et une section de ce fibré s'appelle 1-forme différentielle sur M.

(3) Fibré $T_p^q(M)$:

$$T_p^q(M) = \bigcup_{x \in M} (T_x(M))^{\otimes p} \otimes (T_x^*(M))^{\otimes q}.$$

C'est un fibré vectoriel. Le fibre est $(\mathbb{R}^n)^{\otimes p} \otimes (\mathbb{R}^n)^{* \otimes q}$. En effet, on prend $\{U_i, \psi_i\}$ un atlas de M. Les cocycles en $x \in U_i \cap U_j$ sont donnés par :

$$\varphi_{ij}(x)(u_1 \otimes ... u_p \otimes v_1 \otimes ... v_q) = A_{ij}(x)u_1 \otimes ... A_{ij}(x)u_p \otimes^t A_{ji}(x)v_1 \otimes ...^t A_{ji}(x)v_q.$$

Une section de $T_p^q(M) \to M$ s'appelle tenseur de type (p, q).

Exemple 1.3.2
Le tenseur de type $(0, q)$ qui soit alterné en tout point de M s'appelle q-forme différentielle sur M.

Définition 1.3.2
Soit l'application $f : M \to N$ de classe C^∞ entre deux variétés différentiables M et N. L'image-réciproque (pull-back) est l'application transposée (l'adjointe) de f_*. On la note, pour un point $p \in M$, par $f_p^* : T_{f(p)}^*(N) \to T_p^*(M)$. Elle est défini par

$$< f^*\Phi | L >_p = < \Phi | f_* L >_{f(p)}, \ \forall \ \Phi \in T_{f(p)}^*(N) \ et \ L \in T_p(M).$$

Remarques 1.3.1
1) Soit $g : L \to M$ une application de classe C^∞ (L est une variété C^∞). On montre que, pour tout $p \in L$, $(f \circ g)_p^* = g_p^* \circ f_{g(p)}^*$.
2) Si ω est une r-forme différentielle sur M, ω peut s'écrire sous la forme suivante : $\omega = \varphi_1 \bigwedge ... \bigwedge \varphi_r$ où φ_i est 1-forme différentielle sur M. De plus, on a cette propriété :

$$f^*(\varphi_1 \bigwedge ... \bigwedge \varphi_r) = f^*(\varphi_1) \bigwedge ... \bigwedge f^*(\varphi_r).$$

Chapitre 2

Complexification des espaces et des formes

Dans ce chapitre, on va tout d'abord complexifier les espaces vectoriels réels en redoublant la dimension réelle pour avoir un espace vectoriel complexe, puis on va complexifier les formes différentielles.

2.1 Complexification d'un espace vectoriel réel.

Soit V un espace vectoriel réel. La complexification de V est donnée par le produit tensoriel $V \otimes \mathbb{C}$. $V \otimes \mathbb{C}$ est engendré par $v \otimes 1$ et $v \otimes i$ où $v \in V$. On munit $V \otimes \mathbb{C}$ d'une structure complexe :

$$\alpha\,(v \otimes \beta) = v \otimes \alpha\beta \qquad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ v \in V.$$

On note un élément de $V \otimes \mathbb{C}$ par αv et son conjugué $\overline{\alpha v} = \overline{v \otimes \alpha} = v \otimes \overline{\alpha} = \overline{\alpha} v$. Dans ce cas, si $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ alors $\dim_{\mathbb{C}} V \otimes \mathbb{C} = n$.

Exemple 2.1.1
Soient M une variété réelle de classe C^∞ de dimension n et $p \in M$. On définit la complexification de l'espace tangent réel $T_p\,(M) \otimes \mathbb{C}$ comme ci-dessus. La complexification de l'espace cotangent $T_p^*\,(M) \otimes \mathbb{C}$ est défini par

$$< \Phi \otimes \alpha | L \otimes \beta >_p = < \Phi | L >_p \alpha.\beta,$$

où $\Phi \in T_p^*\,(M)$ et $L \in T_p\,(M)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
Analoguement, le fibré tangent complexifié $T\,(M) \otimes \mathbb{C}$ est donné par :

$$\bigcup_{p\in M} T_p\left(M\right)\otimes\mathbb{C}.$$

De même, le fibré cotangent complexifié : $T^*\left(M\right)\otimes\mathbb{C}=\bigcup_{p\in M} T_p^*\left(M\right)\otimes\mathbb{C}$.

On note $\varepsilon^r\left(M\right)$ *l'espace des sections de* $\bigwedge^r T^*\left(M\right)\otimes\mathbb{C}$. *C'est l'espace des formes différentielles complexifiées de degré* r. *Un élément* Φ *de* $\varepsilon^r\left(M\right)$ *est exprimé dans un système de coordonnées au voisinage* U *de* p ; $h\left(h_1,...,h_n\right): U\subset M\rightarrow\mathbb{R}^n$ *par* $\Phi=\sum_{|I|=r}\Phi_I dh^I$ *où les fonctions* $\Phi_I: U\rightarrow\mathbb{C}$ *sont de classe* C^∞ *sur* U.

2.2 La structure complexe.

Définition 2.2.1

Soit V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Une application linéaire* $J: V\rightarrow V$ *est dite une application de structure complexe si* $J\circ J=-Id_V$.

Remarques 2.2.1

1) Si $\dim_{\mathbb{R}} V=n$ *alors* $\left(\det J\right)^2=\left(-1\right)^n$. *Donc* n *est pair.*

2) Si on complexifie V, J *admet une structure* $\mathbb{C}$*-linéaire :*

$$J\left(\overline{v}\right)=\overline{Jv},\ \forall v\in V\otimes\mathbb{C}.$$

En effet, si $v\in V\otimes\mathbb{C}$, *il existe* $v_1\in V$ *et* $\alpha\in\mathbb{C}$ *tels que* $v=v_1\otimes\alpha=\alpha v_1$, $J(\overline{\alpha v_1})=J(\overline{\alpha}v_1)=\overline{\alpha}J(v_1)=\overline{\alpha J(v_1)}=\overline{J(\alpha v_1)}$. *Comme* $J\circ J=-Id_{V\otimes\mathbb{C}}$ *alors* J *admet* $\pm i$ *comme valeurs propres sur* $V\otimes\mathbb{C}$.

On note $V^{1,0}$ *l'espace propre de* $V\otimes\mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* $(+i)$ *et* $V^{0,1}$ *l'espace propre de* $V\otimes\mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* $(-i)$. *Alors, on a* $V\otimes\mathbb{C}=V^{1,0}\oplus V^{0,1}$. *De plus* $\overline{V^{1,0}}=V^{0,1}$.

Comme les valeurs propres de J *sont des nombres complexes. Dans ce cas, si* $\{v_1,...,v_n\}$ *est une base de* V *alors* $\{v_1,Jv_1,...,v_n,Jv_n\}$ *est une base réelle de* $V\otimes\mathbb{C}$. *Ceci implique :* $\{v_1-iJv_1,...,v_n-iJv_n\}$ *forme une base de* $V^{1,0}$ *et* $\{v_1+iJv_1,...,v_n+iJv_n\}$ *forme une base de* $V^{0,1}$.

Exemples 2.2.1

1) $V=T_p\left(\mathbb{R}^{2n}\right)\backsimeq T_p\left(\mathbb{C}^n\right)$, *on munit* $\mathbb{R}^{2n}$ *par ces coordonnées canoniques* $(x_1,y_1,...,x_n,y_n)$. *On définit ainsi, pour* $p\in M$, *l'application* $J_p: T_p(\mathbb{R}^{2n})\rightarrow T_p(\mathbb{R}^{2n})$ *donnée par*

$$J_p(\frac{\partial}{\partial x_i}) = (\frac{\partial}{\partial y_i}) \text{ et } J_p(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -(\frac{\partial}{\partial x_i}), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

L'application J_p est dite une application de structure complexe.
De même, son dual $J_p^* : T_p^*(\mathbb{R}^{2n}) \to T_p^*(\mathbb{R}^{2n})$ est défini par

$$J_p^*(dx_j) = -dy_j \text{ et } J_p^*(dy_j) = dx_j, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

2) Soient M une variété complexe de dimension n et $p \in M$. L'application $J_p : T_p(M) \to T_p(M)$ est définie par $J_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) = (\frac{\partial}{\partial y_j})$ et $J_p(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -(\frac{\partial}{\partial x_j})$ avec $1 \leq j \leq n$. On a $(\frac{\partial}{\partial x_j}) - iJ_p(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j} = 2\frac{\partial}{\partial z_j}$ est un élément de $T^{1,0}(M)$.
De même, on a $(\frac{\partial}{\partial x_j}) + iJ(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ est un élément de $T^{0,1}(M)$.
Analoguement, on vérifie que $T_p^*(M) = T_p^{*1,0}(M) \oplus T_p^{*0,1}(M)$ où $\{dz_1, ..., dz_n\}$ constitue une base de $T_p^{*1,0}(M)$ et $\{d\overline{z}_1, ..., d\overline{z}_n\}$ constitue une base de $T_p^{*0,1}(M)$.

Lemme 2.2.1 *Soit V un espace vectoriel réel. Soit $\pounds$ un sous espace vectoriel complexe de $V \otimes \mathbb{C}$ vérifiant :*
(a) $\pounds \cap \overline{\pounds} = \{0\}$.
(b) $\pounds \oplus \overline{\pounds} = V \otimes \mathbb{C}$.
Alors, il existe une et une seule application de structure complexe J sur V telle que $\pounds$ et $\overline{\pounds}$ soient les sous espaces propres associés respectivement aux valeurs propre $(+i)$ et $(-i)$ de l'extension J sur $V \otimes \mathbb{C}$.

Preuve.
Considérons une application $J^{\mathbb{C}} : V \otimes \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}$ vérifiant

$$J^{\mathbb{C}}(L) = iL \text{ si } L \in \pounds \text{ et } J^{\mathbb{C}}(L) = -iL \text{ si } L \in \overline{\pounds}.$$

La propriété (a) montre que $J^{\mathbb{C}}$ est bien définie. La propriété (b) montre que $J^{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. On pose $J = J^{\mathbb{C}} \backslash (V = V \otimes 1)$. Montrons que J est une application de structure complexe sur V.
Prenons les vecteurs $X = L + \overline{L}$ si $L \in \pounds$ et $Y = i\left(L - \overline{L}\right)$ si $L \in \overline{\pounds}$. Il est clair que $X = \overline{X}$ et $Y = \overline{Y}$. C'est-à-dire que X et Y sont deux vecteurs réels. Or $\pounds \oplus \overline{\pounds} = V \otimes \mathbb{C}$. Alors, V est engendré par des vecteurs de la forme X et Y. Comme $J^{\mathbb{C}}(X) = Y$ et $J^{\mathbb{C}}(Y) = -X$ alors $J \circ J = -Id_V$. Ceci achève la preuve du lemme. $\square$

2.3 Complexification des formes.

Soient M une variété complexe de dimension n et $0 \leq r \leq 2n$. On définit $\bigwedge^r T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ le fibré de r-formes complexifiées et $\varepsilon^r(M)$ l'espace des sections de r-formes différentielles.
Pour $0 \leq p, q \leq n$ avec $p+q=r$, on considère l'application

$$\pi_{p,q} \ : \bigwedge^r (T^*(M) \otimes \mathbb{C}) \to \bigwedge^{p,q} (T^*(M) \otimes \mathbb{C}).$$

$\pi_{p,q}$ s'appelle la projection.
Un élément de $\bigwedge^r T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique comme la somme des formes de bidegrés :

$$\bigwedge^r T^*(M) \otimes \mathbb{C} = \bigwedge^{r,0} (T^*(M)) \oplus ... \oplus \bigwedge^{0,r} (T^*(M)).$$

De même, $\varepsilon^r(M) = \varepsilon^{r,0}(M) \oplus ... \oplus \varepsilon^{0,r}(M)$.

Définition 2.3.1
Les opérateurs de Cauchy-Riemann $\overline{\partial} : \varepsilon^{p,q}(M) \to \varepsilon^{p,q+1}(M)$ et $\partial : \varepsilon^{p,q}(M) \to \varepsilon^{p+1,q}(M)$ sont définis par $\overline{\partial} = \pi_{p,q+1} \circ d$ et $\partial = \pi_{p+1,q} \circ d$. ($d$ désigne la dérivation extérieur sur M).

Remarque 2.3.1
Pour les fonctions, il y a des relations très importantes entre la dérivation extérieure d, ∂, $\overline{\partial}$ et J^* l'application de structure complexe sur l'espace des 1-formes.

Lemme 2.3.1 *Soit f une fonction définie sur une variété complexe M, de classe C^∞ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, on a $\partial f = \frac{1}{2}(df - iJ^*df)$ et $\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(df + iJ^*df)$.*
L'opérateur $J^* \circ d$ se note $d^{\mathbb{C}}$. Ainsi $\frac{1}{2}d^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}J^* \circ d$ est la partie imaginaire de $\overline{\partial}$-opérateur.

Preuve.
On a $d = \partial + \overline{\partial}$. Soit $f : M \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ sur M. On a $\partial f \in T^*(M)$. C'est-à-dire ∂f appartient à l'espace propre associé à la valeur propre $(+i)$ pour l'opérateur J^*. De même, $\overline{\partial} f$ appartient à l'espace propre associé à la valeur propre $(-i)$ pour l'opérateur J^*. Comme $df = \partial f + \overline{\partial} f$ alors $J^*df = i\partial f - i\overline{\partial} f$. Or $idf = i\partial f + i\overline{\partial} f$. D'où $\partial f = \frac{1}{2}(df - iJ^*df)$ et $\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(df + iJ^*df)$. $\square$

Chapitre 3

Théorème de Frobenius

On se donne une submersion $F\left(f_1,...,f_n\right):M\to N$ où M et N sont deux variétés C^∞ de dimensions respectivement m et n. Alors, pour tout $y\in N$, si $F^{-1}\left(y\right)\neq\emptyset$ est une sous variété de M. Ainsi, on peut déterminer son fibré tangent. Maintenant, on veut étudier le problème réciproque : Dans le cas où on a un seul champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc déterminer sa courbe intégrale. Dans le cas général, Frobenius a étudié ce problème. Dans ce chapitre, on va énoncer et montrer le théorème de Frobenius. De plus, on donne sa version complexe qu'on va l'utiliser dans la suite lorsqu'on étudie les sous variétés de Cauchy-Riemann de $\mathbb{C}^n$.

3.1 Théorème de Frobenius (version réelle).

Soit $\pounds$ la section d'un sous fibré de fibré tangent réel de $\mathbb{R}^n$ de rang m. On suppose que $\pounds$ soit involutive (c'est à dire, si $L_1,\ L_2\in\pounds$ alors $[L_1,L_2]\in\pounds$). Alors, pour tout $p\in\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de p et un C^∞-difféomorphisme $\chi=(\chi_1,...,\chi_n):U\to\chi(V)\subset\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $m+1\leq j\leq n$ et $L\in\pounds$, on ait $L\{\chi_j\}=0$ sur U.

Preuve.

La preuve de ce théorème est basée sur le lemme 3.1.1 ci-dessous. D'abord, on va construire une famille des champs de vecteurs notée $\pounds$ qu'elle doit être involutive afin d'appliquer le lemme 3.1.1.

Soit $p\in\mathbb{R}^n$ assez proche de l'origine. Par hypothèse, il existe $\left(\widetilde{L}_1,...,\widetilde{L}_m\right)$ une famille des champs de vecteurs linéairement indépendants qui constitue $\pounds$ ($\pounds$ est la section d'un sous fibré $\mathbb{R}^n\backsimeq\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$ de rang m).

On munit $\mathbb{R}^n$ par les coordonnées (y, x) où $y \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^{n-m}$. On écrit pour tout $1 \leq j \leq m$,

$$\widetilde{L}_j = \sum_{1 \leq k \leq m} \mu_{jk}(\frac{\partial}{\partial y_k}) + \sum_{1 \leq k \leq (n-m)} \gamma_{jk}(\frac{\partial}{\partial x_k}).$$

D'après l'indépendance des champs de vecteurs de cette famille, on peut dire que la matrice $\mu = (\mu_{jk})_{1 \leq j,k \leq m}$ est inversible dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.
On va redresser $\widetilde{L}_j$ en multipliant par la matrice inverse μ^{-1}. On a

$$\mu^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{L}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \widetilde{L}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ . \\ . \\ . \\ L_m \end{pmatrix},$$

où $L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{1 \leq k \leq n-m} \lambda_{jk}(\frac{\partial}{\partial x_k})$, pour $1 \leq j \leq m$ et $\lambda = \mu^{-1}\gamma$ est une matrice de la forme $(m, n-m)$.
Maintenant, on va examiner les composantes de $[L_j, L_k]$. On voit que les coefficients en $\frac{\partial}{\partial y_l}$ sont nulles et comme $[L_j, L_k]$ est une combinaison linéaire des $\{L_j \ ; \ 1 \leq j \leq m\} \backsimeq \{\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_m}, \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n-m}}\}$. Alors, pour tout $1 \leq j, k \leq m$, on a $[L_j, L_k] = 0$.

Lemme 3.1.1 *Soit $1 \leq m \leq n$. On note (y, x) les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ où $y \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^{n-m}$. On suppose que :*
- *Pour tout $1 \leq j \leq m$,*

$$L_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) + \sum_{1 \leq k \leq n-m} \lambda_{jk}(y, x)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

où les λ_{jk} sont des fonctions C^∞ sur un voisinage W de l'origine de $\mathbb{R}^n$.
- *Pour $1 \leq j, k \leq m$, on a $[L_j, L_k] = 0$.*

Alors,
1) il existe un voisinage ouvert U dans W de l'origine.
2) il existe $\chi = (\chi_1, ..., \chi_n) : U \to \chi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un C^∞-difféomorphisme tel que, pour $1 \leq j \leq m$, on ait $L_j\{\chi_k\} = 0$ dans U et pour tout $m+1 \leq k \leq n$, on ait $\chi(0, x) = (0, x)$ avec $(0, x) \in U$.

Preuve du lemme.
On va raisonner par récurrence sur m $(1 \leq m \leq n)$.
• $m = 1$. On a un seul champ de vecteurs L, le but est de construire χ telle que $L = \frac{\partial}{\partial \chi_1}$ et $(\frac{\partial}{\partial \chi_1})(\chi_j) = 0$, pour tout $2 \leq j \leq n$.
Soit (t, x) les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. On va construire un C^∞-difféomorphisme local à l'origine $F = (F_1, ..., F_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ tel que $\left[F_*(\frac{\partial}{\partial t})\right]_{F(t,x)} = L_{F(t,x)}$ où $(t, x) \in V$ avec V un voisinage ouvert assez petit de l'origine et $F(0, x) = (0, x)$. Dans ce cas, il suffit de prendre $\chi = F^{-1}$, on a bien $\chi(0, x) = (0, x)$ et $\frac{\partial}{\partial \chi_1} = \chi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial t}) = F_*(\frac{\partial}{\partial t}) = L$.
On pose $F(t, x) = (y, x)$, on obtient :

$$\left[F_*(\frac{\partial}{\partial t})\right]_{F(t,x)} = \frac{\partial F_1}{\partial t}(t, x)\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\partial F_{k+1}(t, x)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{3.1}$$

Maintenant, on compare (3.1) avec $L = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \lambda_{1,k}(y, x)\frac{\partial}{\partial x_k}$. Donc, il s'agit de résoudre ce système d'équations différentielles :

$$\frac{\partial F_1(t, x)}{\partial t} = 1 \text{ et } \frac{\partial F_{k+1}(t, x)}{\partial t} = \lambda_{1,k}(F(t, x)), \tag{3.2}$$

pour $1 \leq k \leq n-1$ et $F(0, x) = (0, x)$ où $(0, x) \in V$.
Le théorème d'existence et d'unicité de résolution des équations différentielles ordinaires (donné ci-dessous), nous permet de trouver F qui est définie sur $\{|t| < \varepsilon, \|x\| < \varepsilon\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ (assez petit).
La condition initiale $F(0, x) = (0, x)$ implique $F(0, 0) = 0$ et

$$\frac{\partial F_j(0,0)}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; j = k+1 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Écrivons la jacobienne de F à l'origine $(0, 0)$:

$$J_{(0,0)}F = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ \lambda_{1,1}(0) & 1 & . & 0 \\ . & 0 & I_{(n-3)} & 0 \\ \lambda_{1,n-1}(0) & 0 & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $J_{(0,0)}F$ est inversible. D'après le théorème d'inversion local, F admet un inverse $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ vérifiant $\chi(0) = 0$.
- *Interprétation géométrique :*
Lorsqu'on fixe $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ près de l'origine, l'ensemble :

$$\{t \mapsto F(t,x)\ ,|t| < \varepsilon\}$$

s'appelle la courbe intégrale du champ L où $L = F_*(\frac{\partial}{\partial t})$ est tangent à cette courbe.
• On suppose que le lemme est vrai à l'ordre $(m-1)$ pour $2 \leq m \leq n$. Montrons qu'il reste vrai à l'ordre m.
On suppose qu'il existe un C^∞-difféomorphisme local $\widetilde{\chi} = (\widetilde{\chi}_1, ..., \widetilde{\chi}_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ à l'origine tel que $L_j\{\widetilde{\chi}_k\} = 0$ pour $1 \leq j \leq m-1$ et $m \leq k \leq n$ et que

$$\widetilde{\chi}(0, ..., 0, y_m, x_1, ..., x_{n-m}) = (0, ..., 0, y_m, x_1, ..., x_{n-m}). \tag{3.3}$$

En particulier, on obtient $\widetilde{\chi}(0,x) = (0,x)$ si $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ est assez proche de l'origine.
Soit $\widetilde{F}$ l'inverse de $\widetilde{\chi}$. On a $\widetilde{F}(0) = 0$, l'équation (3.3) nous donne que L_j est tangent à $M_0 = \{\widetilde{\chi_m} = 0\} = \{\widetilde{F}(t', 0, x)\ ;\ t' \in \mathbb{R}^{m-1}, x \in \mathbb{R}^{n-m}\}$. Soit (t', t_m, x) les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ où $t' \in \mathbb{R}^{m-1}$, $t_m \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{n-m}$. D'après le cas où $m = 1$, il existe un C^∞-difféomorphisme $F : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ telqu'on ait

$$\left[F_*(\frac{\partial}{\partial t_m})\right]_{F(t,x)} = (L_m)_{F(t,x)} \text{ et } F(t', 0, x) = \widetilde{F}(t', 0, x). \tag{3.4}$$

Utilisant le théorème de résolution d'équations différentielles, la solution de (3.4) détermine une famille des courbes intégrales qui satisfait la condition initiale.
La solution de (3.4) est un difféomorphisme local à l'origine. On remarque que :

· $(t', 0, x) \longmapsto F(t', 0, x)$ est une paramétrisation de M_0.
· $t_m \longmapsto F(t', t_m, x)$ est une paramétrisation de la courbe intégrale de L_m qui transverse M_0. En effet, on prend $\chi = F^{-1}$. Il reste à prouver que $\chi(0,x) = (0,x)$ et $L_j\{\chi_k\} = 0$ pour $1 \leq j \leq m$ et $m+1 \leq k \leq n$.

Comme $F(0,x) = \widetilde{F}(0,x) = (0,x)$, on obtient $\chi(0,x) = (0,x)$.
- Pour $j = m$.
On a

$$\begin{gathered} L_m = F_*(\tfrac{\partial}{\partial t_m}) = \chi_*^{-1}(\tfrac{\partial}{\partial t_m}) \text{ et pour } m+1 \leq k \leq n, \\ L_m\{\chi_k\} = \chi_*^{-1}(\tfrac{\partial}{\partial t_m})\{\chi_k\} = \tfrac{\partial}{\partial t_m}(\chi_k \circ \chi^{-1}) = 0. \end{gathered}$$

Car pour tout $m+1 \leq k \leq n$, $\chi_k \circ \chi^{-1}(t', t_m, x) = x_{k-m}$ et x_{k-m}, t_m sont indépendants.

- Pour $1 \leq j \leq m-1$ et $m+1 \leq k \leq n$.
À partir de la condition initiale, on a $\chi = \widetilde{\chi}$ sur M_0. Ceci entraîne L_j est tangent à M_0 pour $1 \leq j \leq m-1$.
L'hypothèse de récurrence, nous donne que, pour tout $m+1 \leq k \leq n$, $L_j\{\chi_k\} = 0$ sur M_0. De plus, on a $[L_j, L_m] = 0$ et $L_m\{\chi_k\} = 0$. On obtient finalement, pour tout $m+1 \leq k \leq n$,

$$L_m(L_j\{\chi_k\}) = L_j(L_m\{\chi_k\}) = 0.$$

D'où L_m transverse M_0 et pour tout $m+1 \leq k \leq n$, on a $L_j\{\chi_k\} = 0$. Ceci achève la preuve du lemme et la preuve du théorème de Frobenius. $\square$

Théorème de résolution des équations différentielles (Rappel)
Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$. Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega \times I \times \Omega' & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x,t,\alpha) & \mapsto & f(x,t,\alpha) \end{array} \right.$ une application continue.
On suppose que, pour tout $K \subset \Omega$ et $K' \subset \Omega'$ (K et K' sont deux compacts) , f est lipschitzienne par rapport à x sur $K \times I \times K'$ uniformément à (t,x). C'est-à-dire,

$$\exists M > 0,\ \|f(x_1,t,\alpha) - f(x_2,t,\alpha)\| \leq M \|x_1 - x_2\|,$$

pour tout (x_1,t,α), $(x_2,t,\alpha) \in K \times I \times K'$.
Alors, pour $x_0 \in \Omega$, il existe I_0 un intervalle contenant 0 tel que, pour tout $\alpha \in K'$, il existe une unique fonction $t \longmapsto x(t,\alpha)$ vérifiant

$$f(x(t,\alpha),t,\alpha) = \tfrac{\partial x}{\partial t}(t,\alpha) \quad \text{et} \quad x(0,\alpha) = x_0.$$

De plus, l'application $x : I_0 \times K' \rightarrow \Omega$ est continue.

3.2 Théorème de Frobenius (version complexe).

Soit $\pounds$ la section d'un sous fibré du fibré complexe $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ de rang m, involutif. Alors, pour tout $p \in \mathbb{C}^n$, il existe U un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{C}^n$ et un biholomorphisme $Z(Z_1,...,Z_n) : U \rightarrow Z(U) \subset \mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $m+1 \leq j \leq n$ et $L \in \pounds$, on ait $L(Z_j) = 0$ sur U.
Preuve.
La preuve de ce théorème se déduit directement du lemme ci-dessous :

Lemme 3.2.1 *Soit un $1 \leq m \leq n$. On note les coordonnées d'un point dans $\mathbb{C}^n$, (ς, z) où $\varsigma \in \mathbb{C}^m$ et $z \in \mathbb{C}^{n-m}$. Pour $1 \leq j \leq m$, on pose*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \varsigma_j} + \sum_{1 \le k \le n-m} \lambda_{j,k}(\varsigma, z) \frac{\partial}{\partial z_k},$$

où les $\lambda_{j,k}$ sont des fonctions holomorphes, définies dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$. Alors,

1) il existe un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{C}^n$ suffisamment petit.

2) il existe un biholomorphisme $Z(Z_1, ..., Z_n) : U \to Z(U) \subset \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $1 \le j \le m$ et $m+1 \le k \le n$, on ait : $L_j\{Z_k\} = 0$ sur U. De plus, on a $Z(0, z) = (0, z)$ si $(0, z) \in U$.

Preuve.
La preuve de ce lemme est analogue à celle de la preuve du lemme 3.1.1 dans le cas version réelle où nous avons adapté un raisonnement par récurrence sur m. Pour résoudre le système des équations différentielles, nous appliquons le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy - Kowalevsky car les $\lambda_{j,k}$ sont des fonctions holomorphes (ça peut se faire aussi en développant les fonctions inconnues en séries entières puis on compare les coefficients).
On trouve ainsi un biholomorphisme F, en utilisant le théorème d'inversion local (version complexe). Dans ce cas, l'ensemble

$$M_0 = \{\widetilde{F}(w', 0, z) \ / \ w' \in \mathbb{C}^{m-1}, \ z \in \mathbb{C}^{n-m}\} = \{\widetilde{Z_m} = 0\}$$

est une hypersurface complexe et l'espace tangent à l'origine est donné par

$$T_0\,(M) = \{L \in T_0(\mathbb{C}^n) \ / \ L\{Z_j\} = 0, 1 \le j \le m\}.$$

Cela nous permet de définir un champ de vecteurs Z dite holomorphe :

$$Z = \sum_{1 \le k \le m} a_k \frac{\partial}{\partial z_k} \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n),$$

où les a_k sont des fonctions holomorphes. De plus, on obtient un sous fibré holomorphe de rang m. C'est un sous fibré de $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ engendré par m-champs de vecteurs holomorphes linéairement indépendants. □

3.3 Variétés intégrales & conclusion.

Définition 3.3.1 *Soit £ une section d'un sous fibré involutif de rang m. Soit $f : N \to M$ une application de classe C^∞. f est dite tangente à £. Si pour tout $p \in N$ on a*

$$df_p\left(T_p\left(N\right)\right) \subset \pounds_{f(p)}.$$

Une variété intégrale sur £ est un couple (i, N) vérifiant :
(a) $\dim_{\mathbb{R}} N = m$.
(b) $i : N \rightarrow M$ est une immersion injective tangente à £.

Un système de m-champs de vecteurs $\{L_1, ..., L_m\}$ partout linéairement indépendant sur une variété M est dite complètement intégrable si, pour tout $p \in M$, ils existent un ouvert U contenant M et une sous variété N de dimension m (dite variété intégrale) contenue dans U contenant p vérifiant cette propriété : pour tout $p \in N$, $L_i(p) \in T_p\left(N\right)$, pour tout $1 \leq i \leq m$.
L'adverbe complètement exprime en fait qu'on peut trouver des sous variétés tangentes au "champ de m-plans" engendrées par les $\{L_i\}$ dont la dimension soit le plus grand possible.

3.3.1 Conclusion.

La construction des variétés intégrales est assurée localement par le théorème de Frobenius. En effet, si $\pounds^*$ est un sous fibré du fibré tangent réel de $\mathbb{R}^n$ de rang m et $p \in \mathbb{R}^n$ alors, d'après le théorème de Frobenius, il existe U un voisinage ouvert de p, il existe $\rho = (\rho_1, ..., \rho_{n-m}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^∞ vérifiant :
(i) $d\rho_1 \bigwedge ... \bigwedge d\rho_{n-m} \neq 0$ sur U.
(ii) $\forall L \in \pounds, L\{\rho_j\} = 0$, $1 \leq j \leq n-m$. C'est- à- dire, $\pounds$ est involutif car $\left[L_1, L_2\right]\{\rho_j\} = L_1(L_2\{\rho_j\}) - L_2(L_1\{\rho_j\}) = 0$, si $L_1, L_2 \in \pounds$).
Dans ce cas, pour tout $c = (c_1, ..., c_{n-m}) \in V$ où V est un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{n-m}$, on peut construire des sous variétés

$$M_c = \{x \in U \subset \mathbb{R}^n \ / \ \rho_j(x) = c_j, 1 \leq j \leq n-m\}, \qquad \text{avec}$$

$T_p\left(M_c\right) = \{L \in T_p(\mathbb{R}^n) \ / \ L\{\rho_j\} = 0, 1 \leq j \leq n-m\}$. Ces sont des variétés intégrales. De plus, le théorème de Frobenius nous permet en fait de résoudre les équations différentielles partielles.

Chapitre 4

Variétés Presque-Complexes, de Cauchy-Riemann.

Dans ce chapitre, nous étudions les variétés presque-complexes. Puis nous énoncons le théorème de Newländer-Nirenberg. Ensuite, on va entamer un autre type de variétés : variétés de Cauchy-Riemann(CR) qui contient les variétés complexes. Par suite, nous donnons la preuve du théorème de plongement le cas où la variété est analytique réelle. Nous terminons par la présentation le contre-exemple de Nirenberg.

4.1 Variétés presque-complexes.

Définition 4.1.1
Soient M une variété de classe C^∞ (n'est pas nécessairement plongée dans $\mathbb{C}^n$) et $\pounds$ un sous fibré de fibré tangent complexifié $T(M) \otimes \mathbb{C}$. On dit que le couple $(M, \pounds)$ admet une structure presque complexe si :
i) $\pounds \cap \overline{\pounds} = \{0\}$.
ii) $\pounds \oplus \overline{\pounds} = T(M) \otimes \mathbb{C}$.

Remarque 4.1.1
Si M est une variété complexe et $\pounds = T^{1,0}(M)$ alors $(M, \pounds)$ admet une structure presque complexe. En effet, on a $T(M) \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M)$ et $\overline{T^{1,0}(M)} = T^{0,1}(M)$.

On se demande si M est une variété de C^∞, $\pounds$ est un sous fibré de fibré tangent complexifié involutif et $(M, \pounds)$ est une structure presque complexe

alors existe-t-il une structure complexe sur M telle que $\overline{\pounds} = T^{0,1}(M)$?
La réponse est vraie mais localement. Elle est donnée par le théorème de Newländer-Nirenberg suivant :

Théorème 4.1.1 *On suppose que M soit une structure presque complexe et que $\pounds$ est involutif. Alors, dans un voisinage de tout point p de M, il existe une structure complexe sur M de façon que M soit une variété complexe et que $\overline{\pounds} = T^{0,1}(M)$.*

La démonstration de ce théorème est trop compliquée, je vous donne des indications selon Hörmander [Ho] dans la deuxième paragraphe de ce chapitre. Rappelons d'abord, des quelques résultats concernant la structure complexe.

Théorème 4.1.2 *[Ch] Soient J l'application de structure complexe sur $\mathbb{C}^n$ et M est une sous variété réelle, C^∞, de $\mathbb{C}^n$, de dimension $2k$. On suppose que pour tout $p \in M$, $J_p(T_p(M)) = T_p(M)$. Alors, M est une sous variété complexe.*

Preuve.
Soit $p \in M$. Il s'agit de prouver que M est le graphe d'une application holomorphe.
Après une transformation unitaire dans $\mathbb{C}^n$, on ramène p à l'origine et l'espace tangent réel est donné par

$$T_0(M) = \{(0, w) \in \mathbb{C}^n \ / \ w \in \mathbb{C}^k\}.$$

On munit $\mathbb{R}^{2n}$ par les coordonnées $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$. Soit J l'application presque complexe suivante : $J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}$ et $J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$, pour tout $1 \leq j \leq n$.
Comme $T_0(M)$ est J-invariant par hypothèse alors $(T_0(M))^{\perp}$ est J-invariant.
Ici, ce qui concerne l'orthogonalité, on prend la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{2n}$ puis on utilise le fait que si v, $w \in T_0(M)$, on a $Jv \cdot w = -v \cdot Jw$. En particulier $Jv \cdot Jw = v \cdot w$.
Comme J n'admet pas des valeurs propres réelles alors si $\{v_1, Jv_1, ..., v_{n-k}, Jv_{n-k}\}$ est une base réelle de $T_0(M)^{\perp}$. Dans ce cas, $\{v_{n-k+1}, Jv_{n-k+1}, ..., v_n, Jv_n\}$ est une base réelle de $T_0(M)$.
Considèrons maintenant l'application linéaire A de $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par : $A(v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $A(Jv_j) = \frac{\partial}{\partial y_j}$ pour $1 \leq j \leq n$. Comme $T_0(\mathbb{R}^{2n}) \simeq \mathbb{R}^{2n}$,

on peut prolonger A sur $T_0(\mathbb{R}^{2n})$ en posant $A(Jv_j) = J(A(v_j))$, pour tout $1 \leq j \leq n$, $(*)$. L'application A devient $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Donc A est holomorphe.
D'après $(*)$ l'ensemble $A\{M\} \subset \mathbb{C}^n$ satisfait les hypothèses du théorème. De plus, on a $T_0(A\{M\}) \simeq \{(0, w) \in \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k \ ; w \in \mathbb{C}^k\}$. Près de l'origine, $A\{M\}$ est le graphe d'une application $h : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{n-k}$ de classe C^∞, c'est à dire que $A\{M\} = \{(h(w), w); w \in \mathbb{C}^k\}$.
Pour montrer que $A\{M\}$ est une sous variété complexe de $\mathbb{C}^n$, il suffit de prouver que h est holomorphe $\left(h_{*(p)} \circ J = J \circ h_{*(p)}\right)$.
Soit H l'application suivante : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \to & \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k \\ w & \mapsto & (h(w), w) \end{array}\right.$. Il est clair que H est de classe C^∞. Soient $L \in T_0\left(\mathbb{R}^{2k}\right)$ et p un point assez proche de l'origine de $\mathbb{C}^k$. On a $J\{H_{*(p)}(L)\} = J\{h_{*(p)}L, L\} = (J(h_{*(p)}L), JL)$. Donc $H_{*(p)}(L) \in T_{H(p)}(A\{M\})$. Or, $A\{M\}$ est le graphe de H sur $\mathbb{R}^{2k}$ et comme $T_{H(p)}(A\{M\})$ est J-invariant alors $J\{H_{*(p)}(L)\} \in T_{H(p)}(A\{M\})$. D'où, $T_{H(p)}(A\{M\}) = \{(h_{*(p)}w, w) \ ; \ w \in T_0(\mathbb{R}^{2k})\}$. On obtient donc $h_{*(p)}(JL) = J(h_{*(p)}L)$. C'est équivalent à $h_{*(p)} \circ J = J \circ h_{*(p)}$. D'où h est holomorphe. $\square$

4.2 Variétés presque complexes intégrables.

Dans ce paragraphe, nous donnons les grandes lignes de la preuve de théorème de Newländer-Nirenberg.

Définition 4.2.1 *Soit M une structure presque-complexe. On dit que la structure est intégrable si £ est involutif (£ est donné dans la définition 4.1.1).*

Remarque 4.2.1
Une structure presque complexe M est définie par une structure analytique si et seulement si pour tout $p \in M$, il existe n fonctions $\{u_1, ..., u_n\}$ de classe C^∞ sur un voisinage de p telles qu'on ait $\overline{L}u_j = 0$, $\forall L \in £$ pour $1 \leq j \leq n$ et que la famille $\{du_j, 1 \leq j \leq n\}$ soit linéairement indépendante.

Théorème 4.2.1 *Chaque structure presque complexe intégrable est définie par une et une seule structure analytique complexe.*

Preuve.
La preuve de ce théorème est basée sur un résultat auxiliaire (le théorème

4.2.2 ci-dessous). D'abord on remarque que la notion de (p,q)-formes se généralise aux variétés presque-complexes en prenant l'opérateur de CR $\overline{\overline{\partial}} = \pi_{p,q+1} \circ d$.

Théorème 4.2.2 *[Ho] Soit Ω une variété complexe dont il existe une fonction strictement plurisousharmonique φ telle que $\{z \,/ z \in \Omega, \varphi(z) < c\} \subset\subset \Omega$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Alors, l'équation $\overline{\overline{\partial}} u = f$ admet une solution $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$* [1] *pour $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ avec $\overline{\overline{\partial}} f = 0$.*

Soient M une structure presque-complexe et $p \in M$. On a $T(M) \otimes \mathbb{C} = \pounds \oplus \overline{\overline{\pounds}}$. On cherche à trouver n fonctions $\{U_1, ..., U_n\}$ telles que $(\overline{\overline{\partial}} U_j = 0)_{1 \leq j \leq n}$ dans un voisinage ouvert du point p et que cette famille $\{dU_1, ..., dU_n\}$ soit linéairement indépendante.
Sans nuire de généralité, on peut supposer que $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ et $p = 0$. On a $\overline{\overline{\partial}} U_j = \pi_{0,1}(dU_j)$. Il suffit maintenant de chercher n 1-formes différentielles $\{w_1, ..., w_n\}$ telles que $\pi_{0,1}(w_j) = 0$ et qu'elles soient linéairement indépendantes dans un voisinage ouvert de p.

Considérons la fonction $\psi(x) = |x|^2$ définie au voisinage de l'origine. Sa forme quadratique en 0 est $q\left(t, \overline{t}\right) = 2 \sum_{1 \leq \nu \leq 2n} \left| \sum_k t_k \frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{w}_k} \right|^2$. La forme q est strictement positive pour $t \neq 0$.
Soit $\delta > 0$ (suffisamment petit) tel que la boule $\Omega_\delta = \{x \,/ |x| < \delta\}$ soit contenue dans Ω. On considère maintenant, la fonction $\varphi = \frac{1}{(\delta^2 - \psi)}$. φ est croissante et convexe sur Ω_δ. De plus, φ vérifie les hypothèses de théorème. Donc, pour f de type $(0,1)$ sur Ω_δ avec $\overline{\overline{\partial}} f = 0$ et $\|f\|^2_\varphi = \int \|f|^2 e^{-\varphi} dv < \infty$, il existe d'après le théorème 4.2.2 une fonction u telle qu'on ait : $\overline{\overline{\partial}} u = f$ et $\|u\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi$.

Soient $\{u_1, ..., u_n\}$ de formes linéaires vérifiant : $du_j = w_j$ à l'origine. Pour $0 < \epsilon < 1$, on considère l'application $\pi_\epsilon : x \longmapsto \epsilon x$. On suppose que les formes $\pi^*_\epsilon w_k$ sont définies sur Ω_δ et que $du_k - \pi^*_\epsilon w_k / \epsilon$ soit un $0(\epsilon)$.
On définit $\overline{\overline{\partial}}_\epsilon$ le $\overline{\overline{\partial}}$ opérateur qui respecte la structure presque-complexe définie par les formes $\pi^*_\epsilon w_k$. D'après le théorème 4.2.2, on peut trouver v_{ϵ_k} telle qu'on ait $\overline{\overline{\partial}}_\epsilon v_{\epsilon_k} = \overline{\overline{\partial}}_\epsilon u_k$ sur Ω_ϵ et $\|v_{\epsilon_k}\|_\varphi = 0(\epsilon)$.

[1] $L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$ désigne l'espace de (p,q)-formes différentielles qui sont localement carré intégrable sur Ω.

Maintenant on prend $U_k = u_k - v_{\epsilon k}$. Alors, pour ϵ assez petit, on vérifie que la famille $\{U_k\ ,\ 1 \leq k \leq n\}$ est linéairement indépendante et que $\overline{\overline{\partial}}_\epsilon U_k = 0$. Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

4.3 Variétés de Cauchy-Riemann.

Dans cette paragraphe, nous étudions d'abord l'espace tangent complexe pour une sous variété de $\mathbb{C}^n$. Puis nous donnons quelques propriétés concernant les variétés de Cauchy-Riemann (CR) et les applications de CR.

4.3.1 Espace tangent complexe.

Si M est une sous variété réelle, C^∞, de $\mathbb{C}^n$. L'espace tangent réel $T_p(M)$ de M au point p n'est pas généralement invariant par l'application de structure complexe J sur $T_p(\mathbb{C}^n)$. On donne ainsi, une désignation spéciale pour le plus grand sous espace J-invariant de l'espace $T_p(M)$.

Définitions 4.3.1
Pour $p \in M$, l'espace complexe tangent de M au point p est un espace $\mathbb{C}$-vectoriel donnée par :

$$H_p(M) = T_p(M) \cap J(T_p(M)).$$

L'espace $H_p(M)$ est appelé l'espace tangent holomorphe. C'est le sous espace complexe maximal dans $T_p(M)$. On a $J \circ J = -Id_{H_p(M)}$. Si $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = m$ alors m est pair.
Si $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire ($J \circ A = A \circ J$) alors $AH_p(M) \subset H_{A(p)}(A\{M\})$.
La partie totalement réelle de l'espace tangent de M au point p est l'espace quotient

$$X_p(M) = T_p(M) \diagup H_p(M).$$

On peut identifier $X_p(M)$ avec le complément orthogonal de $H_p(M)$. On obtient ainsi $T_p(M) = H_p(M) \oplus X_p(M)$.
La dimension réelle de $X_p(M)$ s'appelle la codimension CR de M.

Lemme 4.3.1 *On se donne M une sous variété réelle de $\mathbb{C}^n$, de dimension $(2n-d)$. Alors, on a*

$$2n - 2d \leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq 2n - d$$

et

$$0 \leq \dim_{\mathbb{R}} X_p(M) \leq d.$$

Preuve.
Comme $H_p(M) \subset T_p(M)$ alors $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) = 2n - d$. Or, $T_p(M) + J\{T_p(M)\} \subset T_p(\mathbb{R}^{2n})$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} T_p(\mathbb{R}^{2n}) &\geq \dim_{\mathbb{R}}(T_p(M) + J\{T_p(M)\}) \\ &\geq \dim_{\mathbb{R}}(T_p(M)) + \dim_{\mathbb{R}}(J\{T_p(M)\}) - \dim_{\mathbb{R}} H_p(M). \end{aligned}$$

D'où la première inégalité est vérifiée. La deuxième se déduit de cette équation $\dim_{\mathbb{R}} X_p(M) = \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) - \dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$. □

Exemples 4.3.1
1) Si M est une hypersurface réelle alors $d = 1$. Donc $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 2n-2$. On remarque que la dimension de l'espace tangent holomorphe de M est inchangée si $p \in M$.
2) Soit $M = \{z \in \mathbb{C}^n \;/\; |z| = 1, \Im(z_1) = 0\}$. C'est l'équateur de la sphère unité de $\mathbb{C}^n$.
En considérant, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \left(\sum\limits_{1 \leq i \leq n} |z_i|^2, \dfrac{z_1 - \overline{z_1}}{2i} \right) \end{array} \right.$.
D'après le lemme 4.3.1, on a pour $p \in M$, $2n-4 \leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq 2n-2$ (Ici $d = 2$).
- Pour $p_1 = (z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 0, ..., z_n = 0) \in M$, on a $T_{p_1}(M)$ est engendré sur $\mathbb{R}$ par $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$. Les vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ et $-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)$ sont orthogonaux à $T_{p_1}(M)$. Alors, ils engendrent l'espace $X_{p_1}(M)$. Or, la famille $\{\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ est J-invariante. Alors, elle engendre l'espace $H_{p_1}(M)$.
Donc, $\dim_{\mathbb{R}} H_{p_1}(M) = 2n-4$ et $\dim_{\mathbb{R}} X_{p_1}(M) = 2$.
- Pour $p_2 = (z_1 = 1, z_2 = 0, ..., z_n = 0) \in M$, on peut montrer que $T_{p_2}(M)$ est engendré par $\{\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$. De plus, on sait que cette famille est

J-invariante. Alors, $H_{p_2}(M) = T_{p_2}(M)$ et $X_{p_2}(M) = \{0\}$. Ceci implique $\dim_{\mathbb{R}} H_{p_2}(M) = 2n-2$ *et* $\dim_{\mathbb{R}} X_{p_2}(M) = 0$.
Dans cet, on remarque que la dimension de l'espace tangent holomorphe dépend du point p de la variété M.

4.3.2 Sous variétés de Cauchy-Riemann.

Définition 4.3.1
Soit M une sous variété de $\mathbb{C}^n$. On dit que M est un plongement de variété Cauchy-Riemann ou une sous variété de CR de $\mathbb{C}^n$ si la dimension de $H_p(M)$ sur $\mathbb{R}$ ne dépend pas du point $p \in M$.
Une sous variété M de $\mathbb{C}^n$ est dite totalement réelle si, pour tout $p \in M$, on a $H_p(M) = \{0\} \Longleftrightarrow X_p(M) = T_p(M)$.
Soit M une sous variété de CR de $\mathbb{C}^n$. M est dite générique si, $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ *est minimale.*

Théorème 4.3.1 *Soit M une sous variété réelle différentiable de $\mathbb{C}^n$. Alors, M est une variété complexe, si et seulement si, pour tout point $p \in M$, $T_p(M) = H_p(M)$.*

Preuve.
Soit M une variété complexe qui est définie localement dans un voisinage U d'un point $p \in M$, par les équations $f_1(z) = ... = f_k(z) = 0$, où les fonctions f_μ sont holomorphes dans U et que le *rang* $\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right) = k$. En prenant pour $\mu = 1, ..., k$, $\varphi_\mu = \frac{1}{2}\left(f_\mu + \overline{f_\mu}\right)$ et $\varphi_{\mu+k} = \frac{1}{2i}\left(f_\mu - \overline{f_\mu}\right)$,on définit $M \cap U$ à l'aide des équations réelles $\varphi_1 = ... = \varphi_{2k} = 0$.
On note $\nabla \varphi_\nu = \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z_n}\right)$ le gradient de φ_ν. Puisque $\overline{\nabla \varphi_{\mu+k}} = \overline{J \nabla \varphi_\mu}$, l'intersection des plans tangents aux surfaces $\{\varphi_\mu = 0\}$ et $\{\varphi_{\mu+k} = 0\}$ est un hyperplan complexe. Donc $T_p(M)$ est l'intersection de plans tangents à toutes les hypersurfaces $\{\varphi_\mu = 0\}$ pour tout $1 \leq \mu \leq 2k$. C'est un plan complexe.
Inversement, c'est déjà démontrer dans le théorème 4.1.2. □

Exemples 4.3.2
1) Toute hypersurface réelle de $\mathbb{C}^n$ est une sous variété de CR. De plus, elle est générique.
2) Toute sous variété analytique complexe de $\mathbb{C}^n$ est une sous variété de CR

car pour tout $p \in M$, $T_p(M) = H_p(M)$.
3) $M = \{(x+iy) \in \mathbb{C}^n; y = 0\} \backsimeq \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. On a donc $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Il ne contient aucune droite complexe. D'où, pour tout $p \in M$, on a $H_p(M) = \{0\}$.
4) Le tore réel $\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ |z_\nu| = 1, \nu = 1, ..., n\}$ est une variété totalement réelle. Il est défini par les équations suivantes : pour $\nu = 1, ..., n$, $\varphi_\nu(z) = z_\nu \overline{z}_\nu - 1$ et on a les vecteurs $\overline{\nabla \varphi_\nu} = z_\nu$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.

Dans l'exemple où M est l'équateur de la sphère unité de $\mathbb{C}^n$. M est définie par

$$\rho_1 = |z|^2 - 1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \tfrac{1}{2i}(z_1 - \overline{z}_1).$$

On a $\partial\rho_1 = \sum_{1 \leq j \leq n} \overline{z}_j dz_j$ et $\partial\rho_2 = \frac{1}{2i} dz_1$. Ceci entraîne $\partial\rho_1 \bigwedge \partial\rho_2 = 0$ pour les points $z = (z_1, ..., z_n) \in M$ avec $z_2 = ... = z_n = 0$ et $z_1 = \pm 1$. Dans ce cas, M n'est pas une sous variété de CR par contre $\widetilde{M} = \{z = (z_1, ..., z_n) \in M \ / \ z_1 \neq \pm 1\}$ est une sous variété de CR, générique (non compacte) de $\mathbb{C}^n$.

4.3.3 Variétés de Cauchy-Riemann abstraites.

Définition 4.3.2
Soit M une variété C^∞. On suppose que $\pounds$ est un sous fibré de $T(M) \otimes \mathbb{C}$. Le couple $(M, \pounds)$ est dite une variété de Cauchy-Riemann abstraite ou une structure de Cauchy-Riemann si
a) Pour tout $p \in M$, $\pounds_p \cap \overline{\pounds_p} = \{0\}$.
b) $\pounds$ est involutif. C'est-à-dire, si L_1 et L_2 sont dans $\pounds$ alors $[L_1, L_2] \in \pounds$.

Exemple 4.3.1
Soit M une sous variété de CR de $\mathbb{C}^n$ et $\pounds = H^{1,0}(M)$ alors le couple $(M, \pounds)$ est une structure de CR. Ici $H^{1,0}(M) = \bigcup_{p \in M} H_p^{1,0}(M)$ où $H_p^{1,0}(M) = T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap (T_p(M) \otimes \mathbb{C})$. De même, on définit $H_p^{0,1}(M)$ et on montre que $H_p^{0,1}(M) = \overline{H_p^{1,0}(M)}$.
En effet, si M est une sous variété de CR de $\mathbb{C}^n$ alors
- *Pour tout $p \in M$, $H_p^{1,0}(M) \cap H_p^{0,1}(M) = \{0\}$.*
- *Les sous fibrés $H^{1,0}(M)$ et $H^{0,1}(M)$ sont involutifs.*

Le fait que l'intersection des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est réduit à l'élément neutre le premier point est démontré.

Pour le deuxième, on note $H^{1,0}(M) = T(M) \otimes \mathbb{C} \cap \{T^{1,0}(\mathbb{C}^n)\}$. Le fibré $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ est involutif. En effet, le crochet de Lie de deux champs de vecteurs est une combinaison linéaire de $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}\}$. Donc il reste dans cette famille. Or $T(M) \otimes \mathbb{C}$ est involutif. Finalement, $H^{1,0}(M)$ est involutif.
On remarque que si $(M, \pounds)$ est une structure presque-complexe et $\pounds$ est involutif alors $(M, \pounds)$ est une structure de CR.

4.3.4 Fonction de CR et application de CR.

Définitions 4.3.2
1)Soient $(M, \pounds)$ une structure de CR et $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. f est dite une fonction de CR si $\overline{\partial}_M f = 0$ sur M (Ici, $\overline{\partial}_M = \pi_{0,1} \circ d_M$).
2) Soient $(M, \pounds_M)$, $(N, \pounds_N)$ deux structures de CR et $f : M \to N$ une fonction de classe C^1. f est dite une application de CR si $f_*\{\pounds_M\} \subset \pounds_N$. L'extension de f_* sur $T(M) \otimes \mathbb{C}$ se fait que si, pour tout $L \in T(M) \otimes \mathbb{C}$, $f_*\left(\overline{L}\right) = \overline{f}_*(L)$. Ainsi, la définition d'une application de CR est équivalente lorsque $f_*\left(\overline{\pounds}_M\right) \subset \overline{\pounds}_N$. En particulier, $f_*\left(\pounds_M \oplus \overline{\pounds}_M\right) \subset \pounds_N \oplus \overline{\pounds}_N$.
3) On dit que deux structures de CR $(M, \pounds_M)$ et $(N, \pounds_N)$ sont CR équivalentes, s'il existe un difféomorphisme de CR entre M et N.

Lemme 4.3.2
1) Soient $(M, \pounds)$ une structure de CR et $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. f est de CR si et seulement si, pour tout $\overline{L} \in \overline{\pounds}$, on a $\overline{L}f = 0$ sur M.
2) Soit $M = \{z \in \mathbb{C}^n \;/\; \rho_1(z) = ... = \rho_d(z) = 0\}$ est une sous variété de CR, générique. Soit $f : M \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur M. f est de CR si et seulement si, $\overline{\partial}\widetilde{f} \bigwedge \overline{\partial}\rho_1 \bigwedge ... \bigwedge \overline{\partial}\rho_d = 0$ sur M où $\widetilde{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est une extension de f de classe C^1 sur $\mathbb{C}^n$.

Preuve.
1) $\overline{\partial}_M f = \pi_{0,1}(d_M f)$ où $\pi_{0,1}$ est la projection de $T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ sur $T^{*0,1}(M) = \overline{\pounds}^*$. On a donc $\pi_{0,1}(d_M f) = 0$ si et seulement si, pour tout $\overline{L} \in \overline{\pounds}$, $< d_M f | \overline{L} >= 0$. Or, $< d_M f | \overline{L} >= \overline{L} f$ (par définition de la dérivée extérieure d'une fonction).
2) À partir de la définition extrinsèque de $\overline{\partial}_M f$ comme étant la partie de $\overline{\partial}\widetilde{f}\backslash_M$ qui est orthogonal au générateur de l'idéal $\overline{\partial}\rho$ où $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ de C^∞ est la fonction définissante local de M. □

Remarques 4.3.1
1) La définition des fonctions de CR est analogue à celle des fonctions holo-

morphes sur une variété complexe mais, il y a une grande différence quand M est une variété C^∞ car une telle fonction de CR n'est pas toujours de classe C^∞.
2) À partir de 2) de ce lemme, on déduit que la restriction d'une fonction holomorphe sur une sous variété de CR de $\mathbb{C}^n$ est une fonction de CR.

Lemme 4.3.3 *Soient $(M, \pounds)$ une structure de CR et $f = (f_1, ..., f_m) : M \to \mathbb{C}^m$ de classe C^1. f est une application de CR si et seulement si, les f_j sont des fonctions de CR.*

Preuve.
Soient $(N, \pounds_N) = (\mathbb{C}^m, T^{1,0}(\mathbb{C}^m))$ une structure de CR. f est une application de CR si et seulement si, pour tout $\overline{L} \in \overline{\pounds}_M$, $f_*\left(\overline{L}\right) \in T^{0,1}(\mathbb{C}^m)$.
Pour $1 \leq j \leq m$, on considère z_j la j-ième fonction des coordonnées de $\mathbb{C}^m$. On a : $f_*\left(\overline{L}\right)\{z_j\} = \overline{L}\{z_j \circ f\} = \overline{L}\{f_j\}$. Ceci entraîne : $f_*\left(\overline{L}\right) \in T^{0,1}(\mathbb{C}^m)$ si et seulement si, pour tout $1 \leq j \leq m$, $\overline{L}(f_j) = 0$. À partir de 1) du lemme 4.3.2, on obtient le résultat voulu. $\square$

4.4 Théorème de plongement.

Définition 4.4.1
On dit que la structure $(M, \pounds)$ de CR est analytique réelle si M est une variété analytique réelle et $\pounds$ est un sous fibré analytique réel du fibré $T(M) \otimes \mathbb{C}$. C'est-à-dire : $\pounds$ admet localement une famille génératrice de champs de vecteurs analytiques réels. On appelle la codimension de CR de M le nombre $d = \dim_{\mathbb{C}}\left(T^{\mathbb{C}}(M) \diagup \pounds \oplus \overline{\pounds}\right)$.

4.4.1 Théorème de plongement le cas analytique réel.

Soient $(M, \pounds)$ une structure de CR analytique réelle ayant pour codimension de CR d, $(d \geq 1)$. Alors, pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p dans M tel que $(M \cap U, \pounds)$ soit une structure de CR équivalente via une application de CR analytique réelle à une sous variété de CR de $\mathbb{C}^n$ analytique réelle, générique et de codimension d.
Preuve.
On suppose que $m = \dim_{\mathbb{C}} \pounds = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\pounds}$ près de p, $\overline{\pounds}$ admet une famille génératrice de m champs de vecteurs analytiques réels $\{\overline{L}_1, ..., \overline{L}_m\}$.
Comme d est la codimension de CR de $(M, \pounds)$ alors

$$\dim_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{R}}(M) = 2m + d.$$

On choisit une carte locale de M au voisinage de p de telle façon que M soit identifier à un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{2m+d}$ contenant l'origine $p = 0$ et les $\{\overline{L}_j\}$ sont des champs de vecteurs analytiques réels de $T^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{2m+d})$.
On munit $\mathbb{R}^{2m+d}$ par les coordonnées $u = (u_1, ..., u_{2m+d})$. Pour $1 \leq j \leq m$, le champ de vecteurs $\overline{L}_j$ s'écrit de la forme suivante :

$$\left(\overline{L}_j\right)_u = \sum_{1\leq k\leq 2m+d} a_{jk}(u)\frac{\partial}{\partial u_k},$$

où $a_{jk} : \mathbb{R}^{2m+d} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques réelles.
Or, la famille $\{\overline{L}_1, ..., \overline{L}_m\}$ est linéairement indépendante. Alors la matrice $(a_{jk}(0))_{1\leq j\leq m}^{1\leq k\leq 2m+d}$ est de rang m. Ainsi, on peut extraire une sous matrice A de type (m, m) (en réordonnant les coordonnées) pour qu'elle soit inversible dans un voisinage U de l'origine de $\mathbb{R}^{2m+d}$.
Prenons maintenant, $u = (t, x)$ où $t \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^{m+d}$ comme coordonnées de $\mathbb{R}^{2m+d}$. En multipliant les coefficients de $\{\overline{L}_1, ..., \overline{L}_m\}$ par A^{-1} on obtient une autre base $\{\overline{L}_1, ..., \overline{L}_m\}$ de $\overline{\mathcal{L}}$ telle que, pour $1 \leq j \leq m$, on ait :

$$\overline{L}_j = \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) + \sum_{1\leq k\leq m+d} \lambda_{jk}(t, x)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

où les fonctions $\lambda_{jk} : U \subset \mathbb{R}^{2m+d} \to \mathbb{C}$ sont analytiques réelles.
En calculant le crochet de Lie $\left[\overline{L}_j, \overline{L}_k\right]$, on voit que ce dernier n'admet pas de composantes sur $\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right)$. De plus, $\left[\overline{L}_j, \overline{L}_k\right]$ est une combinaison linéaire de $\{\overline{L}_1, ..., \overline{L}_m\}$ car $\overline{\mathcal{L}}$ est involutif. Alors, pour tout $1 \leq j, k \leq m$, on a $\left[\overline{L}_j, \overline{L}_k\right] = 0$.
Maintenant, on va complexifier chaque $\overline{L}_j$. Soient $\zeta \in \mathbb{C}^m$ et $z \in \mathbb{C}^{m+d}$ tels que $\Re(\zeta) = t$ et $\Re(z) = x$. On remplace t et x par ζ et z respectivement dans les fonctions λ_{jk}. On obtient des fonctions $\widetilde{\lambda}_{jk} : \mathbb{C}^{2m+d} \to \mathbb{C}$ holomorphes sur un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de l'origine de $\mathbb{C}^{2m+d}$ avec $\widetilde{\lambda}_{jk}(t, x) = \lambda_{jk}(t, x)$.
Pour $1 \leq j \leq m$, on pose $\widetilde{L}_j = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\right) + \sum_{1\leq k\leq m+d} \widetilde{\lambda}_{jk}(\zeta, z)\frac{\partial}{\partial z_k}$.

Comme les fonctions $\widetilde{\lambda}_{jk}(\zeta, z)$ sont holomorphes en ζ et z, on obtient :

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\lambda}_{jk}}{\partial \zeta_l}\right)(t,x) = \left(\frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial t_l}\right)(t,x),$$
$$\left(\frac{\partial \widetilde{\lambda}_{jk}}{\partial z_l}\right)(t,x) = \left(\frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial x_l}\right)(t,x) \text{ et}$$
$$\left[\overline{L}_j, \overline{L}_k\right]_{(t,x)} = 0,\ \forall (t,x) \in U \subset \mathbb{R}^{2m+d}.$$

D'après le théorème d'identité, on a $\left[\widetilde{L}_j, \widetilde{L}_k\right] = 0$ sur $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}^{2m+d}$.
On applique maintenant le lemme 3.2.1 avec $n = 2m+d$. Donc, il existe une application holomorphe $\widetilde{Z} = \left(\widetilde{Z}_1, ..., \widetilde{Z}_{m+d}\right) : \widetilde{U} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{m+d} \to \mathbb{C}^{m+d}$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq m+d$, on ait $\widetilde{L}_j\left(\widetilde{Z}_k\right) = 0$ sur $\widetilde{U}$ et pour tout $(0,z) \in \widetilde{U}$, on ait $\widetilde{Z}(0,z) = z$.
Maintenant, on considére l'application $Z : \widetilde{U} \cap \{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+d}\} \to \mathbb{C}^{m+d}$ définie par $Z(t,x) = \widetilde{Z}(t,x)$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+d}$. Il est clair que Z est analytique réelle.
On obtient ainsi, $\overline{L}_j(Z_k) = \widetilde{L}_j\left(\widetilde{Z}_k\right) = 0$ sur $\widetilde{U} \cap \{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+d}\}$ et pour tout $(0,x) \in \widetilde{U}$, $Z(0,x) = \widetilde{Z}(0,x) = x$.
Z est donc l'application cherchée. En effet, pour tout $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq m+d$ on a $\overline{L}_j(Z_k) = 0$. Z est donc une application de CR à partir du lemme 4.3.2.

Il suffit de prouver que $Z : \mathbb{R}^{2m+d} \to \mathbb{R}^{2m+2d} \simeq \mathbb{C}^{m+d}$ est de rang maximal $2m+d$ à l'origine.
On écrit Z sous la forme suivante : $Z(t,x) = \mathcal{U}(t,x) + i\mathcal{V}(t,x)$, où $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ sont deux fonctions analytiques réelles. On désigne par D la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(0) & \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}(0) & \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(0) \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de montrer que le rang D est $(2m+d)$.
On a $Z(0,x) = \mathcal{U}(0,x) + i\mathcal{V}(0,x) = x$. Dérivons par rapport à x ce dernier, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(0) = I \text{ et } \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(0) = 0. \tag{4.1}$$

La partie imaginaire de l'équation

$$\overline{L}_j(Z_k) = \left(\tfrac{\partial Z_k}{\partial t_j}\right) + \sum_{1\leq k\leq m+d} \lambda_{jk}(t,x)\frac{\partial Z_k}{\partial x_k} = 0$$

peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}) + (\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x})^t(\Im\lambda) + (\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x})^t(\Re\lambda) = 0, \tag{4.2}$$

où $\Re\lambda$ et $\Im\lambda$ sont deux matrices de types $(m, m+d)$.
D'après (4.1) et (4.2), on a : $\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}\right)(0) = -{}^t(\Im\lambda)$. Donc D est de rang maximal, si et seulement si, $\Im\lambda\,(0)$ est de rang m. En effet, on a par hypothèse $\pounds \cap \overline{\pounds} = \{0\}$ car $(M, \pounds)$ est une structure de CR. Ceci entraîne $\left\{L_1 - \overline{L}_1, ..., L_m - \overline{L}_m\right\}$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}$.
Or, $\frac{1}{2i}\left(\overline{L}_j - L_j\right) = \sum_{1\leq k\leq m+d} (\Im\lambda_{jk})\frac{\partial}{\partial x_k}$ est la j-ième ligne de la matrice $\Im\lambda$.
Donc $\Im\lambda(0)$ est de rang m. D'où D est de rang maximal $(2m+d)$. Ainsi, il existe un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{R}^{2m+d}$ tel que $M' = Z(U)$ soit une sous variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{m+d}$. De plus, la codimension réelle de M' est d car $\dim_{\mathbb{R}} M' = \dim_{\mathbb{R}} U = 2m+d$. Ceci achève la preuve du théorème de plongement. □

Remarque 4.4.1
Pour les variétés analytiques complexes peuvent localement se plonger dans $\mathbb{C}^n$ (n assez grand), mais pour les variétés C^∞ généralement on ne peut pas les plonger dans $\mathbb{C}^n$ comme le montre le contre-exemple de Nirenberg dans la paragraphe ci-dessous.

4.5 Contre-exemple de Nirenberg.

On va donner les idées de contre-exemple de Nirenberg. On doit trouver une variété C^∞ qui admet une structure de CR de dimension 3 et qu'elle ne peut pas se plonger dans $\mathbb{C}^2$.
L'idée est de construire un champ de vecteurs $L \in T^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$ (L et $\overline{L}$ sont linéairement indépendants) et une application Z de CR, $Z = (Z_1, Z_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$ vérifiant $\overline{L}\{Z_1\} = \overline{L}\{Z_2\} = 0$ et $dZ_1 \bigwedge dZ_2 = 0$ à l'origine de $\mathbb{R}^3$.
Dans ce cas, $Z = (Z_1, Z_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$ ne peut pas se plonger dans aucun voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$. On doit d'abord construire le champ $\overline{L}$.
Considérons le groupe de Heisenberg M dans $\mathbb{C}^2$. M est donnée par :

$M = \{(z = x+iy, w) \in \mathbb{C}^2 \ / \ y = |w|^2\}$. M est donc le graphe de l'application suivante :

$$H : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x,w) & \mapsto & \left(x + i\,|w|^2, w\right) \end{array} \right. .$$

L'espace tangent réel de M à l'origine 0 est $T_0(M) = \{(x,u,v) \in \mathbb{R}^3 \ / \ w = u + iv\}$.
On prend $\overline{L}$ la perturbation du générateur de $H^{0,1}(M)$. Ce générateur est donné dans le théorème ci-dessous :

Théorème 4.5.1 *On suppose que* $\Omega = \left\{(x+iy,w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}, y = h(x,w)\right\}$ *où* $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ *de classe* C^k, $(k \geq 2)$ *vérifiant* $h(0) = dh(0) = 0$.
Alors, une base de $H_0^{1,0}(\Omega)$ *est donnée par* $\{\widetilde{L}_1, ..., \widetilde{L}_{n-d}\}$ *telle que, pour* $1 \leq j \leq n-d$, *on ait :*

$$\widetilde{L}_j = \tfrac{\partial}{\partial w_j} + 2i\sum_{l=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d}\mu_{lk}\frac{\partial h_k}{\partial w_j}\frac{\partial}{\partial z_l}\right),$$

où (μ_{lk}) *sont les coefficients de la matrice* $\left(I - i\tfrac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1}$.

La preuve de ce théorème se trouve dans le livre A. Boggess [Bo] chapitre 7, sectio §2, théorème 3.

Dans notre cas, on prend $(n,d) = (2,1)$,

$$h(x,w) = |w|^2,\ \mu = I \text{ et } \widetilde{L}_1 = \tfrac{\partial}{\partial w} + \ 2iw\tfrac{\partial}{\partial z}.$$

Le générateur de $H_0^{0,1}(M)$ est $\overline{\widetilde{L}}_1 = -2iw\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}}$.
On va perturber ce dernier en prenant la projection suivante

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x+iy,w) & \mapsto & (x,w) \end{array} \right. .$$

Donc, $\pi_*\left(\overline{\widetilde{L}}_1\right) = -iw\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}} = \overline{L}_1$.
Soit une fonction $g : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur un voisinage V de l'origine de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$, à valeurs positives telle que, pour tout k, $g^{(k)}(0) = 0$, .
On pose $\overline{L} = \overline{L}_1 + g_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Puis on applique le théorème suivant :

Théorème 4.5.2 *Si* $\overline{L} = \overline{L}_1 + g_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *et* $Z_1, Z_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *de* C^1 *vérifiant* $\overline{L}Z_1 = \overline{L}Z_2 = 0$ *près de l'origine de* $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$*. Alors,* $dZ_1 \bigwedge dZ_2 = 0$ *à l'origine.*

La preuve de ce théorème se trouve dans le livre A. Boggess [Bo] chapitre 11, section §2, théorème 1.

Comme L et $\overline{L}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants dans un voisinage $U \subset V$ de l'origine de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$, on obtient $\pounds$ le sous fibré engendré par L est involutif. Ainsi, $(U, \pounds)$ porte une structure de CR de dimension 3 sur $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$. Mais, cette structure n'est pas CR équivalente à aucune sous variété de $\mathbb{C}^n$. $\square$

Bibliographie

[Bo] A. Boggess : *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex. Studies in advanced mathematics (Texas A&M University), (1991)*

[Ch] B. Chabat : *Introduction à l'analyse complexe Fonctions de plusieurs variables Tome 2. Editions Mir Moscou (1990).*

[DFN] Doubrovine. Fomenko. Novikov : *Géométrie contemporaine, méthodes et applications* $2^{ième}$ *partie. Editions Mir Moscou.*

[Fr] J. Fritz : *Partial Differential Equations. Spring-Verlag (1971).*

[Ho] L. Hörmander :*An introduction to complex analysis in several variables. North-Holland Mathematical Library, (1973).*

[Na] R. Narasimhan : *Analysis on Real and Complex Manifolds. North-Holland Mathematical Library, (1968).*

[Va] V. S. Varadarajan : *Lie groups, Lie algebras and their representations. Graduate Texts in Mathematics Spring-Verlag 102.*