الفصل الأول

MATRICES المصفوفات

Section (1-1): المصفوفات و العمليات عليها

تعريف المصفوفة:

عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة في مستطيل أو مربع مكونة من صفوف و أعمدة و يرمز لها بالحروف ... ,A , B , C

و تكون درجة المصفوفة $(m \times n)$ بحيث m هي عدد الصفوف . و n هي عدد الأعمدة

*** أهم أنواع المصفوفات

1- المصفوفة المربعة

عدد الصفوف = عدد الأعمدة $(m = n)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2- المصفوفة الصفية (متجه صفي)

و تكون من الدرجة $(1 \times n)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & \ldots\ldots & 4 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة العمودية (متجه عمودي)

و تكون من الدرجة $(m \times 1)$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ : \\ 7 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة الصفرية (O)

جميع عناصرها أصفار

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ..0 \\ : & 0 & ..0 \\ 0 & 0 & ..0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5- المصفوفة القطرية

مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا قطرها الرئيسي

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- مصفوفة الوحدة (I) هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي جميعها (1)	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7- المصفوفة المثلثية السفلية مصفوفة مربعة جميع العناصر أعلى القطر الرئيسي أصفار	$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
8- المصفوفة المثلثية العلوية مصفوفة مربعة جميع العناصر أسفل القطر الرئيسي أصفار	$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

** العمليات على المصفوفات

1- تساوي المصفوفات

تكون المصفوفتان A and B متساويتان اذا كانا من الدرجة نفسها و جميع العناصر المتناظرة متساوية

2- جمع و طرح المصفوفات

عند جمع أو طرح المصفوفات يجب أن تكون من نفس الدرجة و نجمع أو نطرح كل عنصر مع نظيره بالمصفوفة الأخرى

مثال :

اذا كان $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 4 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & d \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ أوجد قيمة كل من a , b , c , d

الحل :-

$$\begin{bmatrix} a+2 & 2-6 \\ 4+c & b+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & d \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

نستنتج

$$a+2=5 \longrightarrow a=-3$$
$$2-6=d \longrightarrow d=-4$$
$$4+c=2 \longrightarrow c=-2$$
$$b+7=4 \longrightarrow b=-3$$

3- ضرب المصفوفة بعدد ثابت
عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت نضربه بجميع عناصر المصفوفة

مثال :

اذا كانت $B=\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\7&2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}3&0\\1&-4\\2&-3\end{bmatrix}$ أوجد ما يلي (2) $2B-A$ (1) $5A$

الحل

$$(1)\ \ 5A=5\begin{bmatrix}3&0\\1&-4\\2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&0\\5&-20\\10&-15\end{bmatrix}$$

$$(2)\ \ 2B-A=2\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\7&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\1&-4\\2&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&0\\2&-2\\14&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\7&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&-1\\7&2\end{bmatrix}$$

مثال :- حل المعادلة المصفوفية

$$A+2\begin{bmatrix}1&-1\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4\\2&-2\end{bmatrix}$$

الحل

$$A+\begin{bmatrix}2&-2\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4\\2&-2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3&-4\\2&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-2\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-4&-2\end{bmatrix}$$

** الخواص الاساسية للعمليات على المصفوفات

(1) $A+B=B+A$
(2) $A+0=A$
(3) $A+(B+C)=(A+B)+c$
(4) $k\,(A+B)=kA+kB$ عدد ثابت k
(5) $IA=A$ حيث I هي مصفوفة الوحدة

4- منقول المصفوفة A

نحصل على منقول (transpose) المصفوفة A نحول صفوفها لأعمدتها و أعمدتها هي صفوفها و يرمز لها بالرمز (A^T)

$$\text{If} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{then} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

** خصائص منقول المصفوفة

(1) $\left(A^T\right)^T = A$

(2) $(kA)^T = kA^T$ حيث $k \in \mathbb{R}$

(3) $(A+B)^T = A^T + B^T$

مثال:

اذا كان $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (A-2I)^T$ استنتج المصفوفة A

الحل

بأخذ منقول (مدور) الطرفين

$$(A-2I)^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left((A-2I)^T\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

5- ضرب المصفوفات

لضرب مصفوفتان لا بد أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية .

أي أن اذا كان لدينا مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ و مصفوفة B من الدرجة $n \times p$ فأن حاصل ضربهما مصفوفة AB من الدرجة $m \times p$

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

نستنتج أن ضرب المصفوفات ليس ابداليا $AB \neq BA$

مثال :

اذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

احسب AB , AC , BA , CA ان أمكن

الحل :

$$* AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(2)+(2)(0)+(-1)(4) & (1)(-1)+(2)(3)+(-1)(1) \\ (3)(2)+(1)(0)+(0)(4) & (3)(-1)+(1)(3)+(0)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$* AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

الضرب غير معرف لأن عدد أعمدة A لا تساوي عدد صفوف C

$$* BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4-1 & -2+0 \\ 0+9 & 0+3 & 0+0 \\ 4+3 & 8+1 & -4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 9 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$* CA = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 11 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$* A^T C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 13 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ أثبت أن $A^2-A-6I=0$

الحل

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$*\ A^2-A-6I=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

** هام جدا $(AB)^T=B^TA^T$

6- أثر المصفوفة (trace)

اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان أثر A (tr(A)) هو مجموع عناصر القطر الرئيسي

$$If\quad A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 7 & -2 & 0\\ 5 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$tr(A)=3+(-2)+(-4)=-3$$

** خواص trace

(1) $tr(A^T)=tr(A)$

(2) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

(3) $tr(AB)=tr(BA)$

(4) $tr(kA)=ktr(A)$

(5) $tr(AA^T)$ يساوي مجموع مربعات عناصر A

** المصفوفات المتماثلة و المتماثلة تخالفيا

1- المصفوفة المتماثلة : العناصر أعلى القطر الرئيسي تطابق أسفله و يكون $A^T = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

2- المصفوفة المتماثلة تخالفيا :العناصر أعلى القطر الرئيسي تطابق العناصر أسفله بإشارة مخالفة و يكون $A^T = -A$
عناصر القطر الرئيس أصفار

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن الحصول على المصفوفة المتماثلة و المتماثلة تخالفيا من أي مصفوفة A

1- المصفوفة المتماثلة : $B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$

2- المصفوفة المتماثلة تخالفيا : $C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$

مثال استنتج مصفوفة متماثلة و متماثلة تخالفيا من المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

الحل

$$1- \quad B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & \frac{7}{2} \\ 5 & 5 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \frac{-9}{2} \\ 2 & 0 & -2 \\ \frac{9}{2} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$