الاختبار الفصلي الأول - الفصل الدراسي الأول 1443هـ

الزمن : ساعة ونصف

اسم الطالب/	الرقم الجامعي/
الشعبة/	رقم التحضير/

إستعن بالله ثم أجب عن جميع الأسئلة التالية :

1 – أراد شخص شراء مصابيح كهربائية من محل فاشترط تجربة المصباح قبل أخذه فان كان سليما G أخذه وإذا كان معيبا D جرب آخر. اتفقا على تجربة 3 مصابيح فقط. أكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

$$S = \{G, DG, DDG, DDD\}$$

---

2 – إذا كان P(A)=0.2 و P(B)=0.7 فاحسب كل من $P(A\cup B)$ و $P(B|A)$ في كل من الحالات التالية:

(أ) A و B حادثتان متنافيتان .

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= 0.2 + 0.7 - 0 = 0.9$$

- $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

(ب) A و B حادثتان مستقلتان .

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= 0.2 + 0.7 - 0.2\times 0.7 = 0.76$$

- $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) = 0.7$

(ج) $A\subset B$.

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)$

$$= 0.2 + 0.7 - 0.2 = 0.7$$

- $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

3 – إذا كان المتغير العشوائي X له دالة الكتلة الاحتمالية:

$$f_X(x) = \frac{cx}{4}, \quad x = 1,3,4$$

(أ) احسب قيمة الثابت c .

X	1	3	4
$f(X)$	$\frac{c}{4}$	$\frac{3c}{4}$	$\frac{4c}{4}$

$$\frac{c}{4} + \frac{3c}{4} + \frac{4c}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{8c}{4} = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

X	1	3	4
$f(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$

(ب) احسب دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ لهذا المتغير .

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 1/8 & 0 \le X < 3 \\ 4/8 & 3 \le X < 4 \\ 1 & X \ge 4 \end{cases}$$

(ج) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_x(t)$ ومنها احسب E(X) .

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{4}{8} = \frac{28}{8}$$

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \frac{1}{8}e^{t} + \frac{3}{8}e^{3t} + \frac{4}{8}e^{4t}$$

(د) احسب الدالة المولدة للعزوم $M_y(t)$ للمتغير العشوائي Y حيث $Y=3X-2$.

$M_Y(t) = E(e^{Yt})$
$= E\left(e^{(3X-2)t}\right)$
$= E\left(e^{(3Xt-2t)}\right)$
$= E(e^{3Xt}\ e^{-2t})$
$= \ e^{-2t}E\left(e^{X(3t)}\right)$
$= \ e^{-2t}\left(\frac{1}{8}e^{3t} + \frac{3}{8}e^{9t} + \frac{4}{8}e^{12t}\right)$

---

4 – لديك دالة الكثافة التالية : $f(x)=\frac{1}{3}, \quad 0<x<3$

احسب كل من : $(i)\ E(X), \quad (ii)\ V(X), \quad (iii)\ F(x)$, (v) $M_x(t)$

- $E(X) = \int_0^3 \frac{1}{3}x\ dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x\ dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\frac{1}{2}[x^2]_0^3 = \frac{1}{6}(9-0) = \frac{3}{2} = 1.5$

  $E(X^2) = \int_0^3 \frac{1}{3}x^2\ dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\ dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\frac{1}{3}[x^3]_0^3 = \frac{1}{9}(27-0) = 3$
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - [1.5]^2 = 0.75$
- $F(X) = \int_0^x \frac{1}{3}\ dx = \frac{1}{3}[x]_0^x = \frac{1}{3}x\ ; \quad 0 \le x \le 3$
- $E(e^{tx}) = \int_0^3 \frac{1}{3}e^{tx}\ dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{tx}\ dx = \frac{1}{3}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\frac{1}{t}[e^{tx}]_0^3 = \frac{1}{3t}(e^{3t}-1)$

---

5 - وجدت شركة للتنقيب عن الغاز أن احتمال الحصول على حفر ناجح في منطقة معينة هو 0.4

في هذه المنطقة احسب ما يلي :

(أ) إذا قامت الشركة بست محاولات حفر ما احتمال الحصول على ثلاث منها ناجحة ؟.

$P(X=3) = \binom{6}{3}0.4^3 0.6^3 = 0.27648$

(ب) احتمال الحصول على أول حفر ناجح عند المحاولة الثالثة ؟.

$P(X=1) = \binom{3-1}{1-1}0.4^1 0.6^2 = \binom{2}{0}0.4^1 0.6^2 = 0.144$

(ج) احتمال الحصول على ثاني حفر ناجح عند المحاولة الرابعة ؟.

$$P(X=2)=\binom{4-1}{2-1}0.4^2 0.6^2=\binom{3}{1}0.4^2 0.6^2=0.1728$$

6- (أ) - احسب التوقع و التباين (بأي طريقة صحيحة) للمتغيرين التاليين من المعلومات المعطاة :

$$(i)\ \ \mu_r'=E(Y^r)=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\mu_1'=\frac{1}{3}$$

$$V(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=\mu_1'-[\mu_2']^2=\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{3}\right]^2=\frac{2}{9}$$

(ii) $M_X(t)=e^{-3(1-e^t)}$

$$M_X'(t)=e^{-3(1-e^t)}.3e^t\Longrightarrow M_X'(0)=e^{-3(1-e^0)}.3e^0=3=E(X)$$

$$M_X''(t)=\frac{d}{dt}\left[3e^{t-3(1-e^t)}\right]=3e^{t-3(1-e^t)}.(1+3e^t)$$

$$\Longrightarrow M_X''(0)=3e^{0-3(1-e^t)}.(1+3e^0)=12=E(X^2)$$

$$V(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=12-[3]^2=3$$

(ب) – أثبت أن الدالة التالية هي دالة كتلة إحتمالية :

$$f(x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , x = 0,1,2,\cdots,\min(M,n)$$

(ج) احسب أيضا كل من: $(i)\ E(Y),\quad (ii)\ \sigma_Y^2,\ (iii)\ M_Y(t),\quad Y = 3X + 2$

see page 101

(1) إذا كانت دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ للمتغير العشوائي المتصل X على الصورة التالية:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , & x<0 \\ \dfrac{x^2}{16} \quad , & 0 \le x < 4 \\ 1 \ , & 4 \le x \end{cases}$$

(أ) احسب كل من $(i)\ f(x),\quad (ii)\ E(X),\quad (iii)\ M_X(t)$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{16}\right] = \frac{x}{8} \quad ; \quad 0 \le x \le 4$$

$$E(X) = \frac{1}{8}\int_0^4 x\ dx = \frac{1}{8}\frac{1}{2}[x^2]_0^4 = \frac{1}{16}[16] = 1$$

$$E(e^{tx}) = \frac{1}{8}\int_0^4 xe^{tx}\ dx =$$

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

$$f = x, \quad g' = e^{tx}$$

$$f' = 1, \quad g = \frac{1}{t}e^{tx}$$

$$\int fg' = \left[\frac{1}{t}xe^{tx}\right]_0^4 - \int \frac{1}{t}e^{tx}\,dx$$

$$u = tx \longrightarrow dx = \frac{1}{t}du$$

$$\frac{1}{t^2}\int e^u\,du = \frac{1}{t^2}e^u = \frac{1}{t^2}e^{tx}$$

$$\int fg' = \left[\frac{1}{t}xe^{tx}\right]_0^4 - \frac{1}{t^2}e^{tx}$$

$$\int fg' = \frac{1}{t}[xe^{tx}]_0^4 - \frac{1}{t^2}[e^{tx}]_0^4$$

$$\frac{1}{8}\int_0^4 xe^{tx}\ dx = \frac{1}{8}\left([xe^{tx}]_0^4 - \frac{1}{t^2}[e^{tx}]_0^4\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}[4e^{4t}-4] - \frac{1}{t^2}[e^{4t}-1]\right)$$

(ب) احسب الاحتمالات التالية:

$(i)\ P(1 < X \le 3)$, $(ii)\ P(X > 5)$, $(iii)\ P(X = 1)$

$$P(1 \le X \le 3) = \frac{1}{8}\int_1^3 x\ dx = \frac{1}{8}\frac{1}{2}[x^2]_1^3 = \frac{1}{16}[9-1] = 0.5$$

$$P(X > 5) = 0$$

$$P(X = 1) = 0$$

---

(2) لديك الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X: $M_x(t) = 0.2e^{-t} + 0.3e^{t} + 0.4e^{2t} + 0.1e^{5t}$

احسب كل من $(i)\ f(x)$, $(ii)\ F(x)$.

X	-1	1	2	5
$f(X)$	0.2	0.3	0.4	0.1

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < -1 \\ 0.2 & -1 \le X < 1 \\ 0.5 & 1 \le X < 2 \\ 0.9 & 2 \le X < 5 \\ 1 & X \ge 5 \end{cases}$$

(3) إذا كان لدينا الدالة المولدة للعزوم التالية: $M_X(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} (3e^t + 1)^{10}$

فاحسب كل من أن: $(i)\ f(x)$, $(ii)\ E(X)$, $(iii)\ V(X)$

$M_X(t) = \left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}\right)^{10} = (pe^t + q)^n$ الدالة المولده للعزوم لتوزيع بانوميل

$$f(X) = \binom{10}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{10-x} \quad ; x = 0,1,2 \dots ,10$$

$$E(X) = np = 10\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$V(X) = npq = 10\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

(4) إذا كانت $M_X(t)$ دالة مولدة للعزوم للمتغير X فأثبت أن: $E(X) = M'_X(0)$

$$e^{tx} = 1 + \frac{(tx)^1}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!}$$

$$E(e^{tx}) = E\left(1 + \frac{(tx)^1}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!}\right)$$

$$E(e^{tx}) = E(1) + E\left(\frac{(tx)^1}{1!}\right) + E\left(\frac{(tx)^2}{2!}\right) + E\left(\frac{(tx)^3}{3!}\right) + \cdots + E\left(\frac{(tx)^n}{n!}\right)$$

$$E(e^{tx}) = 1 + \frac{(tx)^1}{1!}E(x) + \frac{(tx)^2}{2!}E(x^2) + \frac{(tx)^3}{3!}E(x^3) + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!}E(x^n)$$

$$\frac{d}{dt}E(e^{tx}) = \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{(tx)^1}{1!}E(x) + \frac{(tx)^2}{2!}E(x^2) + \frac{(tx)^3}{3!}E(x^3) + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!}E(x^n)\right)$$

plug t=0

$$\frac{d}{dt}E(e^{tx}) = (0 + E(x) + 0 + 0 + \cdots + 0) = E(X)$$