جامعة الملك سعود	كلية العلوم	قسم الرياضيات

الفصل الثاني 1437-1438 هـ/352-ريض/ الاختبار الفصلي الثاني/ الزمن: 90 دقيقة

السؤال الأوّل:[5]

رتب النظام التالي لضمان تقارب طريقة جاكوبي

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ثم احسب الحد الاعلى للخطأ $\|X - X^{(10)}\|_\infty$ باستخدام $X^{(0)} = [0.1,0.1,0.1]^T$.

السؤال الثاني: [5]

استخدام طريقة دولتل للتحليل المثلثي لايجاد حلول النظام التالي لكل قيم α

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \alpha x_3 &= \frac{1}{2} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= -1 \end{aligned}$$

السؤال الثالث: [5]

لتكن $f(x) = \ln(x-1)$ معرفة عند $x_i = \frac{1}{2}(3+i)$, $i = 0,1,...,5$. استخدام كثيرة الحدود لاجرانج الاستكمالية ذات الدرجة الثانية لايجاد افضل تقريب ممكن ل $\ln(1.9)$.

احسب كذلك الحد الاعلى لخطأ هذا التقريب.

السؤال الرابع:[5]

اوجد عدد الشرط للمصفوفة التالية لكل $n \geq 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

ثم احسب الحد الاعلى للخطأ النسبي اذا كان $n = 2$ و $\tilde{X} = [-1.99,2.99]^T$ حلا تقريبيا للنظام الخطي $AX = [1,-0.5]^T$

السؤال الخامس:[5]

اثبت انه اذا كان $\|T\| < 1$ فان متتالية المتجهات $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة ب $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ $c \neq 0, k \geq 1,$ تتقارب الى الحل الوحيد $x \in \Re^n$ للنظام الخطي $Ax = b$ لاي اختيار ابتدائي $x^{(0)} \in \Re^n$.

السؤال الأول

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1$$

نحصل على مصفوفة قطعية السيطرة مما يضمن تقارب طريقة جاكوبي

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|T_J\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(1 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{7}{40}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{3}\left(1 + x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{3}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(1 - 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\right) = \frac{7}{40}$$

$$\|x - x^{(10)}\|_\infty \leq \frac{\|T_J\|_\infty^{10}}{1 - \|T_J\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

$$\leq \frac{(3/4)^{10}}{1/4} \left\| \begin{pmatrix} 7/40 \\ 1/3 \\ 7/40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\leq \frac{(3/4)^{10}}{1/4} \cdot \frac{7}{30} =$$

السؤال الثاني

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \alpha \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 2.5 \end{pmatrix} \xrightarrow[m_{31}=1]{m_{21}=2} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \alpha \\ 0 & -4 & 1-2\alpha \\ 0 & -1 & 2.5+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{m_{32}=\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \alpha \\ 0 & -4 & 1-2\alpha \\ 0 & 0 & 2.25+\frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff L \cdot Y = b \iff Y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot x = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & \alpha \\ 0 & -4 & 1-2\alpha \\ 0 & 0 & 1.5\alpha+2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

من المعادلة الثالثة $(1.5\alpha + 2.25)x_3 = 0$

إذا كان $1.5\alpha + 2.25 \neq 0 \iff \alpha \neq -1.5$

يوجد حل وحيد $x_1 = 0.25 \quad , \quad x_2 = 0.5 \quad , \quad x_3 = 0$

إذا كان $1.5\alpha + 2.25 = 0 \iff \alpha = -1.5$

يوجد عدد غير منتهيا من الحلول

$$x_1 = 0.25 + m \quad , \quad x_2 = 0.5 + m \quad , \quad x_3 = m \in \mathbb{R}$$

السؤال الثالث

$$\ln(1.9) = \ln(2.9-1) = f(2.9)$$

الثلاث نقاط الانسب $x_0 = 2.5$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3.5$

$$f(x_0) = \ln(1.5) \quad , f(x_1) = \ln(2) \quad , f(x_2) = \ln(2.5)$$

لكثيرة الحدود لاغرانج من الدرجه الثانيه

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$= \ln(1.5)\,\frac{(x-3)(x-3.5)}{(2.5-3)(2.5-3.5)}$$

$$+ \ln(2)\,\frac{(x-2.5)(x-3.5)}{(3-2.5)(3-3.5)}$$

$$+ \ln(2.5)\,\frac{(x-2.5)(x-3)}{(3.5-2.5)(3.5-3)}$$

$$\ln(1.9) = f(2.9) \simeq P_2(2.9) = \ln(1.5)\,\frac{0.06}{0.5} + \ln 2\,\frac{-0.24}{-0.25}$$

$$+ \ln(2.5)\,\frac{-0.04}{0.5} =$$

$$= \ln(1.5)\cdot 0.12 + \ln 2 \cdot 0.96 + \ln(2.5)(-0.08)$$

$$= 0.640773$$

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(\eta)}{3!}(x-2.5)(x-3)(x-3.5)$$

$$E_2(2.9) \leq \frac{M}{3!}\left|(2.9-2.5)(2.9-3)(2.9-3.5)\right|$$

$$M = \max_{2.5<\eta<3.5}\left|f^{(3)}(\eta)\right| = \max_{2.5<\eta<3.5}\left|\frac{2}{(x-1)^3}\right| = \frac{2}{(1.5)^3} = \frac{16}{27}$$

$$E_2(2.9) \leq \frac{8}{81}\cdot\frac{3}{125} = 0.00237$$

السؤال الرابع

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix} \Rightarrow \|A_n\|_\infty = 2$$

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ n & -n \end{pmatrix} \Leftarrow \|A_n^{-1}\|_\infty = 2n$$

$$\chi(A) = \|A_n\|_\infty \cdot \|A_n^{-1}\|_\infty = 4n$$

$$r = b - A_2 \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.005 \end{pmatrix} \rightarrow \|r\|_\infty = 0.005$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \chi(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} = 8 \cdot 0.005 = 0.04$$

السؤال الخامس

$$x^{(k)} - x = T x^{(k-1)} - Tx = T(x^{(k-1)} - x)$$

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|T\| \, \|x^{(k-1)} - x\| \cdots \leq \|T\|^k \|x^{(0)} - x\|$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| \leq \lim_{k\to\infty} \|T\|^k \|x^{(0)} - x\|$$

بما أن $\|T\| < 1$ فإن $\lim_{k\to\infty} \|T\|^k = 0$

وبناء عليه $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$