نموذج حل الاختبار الفصلي الأول في المقرر 431 ريض (الفصل الأول 37/38)

السؤال الأول / (أ) المطلوب إثباته هو "مبرهنة (2.1)" بالصفحة 36 من الكتاب.

(ج) (أ) المطلوب إثباته هو "مبرهنة (3.4)" بالصفحة 72 من الكتاب.

(ب) لنفرض أن $|X| \neq |Y|$، ولتكن $Z \in \{X, Y\}$ حيث $|Z| = \min\{|X|, |Y|\}$. واضح أن $Comp(G - Z) > |Z|$، وبالتالي فإن الرسم G ليس هاملتونياً (من الفقرة (أ)).

السؤال الثاني / (أ) ليكن $P = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ مساراً أطول أعظم. واضح أن (لدينا $\delta(G) \geq 2$)، بما أن P أطول أعظم، فإن $N(v_1) \subseteq \{v_i : 2 \leq i \leq p\}$، وبما أن $\deg_G(v_1) \geq 2$، فإنه يوجد $3 \leq i \leq p$ بحيث v_i مجاور لـ v_1، إذاً $C = (v_1, v_2, \ldots, v_i, v_1)$ هي دورة في G.

(Page 1)

(2) نستخدم الخوارزمية لإثبات أن المتتالية بيانية ،
ونستنتج أيضا تجسيد للمتتالية .

(3) أ) ليكن $G=(X\cup Y, E)$ حيث $|X|=p\geq 1$ و $|Y|=n-p\geq 1$.

واضح أن: $|E| \leq p(n-p) = f(p)$

(لأن G بيان جزئي من البيان $K_{p,n-p}$)

لتكن الدالة $f(x)=x(n-x)$

لنا: $f'(x) = -2x+n$

x	1		$\frac{n}{2}$		$n-1$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

إذن $|E| \leq f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\times\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$.

ب) من دراسة الدالة f نرى أنه ،

إذا كان $p\neq\frac{n}{2}$ فإن $f(p) < \frac{n^2}{4} = f\left(\frac{n}{2}\right)$ ، وبالتالي

فإن $|E| < \frac{n^2}{4}$. وإذن $|E| = \frac{n^2}{4}$ إذا وفقط

إذا كان n عدد زوجي وكان $p=\frac{n}{2}$ وبالتالي ،

فإن: $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

(ج) ليكن G تجسيد المتتالية S . ولدينا ($\sum_{a\in V(G)} \deg a = 2e(G)$)

فإن $e(G)=14$ ، ولدينا كل رؤوس G ،

هو $n=7$ ، ولدينا $\frac{n^2}{4}=\frac{49}{4} < 14$ ، فإنه من

الفقرة (أ) نرى أن G لا يمكن أن يكون ثنائي التجزئة .

(Page 2)

السؤال الثالث / (1) نجد بسهولة مايلي :

(أ) ($K_{m,n}$ نصف أويلري) $\Leftrightarrow$

($m=n=1$) أو ($m=2$ و n عدد فردي) أو ($n=2$ و m عدد فردي)

(ب) ($K_{m,n}$ هاملتوني) $\Leftrightarrow$ ($m=n\geq 2$)

(أثبتنا ذلك في الفقرة 2 (ب) بالسؤال الأول).

(2) (أ) (الرسم $K_{m,n}$ شجرة) $\Leftrightarrow$ ($\min(m,n)=1$).

(ب) ($C_n+K_{2m,2n}$ رسم أويلري) $\Leftrightarrow$ (n عدد زوجي بحيث $n\geq 3$)

(3) (أ) $n\in\{1,4\}$ (لأن $2(n-1)=e(T)+e(\bar{T})=\binom{n}{2}$) ولأن P_1 و P_4 شجرتان بحيث $\bar{P}_1$ و $\bar{P}_4$ شجرتان).

(ب) $\bar{C}_n$ رسم منتظم من النوع $n-3$ أي تكون درجات رؤوس $\bar{C}_n$ زوجية يجب أن يكون n فرديا.

من ناحية أخرى، $\bar{C}_5$ مترابط (لأن $\bar{C}_5\cong C_5$) ولكل $n\geq 6$، $\bar{C}_n$ هاملتوني (لأن لكل رأس u: ($\deg_{\bar{C}_n} u = n-3 \geq \frac{n}{2}$)

وبالتالي فإن $\bar{C}_n$ مترابط لكل $n\geq 5$، إذاً يكون $\bar{C}_n$ أويلريا إذا وفقط إذا كان: n عدد فردي بحيث $n\geq 5$ (لأن $\bar{C}_3$ غير مترابط)

4) أ) بما أن عدد رؤوس G هو n و كل رؤوس G هي رؤوس فردية فإن n عدد زوجي.

من جهة أخرى لكل رأس u لدينا: $\deg_G u = 4m+1 \le n-1$

وبالتالي فإن: $n \ge 4m+2$.

ب) لنفترض أن $n \le 8m+2$ وليكن u رأسا.

لدينا: $\deg_G(u) - \frac{n}{2} = 4m+1 - \frac{n}{2} = \frac{8m+2-n}{2} \ge 0$

إذن: $\delta(G) \ge \frac{n}{2}$ و بما أن $n \ge 3$ (لأن $n \ge 4m+2 \ge 6$)

فإن الرسم G هاملتوني.

ج) لنفترض أن $n \ge 8m+4$ وليكن u رأسا.

لدينا:

$$\deg_{\bar G}(u) - \frac{n}{2} = n-1-(4m+1) - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{2n-2-8m-2-n}{2}$$

$$= \frac{n-(8m+4)}{2}$$

إذن: $\deg_{\bar G}(u) \ge \frac{n}{2}$ وبالتالي $\delta(\bar G) \ge \frac{n}{2}$.

إذن $\bar G$ رسم هاملتوني (لاحظ أن $n \ge 3$).