نموذج لحل الاختبار الفصلي الثاني
(الفصل الثاني 36/37)

السؤال الأول:

(1) من تعميم صيغة أويلر نعرف أنه إذا كان G رسما مستويا عدد رؤوسه v وعدد أضلاعه e وعدد أوجهه f وعدد مركباته k، فإن $v-e+f=k+1$

لنفرض بالتناقض أنه يوجد رسم مستو عدد رؤوسه $v=80$ وعدد أضلاعه $e=87$ وعدد أوجهه $f=8$، وليكن $k\geq 1$ عدد مركبات هذا الرسم.

لنا إذاً $v-e+f=k+1$ ومنه: $80-87+8=k+1$

وبالتالي فإن $k=0$، وهذا تناقض.

إذاً لا يمكن أن يكون لرسم مستو 80 رأسا و 87 ضلعا و 8 أوجه.

(2) يمكن إثبات المطلوب بتعديل بسيط في برهان النتيجة (4.2) (الصفحة 88).

(3) ليكن $n\geq 7$ عددا صحيحا وليكن الرسم C_n، حيث $N(C_n)=\{1,2,\dots,n\}$ و

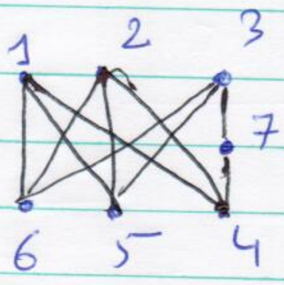
$$E(C_n)=\{\{i,i+1\}:1\leq i<n\}\cup\{1,n\}$$

من السهل أن نتحقق من أن:

$$\{6,5,4\}\subseteq N_{\bar{C}_n}(1),\quad \{6,5,4\}\subseteq N_{\bar{C}_n}(2),$$

$$\{6,5\}\subseteq N_{\bar{C}_n}(3),\quad \{\{3,7\},\{4,7\}\}\subseteq E(\bar{C}_n)$$

ب) إذا الرسم $\overline{C}_n$ يحتوي على الرسم الجزئي H التالي :

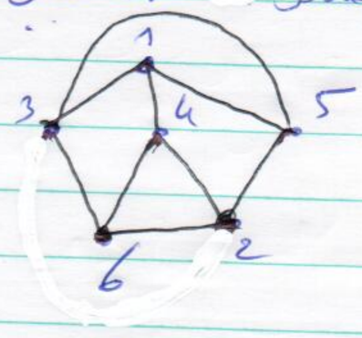


بما أن الرسم H هو تقسيم للرسم $K_{3,3}$، فإن الرسم $\overline{C}_n$ غير مستوٍ (من مبرهنة كوراتوسكي)

← إذا كان n عددا صحيحا، حيث $3 \le n \le 4$، فإن الرسم $\overline{C}_n$ مستوٍ لأن عدد رؤوسه أقل من 5 (من مبرهنة كوراتوسكي)

← إذا كان $n=5$ فإن: $\overline{C}_n = \overline{C}_5 \cong C_5$ وبالتالي فإن $\overline{C}_n$ مستوٍ

← يمكن تمثيل الرسم $\overline{C}_6$ تمثيلا مستويا كالتالي:



وبالتالي فإن $\overline{C}_6$ رسم مستوٍ.

(طريقة 2) (N.B) بالنسبة للرسم $\overline{C}_6$، يمكن ملاحظة أن $e(\overline{C}_6)=9$ وأن $\overline{C}_6$ يحتوي على مثلثات، وبالتالي فإن $\overline{C}_6 \not\cong K_{3,3}$ وبما أن $v(\overline{C}_6)=6$ فإن $\overline{C}_6$ ...

لا يحتوي على رسم جزئي يكون قسيمًا للرسم $K_{3,3}$.

ومن ناحية أخرى، بما أن $e(\bar{C}_6) < e(K_5)$ فإن $\bar{C}_6$

لا يحتوي على رسم جزئي يكون قسيمًا للرسم K_5 .

إذًا، من مبرهنة كوراتوسكي، نستنتج أن الرسم $\bar{C}_6$
رسم مستوٍ.

• إذًا، مما سبق نرى أن الرسم $\bar{C}_n$ يكون غير مستوٍ
إذا وفقط إذا كان $n \geq 7$.

/السؤال الثاني/ .

(1) المطلوب إثباته هو نص المبرهنة (2,3)
(الصفحة 44) .

(2) ليكن N العدد المطلوب إيجاده في كل من الحالات.

(أ) واضح أن :
$$N = \binom{3n}{n} d_{2n}$$

تفسير: { نختار أولاً n عددًا للتثبيت (عدد الخيارات $\binom{3n}{n}$)
ثم نقوم بتبديل تام لبقية العناصر والتي
عددها $2n$ (عدد هذه التباديل
التامة هو d_{2n})

(ii) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 من هذه المجموعة يساوي n.
واضح أن N يساوي عدد تباديل العناصر المنتقية، والتي عددها $2n$.
إذاً $\boxed{N = (2n)!}$

(iii) من الواضح أن $N = N_1 + N_2$ حيث:

* N_1 يساوي عدد التباديل f للمجموعة $\{1,2,3,\dots,3n\}$
حيث: $f(1) = 1$ ، $f(3n) = 3n$ ، $f(n) = 2n$
و f تترك بالضبط n عدداً في أماكنها الطبيعية.

* N_2 يساوي عدد التباديل f للمجموعة $\{1,2,3,\dots,3n\}$
حيث: $f(1) = 3n$ ، $f(3n) = 1$ ، $f(n) = 2n$
و f تترك بالضبط n عدداً في أماكنها الطبيعية.

- يمكن أن نرى أن:

$$\begin{cases} N_1 = \binom{3n-3}{n-3} d_{2n} \\ N_2 = \binom{3n-3}{n-1} d_{2n-2} \end{cases}$$

إذاً $\boxed{N = \binom{3n-3}{n-3} d_{2n} + \binom{3n-3}{n-1} d_{2n-2}}$

(3) لنعتبر أن لدينا صندوقاً يحتوي على n كرة بيضاء و $2n$ كرة حمراء و $2n$ كرة زرقاء.
وليكن N عدد طرق اختيار 3 كرات من الصندوق.

- وبما أن عدد الكرات الجملي هو $5m$، فإن $N=\binom{5m}{3}$

- من ناحية أخرى لنا:

* عدد طرق الاختيار بحيث الكرات المختارة كلها من نفس اللون هو N_1 بحيث:

$$N_1=\binom{m}{3}+\binom{2m}{3}+\binom{2m}{3}=2\binom{2m}{3}+\binom{m}{3}$$

* عدد طرق الاختيار بحيث الكرات المختارة من لونين بالضبط هو N_2 بحيث:

$$N_2=2\binom{2m}{2}\binom{2m}{1}+2\left[\binom{2m}{2}\binom{m}{1}+\binom{2m}{1}\binom{m}{2}\right]$$

$$=4m\binom{2m}{2}+2m\binom{2m}{2}+4m\binom{m}{2}$$

إذا $\underline{N_2=6m\binom{2m}{2}+4m\binom{m}{2}}$

* عدد طرق الاختيار بحيث الكرات المختارة من 3 ألوان بالضبط هو N_3 بحيث:

$$N_3=\binom{2m}{1}\binom{2m}{1}\binom{m}{1}=4m^3$$

- بما أن $N=N_1+N_2+N_3$، فإن:

$$\binom{5m}{3}=2\binom{2m}{3}+\binom{m}{3}+4m\binom{m}{2}+6m\binom{2m}{2}+4m^3$$

السؤال الثالث:

(1) ليكن N العدد المطلوب إيجاده.

من مبرهنة متعددة الحدود نرى أن:

(أ) $$N = \binom{11}{3,3,2,3} = \frac{11!}{(2!)(3!)^3}$$

(ب) $$N = \binom{4-1+11}{11} = \binom{14}{11}$$

(2) ليكن N هو العدد المطلوب.

(أ) نأخذ تغيير المتغيرات التالي:

$$Y_1 = x_1 - 5 \geq 0 , \quad Y_2 = x_2 - 6 \geq 0 , \quad Y_3 = x_3 - 5 \geq 0$$

إذاً N يساوي عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = -1$$

وبالتالي فإن $\boxed{N = 0}$

طريقة 2: N.B يمكن ملاحظة أنه إذا كان $x_1 \geq 5 , x_2 > 5 , x_3 \geq 5$
فإن $x_1 + x_2 + x_3 > 15$ وبالتالي:
$x_1 + x_2 + x_3 \neq 15$. إذاً $N = 0$

(ب) لنكن المجموعات التالية:

* U هي مجموعة الحلول الصحيحة غير السالبة (x_1, x_2, x_3) للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 = 15$

* $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 4,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$

* $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 10,\ x_3 \geq 0\}$

* $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 6\}$

ـــ إذا،
$$N = |U \setminus (A \cup B \cup C)|$$
من مبدأ التضمين والإقصاء لنا:

$$N = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

حيث:
$$\begin{cases} \alpha_1 = |A| + |B| + |C| \\ \alpha_2 = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\ \alpha_3 = |A \cap B \cap C| \end{cases}$$

ـــ من السؤال نجد أن:

* $|U| = \binom{3-1+15}{15} = \binom{17}{15}$;

* $|A| = \binom{3-1+15-4}{15-4} = \binom{13}{11}$

* $|B| = \binom{3-1+15-10}{15-10} = \binom{7}{5}$

* $|C| = \binom{3-1+15-6}{15-6} = \binom{11}{9}$

* $|A \cap B| = \binom{3-1+15-4-10}{15-4-10} = \binom{3}{1}$

* $|A \cap C| = \binom{17-4-6}{15-4-6} = \binom{7}{5}$

- $|B \cap C| = 0$

- $|A \cap B \cap C| = 0$

$$N = \binom{17}{15} - \left[\binom{13}{11} + \binom{7}{5} + \binom{11}{9}\right]$$ (1ن)

$$+ \left[\binom{3}{1} + \binom{7}{5} + 0\right] - 0.$$

$$N = 136 - (78 + 21 + 55) + (3 + 21)$$ (1ن)

$$N = 160 - 154$$ (1ن)

$$\boxed{N = 6}$$ (1ن)