مراجعة:

الفصل الثاني 35/36

س2 (أ) $k, m, n \in \mathbb{Z}$

إذا كان $k+m+n$ عدد زوجياً فإن k أو m أو n عدد زوجي

الحل: **الثاني العكسي:**

إذا كان k عدد فردي و m عدد فردي و n عدد فردي

فإن $k+m+n$ عدد فردي.

لنفرض أن k عدد فردي و m عدد فردي و n عدد فردي

فإنه يوجد $p, q, r \in \mathbb{Z}$ حيث $k = 2p+1$, $m = 2q+1$, $n = 2r+1$

فإن

$$k+m+n = (2p+1)+(2q+1)+(2r+1)$$

$$= 2(p+q+r)+3 = 2\underbrace{(p+q+r+1)}_{\in \mathbb{Z}}+\boxed{1}$$

فإن $k+m+n$ عدد فردي.

وبالتالي إذا كان $k+m+n$ عدد زوجي فإن k عدد زوجي أو m عدد زوجي أو n عدد زوجي

(ب) ليكن a عدد غير كسري. استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات أن $3a-2$ عدد غير كسري.

الحل:

نفرض أن $3a-2$ عدد كسري

فإنه يوجد $x, y \in \mathbb{Z}$, $3a-2=\frac{x}{y}$

فإن $3a=\frac{x}{y}+2$

فإن $a=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+2\right)$

فإن $a=\frac{x+2y}{3y}$

$\frac{x}{y}+2\in\mathbb{Q}$

فإن $a=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+2\right)\in\mathbb{Q}$

وبما أن $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$, $2y\in\mathbb{Z}$ فإن $x+2y\in\mathbb{Z}$, $3y\in\mathbb{Z}$

وبالتالي $a=\frac{x+2y}{3y}\in\mathbb{Q}$, ولدينا $a\notin\mathbb{Q}$

وهذا تناقض

فإن $3a-2$ عدد غير كسري.

س 3 (أ): أثبت أن $1\times2\times\dots\times n > 2^n$ لكل $n\geq 4$

$(n! > 2^n)$

الحل:

الخطوة الأساسية: $1\times2\times3\times4=24>2^4=16$ (صائبة)

خطوة الاستقراء: ليكن $k\geq 4$

نفرض أن $1\times2\times3\times\dots\times k>2^k$ ، نبرهن $1\times2\times\dots\times k(k+1)>2^{k+1}$

لدينا: $1\times2\times3\times\dots\times k>2^k$ (فرضية الاستقراء)

$k+1>2$ (لأن $k\geq4$)

نضرب العبارتان: $1\times2\times3\times\dots\times k\times(k+1)>2^{k+1}$

النتيجة: $1\times2\times3\times4\times\dots\times n>2^n$ ، لكل $n\geq 4$

(ب) $a_1=-1$, $a_2=-\frac{1}{2}$, $a_3=-\sqrt{10}$ و $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-3}$, لكل $n\geq 4$

أثبت أن $a_n<0$ لكل $n\geq 1$

الحل: **الخطوة الأساسية:**

$a_1=-1<0$ و $a_2=-\frac{1}{2}<0$, $a_3=-\sqrt{10}<0$ (طابت)

خطوة الاستقراء: ليكن $k\geq 3$

نفرض أن $a_1<0, a_2<0, a_3<0, \dots, a_{k-1}<0, a_k<0$ ونبرهن أن $a_{k+1}<0$

لدينا: $a_{k+1}=a_k\cdot a_{k-1}\cdot a_{k-2}$ (التعريف الاستقرائي)

وبما أن $a_k<0$ و $a_{k-1}<0$, $a_{k-2}<0$ (حسب فرضية الاستقراء)

فإن $a_{k+1}=a_k\cdot a_{k-1}\cdot a_{k-2}<0$

النتيجة: $a_n<0$ لكل $n\geq 1$