الفصل السادس

مسألة النقل

Transportation Problem

Transportation Problem مسألة النقل

مسألة النقل من تطبيقات البرمجة الخطية و التي ظهرت في العام 1941م عن طريق F. L. Hitchcock و التي يمكن تعريفها بالتالي:

مسألة النقل نموذج من نماذج البرمجة الخطية تهتم بتخفيض التكاليف الخاصة بإمداد متطلبات لمواقع متعددة من مصادر متعددة وهذه التكاليف تختلف باختلاف موقع المصدر و موقع الطلب.

و تواجه الإدارة هذه المشكلة عندما تريد نقل منتجات معينة من مصادر (مثل المصانع) إلى مواقع الطلب (مثل نقاط التوزيع)، و بالتالي تحاول الإدارة تخفيض التكلفة الخاصة بنقل هذه المنتجات عن طريق تحديد التشكيلة المثلى أو الاختيار الأمثل لطرق النقل التي يمكن فيها تخفيض التكلفة مع الالتزام بقيود العرض و الطلب.

و تتكون مسألة النقل من التالي:

1. مجموعة من مواقع الطلب عددها n و التي تنقل إليها المنتجات، فالموقع j يمكن أن ينقل إليه d_j وحدة على الأقل.
2. مجموعة من مواقع العرض عددها m و التي تنقل منها المنتجات، فالموقع i يمكن أن ينقل منه s_iوحدة على الأكثر.
3. تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مواقع العرض i إلى مواقع الطلب j و التي تمثل بالرمز c_{ij} .
4. عدد الوحدات المنقولة من موقع العرض i إلى موقع الطلب j و التي تمثل بالرمز x_{ij}.

و بالتالي فإن الشكل العام للصيغة الرياضية لهذه المسألة ستكون كالتالي:

$$\text{Min } w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{ij} \ge 0$$

و لا بد من ملاحظة أن مسائل النقل تحتوي على ثلاث حالات رئيسية و هي:

1. الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة.
2. الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة.
3. الكمية المعروضة أصغر من الكمية المطلوبة.

الحالة الأولى: الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة:

لنبدأ بالمثال التالي لتوضيح طبيعة مسائل النقل:

مسألة 6-1: إحدى شركات الألبان لديها ثلاث مزارع في كل من حرض، الخرج، و بريدة و تحرص الشركة على بيع منتجاتها في أربع نقاط توزيع و التي تمثل أربع مناطق في المملكة. فإذا كانت تكلفة نقل كل طن من الألبان من كل مزرعة إلى كل نقطة توزيع بالريال السعودي و الكمية المطلوبة و الكمية المعروضة كما في الجدول (6-1):

إلى / من	الرياض (1)	الدمام (2)	جدة (3)	أبها (4)	الكمية المعروضة
حرض (1)	110	110	150	180	40
الخرج (2)	70	120	150	170	30
بريدة (3)	120	140	140	160	50
الكمية المطلوبة	35	30	30	25	120

الجدول (6-1)

لحل هذه المسألة، يمكن لنا تعريف المتغيرات و كتابة الصيغة الرياضية كالتالي:

X_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المزرعة i إلى نقطة التوزيع j (حيث i=1,2,3 و j=1,2,3,4)

$$\text{Min } w = 110X_{11} + 110X_{12} + 150X_{13} + 180X_{14} + 70X_{21} + 120X_{22} + 150X_{23} + 170X_{24} + 120X_{31} + 140X_{32} + 140X_{33} + 160X_{34}$$

Subject To

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 40$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 30$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 50$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 35$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 30$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 30$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 25$
$X_{ij} \geq 0$ (for i=1,2,3, and j=1,2,3,4)

نلاحظ أننا استخدمنا (=) فقط بدلاً من أكبر من أو أصغر من، وذلك لأن هذه الحالة هي حالة التعادل حيث أن الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة. الجدول (6-2) يمثل حل هذه المسألة باستخدام برنامج LINDO:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 14200.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X_{11}	5.000000	0.000000
X_{12}	30.000000	0.000000
X_{13}	5.000000	0.000000
X_{14}	0.000000	10.000000
X_{21}	30.000000	0.000000
X_{22}	0.000000	50.000000
X_{23}	0.000000	40.000000
X_{24}	0.000000	40.000000

X_{31}	0.000000	20.000000
X_{32}	0.000000	40.000000
X_{33}	25.000000	0.000000
X_{34}	25.000000	0.000000

الجدول (6-2)

لكن هناك طرق أخرى لحل هذه المسألة أسرع من طريقة السمبلكس باستخدام ما يُسمى بجداول النقل، و تنقسم هذه الطرق إلى نوعين:

1. طرق لإيجاد حل أولي ممكن. 2. طرق لإيجاد الحل الأمثل إن وُجد.

<u>طرق ايجاد الحل الأولي الممكن:</u>

<u>أولاً: طريقة الركن الشمالي الغربي (Northwest Corner Method):</u>

تسعى هذه الطريقة لإيجاد حل أولي ممكن لمسألة النقل حتى يتمكن متخذ القرار من استخدام هذا الحل الأولي و تطويره لإيجاد الحل الأمثل إن أمكن. تقوم هذه الطريقة على تحديد الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي و هي خلية حرض/الرياض ومن ثم مقارنة الكمية المعروضة من حرض مع الكمية المطلوبة من الرياض و اختيار القيمة الأقل لوضعها في الخلية ثم طرح هذه القيمة من الكمية المعروضة من حرض و الكمية المطلوبة من الرياض.

<u>خطوات طريقة الركن الشمالي الغربي:</u>

- **املأ الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي $CELL_{ij}$ للجدول بأكبر كمية X_{ij} ممكنة (ابدأ بالخلية $CELL_{11}$) بحيث تستوفي الشرط التالي $X_{ij}=Max\{Min (s_i,d_j)\}$.**
- **أعد تقييم عمود المعروض و صف المطلوب كالتالي:**

$$\text{New } s_i = s_i - X_{ij}$$

$$\text{New } d_j = d_j - X_{ij}$$

- **إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف i، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود j من التقييم.**
- **إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف i و العمود j من التقييم.**
- **أعد تطبيق الخطوات السابقة بعد التعديل (الحذف)، و ابدأ بالخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي للمصفوفة الجديدة بعد الحذف.**

لتوضيح ذلك نقارن الكمية المعروضة من حرض وهي 40 طناً مع الكمية المطلوبة من الرياض وهي 35 طناً وبما أن 35 طناً أقل فنضع في خلية حرض/الرياض 35 طناً ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة من حرض وهي 40 طناً فيبقى 5 أطنان و كذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة من الرياض وهي 35 طناً

فلا يبقى شيئ، الجدول (6–3) و الجدول (6–4) يبينان هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المطلوبة من الرياض أصبحت صفراً و بالتالي فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا الرياض و يتبقى لنا 9 خلايا.

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
40	180	150	110	110	حرض
30	170	150	120	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	30	30	35	المطلوب

الجدول (6–3)

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
5	180	150	110	110 35	حرض
30	170	150	120	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	30	30	0	المطلوب

الجدول (6–4)

الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي هي خلية حرض/الدمام و بمقارنة الكمية المعروضة (المتبقية) من حرض و هي 5 أطنان مع الكمية المطلوبة من الدمام و هي 30 طناً نجد أن الكمية المعروضة هي الأقل (5 أطنان) و بالتالي نخصص هذه الكمية للخلية حرض/الدمام ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة (المتبقية) من حرض وهي 5 أطنان فيبقى صفر و كذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة من الدمام وهي 30 طناً فيبقى 25 طناً، الجدول (6–5) يبين هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المعروضة من حرض أصبحت صفراً و بالتالي فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا حرض و يتبقى لنا 6 خلايا.

المعروض	أبها	جدة	الدمام	الرياض	
0	180	150	110 5	110 35	حرض
30	170	150	120	70	الخرج
50	160	140	140	120	بريدة
120	25	30	25	0	المطلوب

الجدول (6–5)

الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي هي خلية الخرج/الدمام و بمقارنة الكمية المعروضة من الخرج و هي 30 طناً مع الكمية المطلوبة (المتبقية) من الدمام و هي 25 طناً نجد أن الكمية المطلوبة هي الأقل (25 طناً) و بالتالي نخصص هذه الكمية للخلية الخرج/الدمام ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة من الخرج وهي 30 طناً فيبقى 5 أطنان و كذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة (المتبقية) من الدمام وهي 25 طناً فيبقى صفر، الجدول (6-6) يبين هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المطلوبة من الدمام أصبحت صفراً و بالتالي فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا الدمام و يتبقى لنا 4 خلايا.

	الرياض	الدمام	جدة	أبها	المعروض
حرض	110 35	110 5	150	180	0
الخرج	70	120 25	150	170	5
بريدة	120	140	140	160	50
المطلوب	0	0	30	25	120

الجدول (6-6)

الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي هي خلية الخرج/جدة و بمقارنة الكمية المعروضة (المتبقية) من الخرج و هي 5 أطنان مع الكمية المطلوبة من جدة و هي 30 طناً نجد أن الكمية المعروضة (المتبقية) هي الأقل (5 أطنان) و بالتالي نخصص هذه الكمية للخلية الخرج/جدة ثم نطرح هذه الكمية من الكمية المعروضة (المتبقية) من الخرج وهي 5 أطنان فيبقى صفر و كذلك نطرح هذه الكمية من الكمية المطلوبة من جدة وهي 30 طناً فيبقى 25 طناً، الجدول (6-7) يبين هذه العملية. نلاحظ أن الكمية المعروضة من الخرج أصبحت صفراً و بالتالي فإننا سنلغي التعامل مع جميع خلايا الخرج و يتبقى لنا خليتين.

	الرياض	الدمام	جدة	أبها	المعروض
حرض	110 35	110 5	150	180	0
الخرج	70	120 25	150 5	170	0
بريدة	120	140	140	160	50

المطلوب	0	0	25	25	120

الجدول (6–7)

بقي لنا الآن خليتان يخصان ماهو معروض من بريدة 50 طناً و ماهو مطلوب من جدة و أبها 25 طناً لكل منهما. نخصص لجدة ما تحتاجه و هو 25 طناً و الباقي 25 طناً لأبها و بالتالي يبقى صفر من الكمية المعروضة من بريدة و يبقى صفر لكل من الكمية المطلوبة من جدة و أبها. الجدول (6–8) يمثل الحل الأولي الممكن لهذه المسألة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي. يمكن حساب قيمة التكلفة الكلية (ت.ك) لعملية النقل هذه كالتالي:

ت.ك $=[(110\times35)+(110\times5)+(120\times25)+(150\times5)+(140\times25)+(160\times25)]=15650$ ريالاً

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 35	110 5	150	180	40
الخرج(2)	70	120 25	150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	140 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–8)

ثانياً: طريقة أقل التكاليف (Minimum Cost Method):

تقوم هذه الطريقة على مبدأ أن التكاليف هي العنصر المهم في المسألة و بالتالي تهدف إلى إيجاد حل أولي ممكن عبر تخفيض تكلفة النقل على أمل أن يساهم هذا المبدأ في تقليل عدد الجداول اللازمة للوصول للحل الأمثل إن وُجد. تبدأ هذه الطريقة كالتالي:

خطوات طريقة أقل التكاليف:

- حدد الخلية $CELL_{ij}$ ذات التكلفة الأقل في الجدول. (عند التعادل اختر عشوائياً)
- املأ الخلية $CELL_{ij}$ المختارة بأكبر كمية X_{ij} ممكنة بحيث تستوفي الشرط التالي:
  $X_{ij}=Max\{Min\ (s_i,d_j)\}$.

- أعد تقييم عمود المعروض و صف المطلوب كالتالي:

$$\text{New } s_i = s_i - X_{ij}$$

$$\text{New } d_j = d_j - X_{ij}$$

- إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف **i** من التقييم، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود **j** من التقييم.
- إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف **i** و العمود **j** من التقييم.
- أعد تطبيق الخطوات السابقة بعد التعديل على ما تبقى من خلايا مرة أخرى حتى يتم حذف جميع الصفوف و الأعمدة.

لإيضاح ذلك يمكن لنا استخدام المسألة السابقة في الجدول (6–3). نلاحظ أن تكلفة النقل في الخلية $CELL_{21}$ هي الأقل (70 ريالاً) من بين كل الخلايا و بالتالي نملأ هذه الخلية بالكمية 30 طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من الخرج و الكمية المطلوبة من الرياض و نحذف الصف الثاني (الخرج) من التقييم الجديد حيث أن الكمية المعروضة له أصبحت صفراً و الكمية المطلوبة للرياض أصبحت 5 أطنان، كما هو موضح في الجدول (6–9).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110	110	150	180	40
الخرج(2)	70 30	120	150	170	0
بريدة(3)	120	140	140	160	50
المطلوب	5	30	30	25	*120*

الجدول (6–9)

أقل تكلفة نقل للخلايا الأخرى هي 110 و ذلك في الخلية $CELL_{11}$ و الخلية $CELL_{12}$ حيث أن التكلفة متساوية في الخليتين. نختار الخلية $CELL_{11}$ (عشوائياً) و نملأها بالكمية 5 أطنان حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من حرض و الكمية المتبقية المطلوبة من الرياض و نحذف العمود الأول (الرياض) من التقييم الجديد حيث أن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً و الكمية المعروضة لحرض أصبحت 35 طناً، كما هو موضح في الجدول (6–10).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض

حرض(1)	110 5	110	150	180	35
الخرج(2)	70 30	120	150	170	0
بريدة(3)	120	140	140	160	50
المطلوب	0	30	30	25	*120*

الجدول (6–10)

أقل تكلفة نقل للخلايا المتبقية الأخرى هي 110 و ذلك في الخلية $CELL_{12}$. نملأ الخلية $CELL_{12}$ بالكمية 30 طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المتبقية المعروضة من حرض و الكمية المطلوبة من الدمام و نحذف العمود الثاني (الدمام) من التقييم الجديد حيث أن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً و الكمية المعروضة لحرض أصبحت 5 أطنان، كما هو موضح في الجدول (6–11).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150	180	5
الخرج(2)	70 30	120	150	170	0
بريدة(3)	120	140	140	160	50
المطلوب	0	0	30	25	*120*

الجدول (6–11)

أقل تكلفة نقل للخلايا المتبقية الأخرى هي 140 و ذلك في الخلية $CELL_{33}$. نملأ الخلية $CELL_{33}$ بالكمية 30 طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المعروضة من بريدة و الكمية المطلوبة من جدة و نحذف العمود الثالث (جدة) من التقييم الجديد حيث أن الكمية المطلوبة منه أصبحت صفراً و الكمية المعروضة لبريدة أصبحت 20 طناً، كما هو موضح في الجدول (6–12).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150	180	5
الخرج(2)	70 30	120	150	170	0
بريدة(3)	120	140	140 30	160	20
المطلوب	0	0	0	25	*120*

الجدول (6–12)

لم يبق إلا خليتان و الخلية الأقل تكلفة هي الخلية $CELL_{34}$ بتكلفة نقل تساوي 160 ريالاً للطن. نملأ هذه الخلية $CELL_{34}$ بالكمية 20 طناً حيث هي الكمية الأقل بين الكمية المتبقية المعروضة من بريدة و الكمية المطلوبة من أبها و نحذف الصف الثالث (بريدة) من التقييم الجديد حيث أن الكمية المعروضة منه أصبحت صفراً و الكمية المطلوبة لأبها أصبحت 5 أطنان. أخيراً بقي خلية واحدة نملؤها بالكمية المتبقية 5 أطنان مطلوبة لأبها و معروضة من حرض. الجدول النهائي لإيجاد الحل الأولي الممكن باستخدام طريقة أقل التكاليف موضح في الجدول (6−13).

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
40	180 5	150	110 30	110 5	حرض(1)
30	170	150	120	70 30	الخرج(2)
50	160 20	140 30	140	120	بريدة(3)
120	25	30	30	35	المطلوب

الجدول (6−13)

ت.ك=[(110×5)+(110×30)+(180×5)+(70×30)+(140×30)+(160×20)]=14250 ريالاً

<u>ثالثاً: طريقة فوجل التقريبية (Vogel Approximation Method):</u>

تقوم هذه الطريقة على أساس الأخذ في الاعتبار تكلفة الندم (Regret Cost) لكل صف و لكل عمود حتى لا نتكبد تكاليف ناتجة عن سؤ أو خطأ في الاختيار.

<u>خطوات طريقة فوجل التقريبية:</u>

- في كل صف احسب تكلفة الندم على أساس الفرق في التكلفة بين الخليتين صاحبتي التكلفة الأقل في الصف. و في كل عمود احسب تكلفة الندم على أساس الفرق في التكلفة بين الخليتين صاحبتي التكلفة الأقل في العمود.
- اختر أعلى تكلفة ندم من كل الصفوف و الأعمدة. (عند التعادل اختر عشوائياً)
- في الصف أو العمود المختار، املأ الخلية $CELL_{ij}$ ذات تكلفة النقل الأقل بأكبر كمية X_{ij} ممكنة بحيث تستوفي الشرط التالي:

$$X_{ij}=Max\{Min\ (s_i,d_j)\}$$

- أعد تقييم عمود المطلوب و صف المعروض كالتالي:

$$New\ s_i = s_i - X_{ij}$$

$$New\ d_j = d_j - X_{ij}$$

- إذا كانت $s_i<d_j$ احذف الصف **i** من التقييم، أما إذا كانت $d_j<s_i$ احذف العمود **j** من التقييم.
- إذا كانت $s_i=d_j$ احذف الصف **i** و العمود **j** من التقييم.
- أعد تطبيق الخطوات السابقة على ما تبقى من خلايا مرةً أخرى حتى يتم حذف جميع الصفوف و الأعمدة مع مراعاة القيم الجديدة لتكلفة الندم.

في مسألتنا السابقة 6−1 و في جدول (6−3)، لو نظرنا إلى الصف الثاني مثلاً و الخاص بمزرعة الخرج فإن أقل تكلفة نقل للطن الواحد من الخرج سيكون للرياض بتكلفة تساوي 70 ريالاً للطن و لكن لو اخترنا ثاني أقل تكلفة نقل للطن من الخرج فستكون للدمام بتكلفة نقل تساوي 120 ريالاً و هنا سنتكلف 50 ريالاً اضافية ناتجة من سؤ اختيار المسار المناسب للنقل و ذلك باختيارنا النقل من الخرج إلى الدمام بدلاً من الرياض. بالتالي فإن اختيار أي مسار لنقل الألبان من الخرج غير الرياض سيكلف 50 ريالاً اضافية للطن الواحد على الأقل و تعرف هذه التكلفة بتكلفة الندم أو العقوبة لعدم استخدام أفضل طريق نقل لمزرعة الخرج.
لكن السؤال الذي نحتاج للإجابة عليه هل هذا الحل الأولي (بأي طريقة) هو الحل الأمثل؟ للتأكد من ذلك لابد من استخدام إحدى الطرق التالية:

<u>طرق لإيجاد الحل الأمثل:</u>

<u>أولاً: طريقة الحجر المتدحرج (Stepping Stone Method) :</u>

تقوم هذه الطريقة على تقييم الخلايا الفارغة لتحديد ما إذا كان من المصلحة تحويلها إلى خلية مستخدمة. و هذه العملية تشبه عملية تحديد المتغير الداخل في طريقة السمبلكس عن طريق تقييم قيم C_j-Z_j للمتغيرات غير الأساسية. في مثالنا هذا لدينا 12 متغيراً بعضها قيمته أكبر من الصفر و هي المتغيرات الأساسية في هذه المرحلة من الحل (كما في جداول السمبلكس) و بعضها يساوي الصفر و هي المتغيرات غير الأساسية و التي نريد أن نعرف هل من المصلحة تحويل أيٍ منها إلى متغير أساسي.
المتغيرات $(X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{24}, X_{31}, X_{32})$ كلها متغيرات غير أساسية و تساوي الصفر حيث تمثل الكمية المنقولة مثلاً من حرض إلى جدة (X_{13} و التي تساوي الصفر حيث لم يتم نقل أي وحدة من حرض إلى جدة في هذه المرحلة من الحل). و لا بد لنا من معرفة المنفعة على التكلفة الكلية لو حولنا أحد هذه المتغيرات إلى متغير أساسي. لعمل ذلك نقوم بتقييم الخلايا غير المستخدمة و ذلك بنقل وحدة واحدة إلى إحدى هذه الخلايا و دراسة الأثر الناتج عن عملية النقل الجديدة هذه على التكلفة الكلية الحالية و من ثم الانتقال إلى خلية أخرى

لدراسة نفس الأثر و هكذا من خلية إلى أخرى حتى ننتهي من جميع الخلايا غير المستخدمة. إذا كان هناك منفعة تُحسِّن من قيمة التكلفة الكلية نختار الخلية التي تعطي هذه المنفعة و نحولها إلى خلية مستخدمة. تعتمد طريقة التقييم هذه على ما يُسمى بالحلقة المغلقة (**Closed Loop**) و التي تمثل بشكل مضلع مغلق.

خطوات طريقة الحجر المتدرج باستخدام أسلوب مسار الحلقة المغلقة:

- ابدأ بخلية غير مستخدمة و انقل إليها وحدة واحدة (اشارة +) مما سيؤدي إلى زيادة الكمية المعروضة و الكمية المطلوبة في صف وعمود الخلية .
- لعمل التوازن لابد من حذف وحدة واحدة (اشارة −) من نفس الصف لخلية مستخدمة و حذف وحدة واحدة من نفس العمود لخلية مستخدمة أخرى أيضاً.
- تستمر عملية الاضافة (اشارة +) و الحذف (اشارة −) في خلايا مستخدمة حتى نحصل على مسار لمضلع مغلق ينتهي بالخلية غير المستخدمة التي بدأنا منها.
- اجمع التكاليف في الخلايا التي أضفنا لها (اشارة +) و اطرحها من التكاليف في الخلايا التي حذفنا (اشارة −) منها.
- النتيجة تمثل التكلفة الحدية **Marginal Cost** و هي تعكس المنفعة **Utility** أو (عدم المنفعة) على التكلفة الكلية جراء نقل وحدة واحدة و يرمز لها بالرمز $\bar{U}$. (هذه القيمة تشبه قيمة C_j-Z_j في جداول السمبلكس)
- طبق نفس الطريقة على جميع الخلايا غير المستخدمة، و قارن بين منفعة النقل ($\bar{U}$) لجميع الخلايا غير المستخدمة.
- اختر الخلية غير المستخدمة التي تعطي أصغر قيمة سالبة للمنفعة ($\bar{U}$) و نفذ عليها عملية النقل وذلك بنقل أصغر كمية موجودة في الخلايا ذات الاشارة السالبة إلى الخلايا ذات الاشارة الموجبة. (في حالة تعظيم ايرادات النقل اختر الخلية غير المستخدمة التي تعطي أكبر قيمة موجبة للمنفعة ($\bar{U}$))

شروط الحلقة المغلقة:

- مجموع عدد الخلايا عدد زوجي منها الخلية الأولى فقط غير مستخدمة.
- عدد الاشارات الموجبة يساوي عدد الاشارات السالبة و لا يزيد عن اشارة واحدة في كل صف و عمود.
- الخلية الأولى غير المستخدمة تكون اشارتها موجبة.
- عدد الأضلاع لا يقل عن أربعة أضلاع.

للمسألة 6−1 سنقوم بتقييم الخلايا غير المستخدمة بناءً على ما ذكرناه سابقاً:

بافتراض أننا بدأنا بالحل الأولي من طريقة الركن الشمالي الغربي (جدول 6−8)، فإن كمية X_{13} للخلية (حرض / جدة) تساوي الصفر حيث أنها خلية غير مستخدمة و باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة يمكن لنا عمل شكل مضلع كما هو موضح في الجدول (6−14) و ذلك بوضع اشارة موجب (+) للخلية $CELL_{13}$ و الخلية $CELL_{22}$ و اشارة سالب (−) للخلية $CELL_{12}$ و الخلية $CELL_{23}$، و بالتالي حساب قيم $\bar{U}_{13}$ كما يلي:

$\bar{U}_{13} = 150 + 120 - 110 - 150 = +10$

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 35	− 110 5	+ 150	180	40
الخرج(2)	70	+ 120 25	− 150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	140 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6−14)

بالنسبة للخلية غير المستخدمة $CELL_{14}$، يمكن لنا عمل شكل مضلع باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة كما هو موضح في الجدول التالي (6−15) و ذلك بوضع اشارة موجب (+) للخلية $CELL_{14}$ و الخلية $CELL_{33}$ و الخلية $CELL_{22}$ و اشارة سالب (−) للخلية $CELL_{34}$ و الخلية $CELL_{23}$ و الخلية $CELL_{12}$ ، و بالتالي حساب قيم $\bar{U}_{14}$ كما يلي:

$\bar{U}_{14} = 180 + 140 + 120 - 160 - 150 - 110 = +20$

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 35	− 110 5	150	+ 180	40
الخرج(2)	70	+ 120 25	− 150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	+ 140 25	− 160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6−15)

و هكذا بالنسبة لجميع الخلايا غير المستخدمة الأخرى. التالي يوضح النتائج النهائية لعملية التقييم:

$\bar{U}_{13} = 110 + 150 - 120 - 150 = +10$
$\bar{U}_{14} = 180 + 140 + 120 - 160 - 150 - 110 = +20$
$\bar{U}_{21} = 70 + 110 - 110 - 120 = -50$
$\bar{U}_{24} = 170 + 140 - 160 - 150 = 0$
$\bar{U}_{31} = 120 + 110 + 150 - 110 - 120 - 140 = +10$

$\bar{U}_{32} = 140 + 150 - 120 - 140 = +30$

<u>نتائج عملية التقييم للخلايا غير المستخدمة:</u>

أولاً: إذا كانت مسألة النقل Min (مسألة تخفيض تكاليف):

- **إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ سالبة لخلية واحدة على الأقل، اختر الخلية التي لديها أصغر قيمة سالبة و نفذ عليها عملية النقل.**
- **إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ موجبة لكل الخلايا غير المستخدمة، <u>قف</u> فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.**
- **إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ موجبة لكل الخلايا غير المستخدمة إلا لخلية واحدة على الأقل قيمة $\bar{U}$ تساوي الصفر فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، و لكن هناك حل بديل عند التنفيذ في الخلية التي لديها القيمة صفر.**

ثانياً: إذا كانت مسألة النقل Max (مسألة تعظيم ايرادات):

- **إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ موجبة لخلية واحدة على الأقل، اختر الخلية التي لديها أكبر قيمة موجبة و نفذ عليها عملية النقل.**
- **إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ سالبة لكل الخلايا غير المستخدمة، <u>قف</u> فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.**
- **إذا أظهرت عملية التقييم أن قيمة $\bar{U}$ سالبة لكل الخلايا غير المستخدمة إلا لخلية واحدة على الأقل قيمة $\bar{U}$ تساوي الصفر فقد وصلنا إلى الحل الأمثل، و لكن هناك حل بديل عند التنفيذ في الخلية التي لديها القيمة صفر.**

نتائج التقييم أظهرت أن قيمة $\bar{U}_{21}$ هي أصغر قيمة سالبة و بالتالي يمكن تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية حيث أن الأثر على التكلفة الكلية هو التخفيض بقيمة 50 ريالاً للطن الواحد. لكن ماهي الكمية التي يمكن تنفيذ عملية النقل عليها لصالح هذه الخلية. للإجابة على هذا السؤال يمكن العودة إلى أسلوب الحلقة المغلقة التي تم تطبيقها على هذه الخلية $CELL_{21}$. بالعودة إلى مسار الحلقة المغلقة للخلية $CELL_{21}$ نجد أننا و ضعنا اشارة موجب في الخلايا $CELL_{21}$ و $CELL_{12}$ و اشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$ و $CELL_{22}$. للخلايا التي فيها اشارة سالب $CELL_{11}$ و $CELL_{22}$، نقارن بين الكميات X_{11} و X_{22} و نطرح الكمية الأقل من كلٍ من الخليتين ثم نضيف هذه الكمية إلى الكميات X_{21} و X_{12} في الخلايا $CELL_{21}$ و $CELL_{12}$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول (6-16)، حيث $X_{11}=10, X_{12}=30, X_{21}=25, X_{23}=5, X_{33}=25, X_{34}=25$.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 10	110 30	150	180	40
الخرج(2)	70 25	120	150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	140 25	160 25	50

المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6−16)

أما التكلفة الكلية فقد انخفضت بقيمة 50 ريالاً للطن و حيث أن عملية التنفيذ تمت على 25 طن منقــول إلـــى الخلية $CELL_{21}$ فإن الانخفاض في التكلفة أصبح (50×25=1250) و بالتالي فالتكلفة الكلية تساوي:

ت.ك = 15650 − 1250 =14400 ريالاً

كما يمكن حسابها كما فعلنا سابقاً:

ت.ك=[(10×110)+(30×110)+(25×70)+(5×150)+(25×140)+(25×160)]=14400 ريالاً

نستمر في عملية التحقق من وصولنا إلى الحل الأمثل كما وضحنا سابقاً و ذلك بتقييم الخلايا غير المســتخدمة في الجدول الجديد و سنستمر في عمل ذلك حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

$\bar{U}_{13} = 150 + 70 - 150 - 110 = -40$
$\bar{U}_{14} = 180 + 140 + 70 - 160 - 150 - 110 = -30$
$\bar{U}_{22} = 120 + 110 - 110 - 70 = +50$
$\bar{U}_{24} = 170 + 140 - 160 - 150 = 0$
$\bar{U}_{31} = 120 + 150 - 70 - 140 = +60$
$\bar{U}_{32} = 140 + 110 + 150 - 110 - 70 - 140 = +80$

نتائج التقييم أظهرت أن قيمة $\bar{U}_{13}$ هي أصغر قيمة سالبة و بالتالي يمكن تنفيذ عملية النقل على هــذه الخليـــة حيث أن الأثر على التكلفة الكلية هو التخفيض بقيمة 40 ريالاً للطن الواحد و بالعودة إلى مسار الحلقة المغلقة للخلية $CELL_{13}$ نجد أننا و ضعنا اشارة موجب في الخلايا $CELL_{13}$ و $CELL_{21}$ و اشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$ و $CELL_{23}$. و حيث أن الكمية X_{23} أقل من الكمية X_{11} فإننا نطرح الكمية ($X_{23}=5$) من الكميـــة في الخلية $CELL_{23}$ فتصبح $X_{23}=5-5=0$ ومن الكمية فـــي الخليـــة $CELL_{11}$ فتصـــبح $X_{11}=10-5=5$، و نضيف هذه الكمية إلى الكميات في الخلايا ذات الاشارة الموجبة فتصبح $X_{13}=5$ و $X_{21}=30$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول (6−17)، حيث $X_{11}=5, X_{12}=30, X_{13}=5, X_{21}=30, X_{33}=25, X_{34}=25$.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150 5	180	40
الخرج(2)	70	120	150	170	30

	30				
بريدة(3)	120	140	140 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6−17)

التكلفة الكلية انخفضت بقيمة 40 ريالاً للطن و حيث أن عملية التنفيذ تمت على 5 أطنان منقولة إلى الخلية $CELL_{13}$ فإن الانخفاض في التكلفة أصبح (40×5=200) و بالتالي فالتكلفة الكلية تساوي:

ت.ك = 14400 − 200 =14200 ريالاً

مرةً أخرى نستمر في عملية التحقق من وصولنا إلى الحل الأمثل و ذلك بتقييم الخلايا غير المستخدمة في الجدول الجديد (6−17) باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة. أظهرت عملية التقييم التالي:

$\bar{U}_{14} = 180 + 140 - 160 - 150 = +10$
$\bar{U}_{22} = 120 + 110 - 110 - 70 = +50$
$\bar{U}_{23} = 150 + 110 - 150 - 70 = +40$
$\bar{U}_{24} = 170 + 140 + 110 - 160 - 150 - 70 = +40$
$\bar{U}_{31} = 120 + 150 - 110 - 140 = +20$
$\bar{U}_{32} = 140 + 150 - 110 - 140 = +40$

حيث أن جميع قيم $\bar{U}$ موجبة و المطلوب تخفيض تكاليف النقل فقد وصلنا إلى الحل الأمثل وفيه سيتم نقل من حرض 5 أطنان إلى الرياض و 30 وطن إلى الدمام و 5 أطنان إلى جدة ومن الخرج 30 طن إلى الرياض و من بريدة 25 طن إلى جدة و 25 طن إلى أبها، و ذلك بتكلفة كلية تساوي 14200 ريالاً.

ثانياً: طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method :

هذه الطريقة مشابهة إلى حدٍ ما بطريقة الحجر المتدحرج إلا أنها تستخدم المنفعة المستهلكة في الخلايا المستخدمة لإيجاد المنفعة المفقودة للخلايا غير المستخدمة بأسلوب رياضي، أو بمعنى آخر إيجاد التكلفة الحدية لنقل وحدة واحدة إلى الخلية غير المستخدمة.

خطوات طريقة التوزيع المعدلة:

1. أوجد الحل الأولي باستخدام أي طريقة شئت من الطرق السابقة لإيجاد الحل الأولي كما في الجدول 6−18.
2. أوجد عمود إلى يسار الجدول و ارمز له بالرمز u_i و صف أعلى الجدول و ارمزله بالرمز v_j حيث (u_i+v_j) تمثل المنفعة المستهلكة للخلايا.

3. أوجد قيم u_i و v_j باستخدام المعادلة التالية للخلايا المستخدمة (حيث المنفعة المفقودة تساوي صفر):

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0 \quad \text{أو} \quad c_{ij} = u_i + v_j$$

4. أوجد المنفعة المفقودة أو التكلفة الحدية للخلايا غير المستخدمة k_{ij} كالتالي:

$$k_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

5. اختر الخلية $CELL_{ij}$ ذات أصغر قيمة سالبة للمنفعة k_{ij} (أكبر قيمة موجبة في حالة التعظيم).
6. طبق مسار الحلقة المغلقة على الخلية المختارة.
7. نفذ عملية النقل وذلك بنقل أصغر كمية موجودة في الخلايا ذات الاشارة السالبة إلى الخلايا ذات الاشارة الموجبة. (في حالة تعظيم ايرادات النقل اختر الخلية غير المستخدمة التي تعطي أكبر قيمة موجبة للمنفعة k_{ij}).
8. أعد تطبيق الخطوات 3-7 على الجدول الجديد حتى نصل إلى الحل الأمثل.

v_j		$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	$v_4=$	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=$	حرض 1	110 35	110 5	150	180	40
$u_2=$	الخرج 2	70	120 25	150 5	170	30
$u_3=$	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6-18)

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

بافتراض أن (u_i=0) فيمكن إيجاد قيم u_i و v_j الأخرى من الجدول (18-5) بمعلومية تكلفة النقل c_{ij} كالتالي، و الموضح في الجدول (6-19):

$u_1 + v_1 = 110$ ========➔ $v_1 = 110$

$u_1 + v_2 = 110$ ========➔ $v_2 = 110$

$u_2 + v_2 = 120$ ========➔ $u_2 = 10$

$u_2 + v_3 = 150$ ========➔ $v_3 = 140$

$u_3 + v_3 = 140$ ========➔ $u_3 = 0$

$u_3 + v_4 = 160$ ========➔ $v_4 = 160$

	v_j	$v_1=110$	$v_2=110$	$v_3=140$	$v_4=160$	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=0$	حرض 1	110 / 35	110 / 5	150	180	40
$u_2=10$	الخرج 2	70	120 / 25	150 / 5	170	30
$u_3=0$	بريدة 3	120	140	140 / 25	160 / 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6-19)

يمكن الآن إيجاد قيم k_{ij} للخلايا غير المستخدمة كما يلي:

$k_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$
$k_{13} = 150 - 0 - 140 = 10$
$k_{14} = 180 - 0 - 160 = 20$
$k_{21} = 70 - 10 - 110 = -50$
$k_{24} = 170 - 10 - 160 = 0$
$k_{31} = 120 - 0 - 110 = 10$
$k_{32} = 140 - 0 - 110 = 30$

من قيم k_{ij} السابقة نجد أن قيمة k_{21} هي أصغر قيمة سالبة. سنقوم الآن بتطبيق مسار الحلقة المغلقة و ذلك بوضع اشارة موجب في الخلايا $CELL_{21}$ و $CELL_{12}$ و اشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$ و $CELL_{22}$. حيث أن الكمية X_{22} أقل من الكمية X_{11} فإننا نطرح الكمية ($X_{22}=25$) من الكمية في الخلية $CELL_{22}$ فتصبح $X_{22}=25-25=0$ ومن الكمية في الخلية $CELL_{11}$ فتصبح $X_{11}=10$، و نضيف هذه الكمية إلى الكميات في الخلايا ذات الاشارة الموجبة فتصبح $X_{12}=30$ و $X_{21}=25$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول (6-20)، حيث $X_{11}=10, X_{12}=30, X_{21}=25, X_{23}=5, X_{33}=25, X_{34}=25$.

u_i \ v_j		$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	$v_4=$	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=$	حرض 1	110 / 10	110 / 30	150	180	40
$u_2=$	الخرج 2	70 / 25	120	150 / 5	170	30
$u_3=$	بريدة 3	120	140	140 / 25	160 / 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–20)

نتابع بإيجاد قيم u_i و v_j للجدول السابق بافتراض أن $(u_i=0)$ و بمعلومية تكلفة النقل c_{ij} ، و الموضــح فــي الجدول (6–21):

$u_1 + v_1 = 110$ ========➔ $v_1 = 110$

$u_1 + v_2 = 110$ ========➔ $v_2 = 110$

$u_2 + v_2 = 70$ ========➔ $u_2 = -40$

$u_2 + v_3 = 150$ ========➔ $v_3 = 190$

$u_3 + v_3 = 140$ ========➔ $u_3 = -50$

$u_3 + v_4 = 160$ ========➔ $v_4 = 210$

u_i \ v_j		$v_1=110$	$v_2=110$	$v_3=190$	$v_4=210$	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=0$	حرض 1	110 / 10	110 / 30	150	180	40

$u_2=-40$	الخرج 2	70 25	120	150 5	170	30
$u_3=-50$	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–21)

نوجد المنفعة المفقودة للخلايا غير المستخدمة k_{ij} مرةً أخرى:

$k_{13} = 150 – 0 – 190 = -40$
$k_{14} = 180 – 0 – 210 = -30$
$k_{22} = 120 – (-40) – 110 = 50$
$k_{24} = 170 – (-40) – 210 = 0$
$k_{31} = 120 – (-50) – 110 = 60$
$k_{32} = 140 – (-50) – 110 = 80$

من قيم k_{ij} السابقة نجد أن قيمة k_{13} هي أصغر قيمة سالبة. سنقوم الآن بتطبيق مسار الحلقة المغلقة و ذلك بوضع اشارة موجب في الخلايا $CELL_{13}$ و $CELL_{21}$ و اشارة سالب في الخلايا $CELL_{11}$ و $CELL_{23}$. حيث أن الكمية $X_{23}=5$ أقل من الكمية X_{11} فإننا نحذف هذه الكمية من الخلية $CELL_{23}$ فتصبح $X_{23}=0$ ونطرحها من الكمية في الخلية $CELL_{11}$ فتصبح $X_{11}=5$، و نضيف هذه الكمية إلى الكميات في الخلايا ذات الاشارة الموجبة فتصبح $X_{13}=5$ و $X_{21}=30$. نتيجة هذا التنفيذ موضح في الجدول (6–22)، حيث $X_{11}=5,$ $X_{12}=30, X_{13}=5, X_{21}=30, X_{33}=25, X_{34}=25$.

	v_j	$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	$v_4=$	
u_i		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=$	حرض 1	110 5	110 30	150 5	180	40
$u_2=$	الخرج 2	70 30	120	150	170	30
$u_3=$	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–22)

مرةً أخرى نوجد قيم u_i و v_j للجدول السابق بافتراض أن $(u_i=0)$ و بمعلومية تكلفة النقل c_{ij} ، و الموضح في الجدول (6–23)كالتالي:

$u_1 + v_1 = 110$ ========➔ $v_1 = 110$

$u_1 + v_2 = 110$ ========➔ $v_2 = 110$

$u_1 + v_3 = 150$ ========➔ $v_3 = 150$

$u_2 + v_1 = 70$ ========➔ $u_2 = -40$

$u_3 + v_3 = 140$ ========➔ $u_3 = -10$

$u_3 + v_4 = 160$ ========➔ $v_4 = 170$

u_i \ v_j		$v_1=110$	$v_2=110$	$v_3=150$	$v_4=170$	
		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=0$	حرض 1	110 5	110 30	150 5	180	40
$u_2=-40$	الخرج 2	70 30	120	150	170	30
$u_3=-10$	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6-23)

كذلك نوجد المنفعة المفقودة للخلايا غير المستخدمة k_{ij} مرةً أخرى:

$k_{14} = 180 – 0 – 170 = 10$
$k_{22} = 120 – (-40) – 110 = 50$
$k_{23} = 150 – (-40) – 150 = 40$
$k_{24} = 170 – (-40) – 170 = 40$
$k_{31} = 120 – (-10) – 110 = 20$
$k_{32} = 140 – (-10) – 110 = 40$

حيث أن جميع قيم k_{ij} السابقة موجبة فقد وصلنا إلى الحل الأمثل كما هو في الجدول (6-24) و هو نفس الحل الذي وصلنا إليه باستخدام طريقة المسار الحرج و فيه التكلفة الكلية تساوي 14200 ريالاً.

u_i \ v_j		$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	$V_4=$	
		الرياض 1	الدمام 2	جدة 3	أبها 4	المعروض
$_1=$	حرض 1	110 5	110 30	150 5	180	40

$u_2=$	الخرج 2	70 30	120	150	170	30
$u_3=$	بريدة 3	120	140	140 25	160 25	50
	المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6-24)

<u>الحالة الثانية: الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة:</u>

كانت تطبيقاتنا السابقة على حالة التعادل بين الكمية المعروضة و الكمية المطلوبة و هي حالة نادراً ما تحدث. الآن يمكن لنا التعامل مع حالة أن الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة و هي حالة من الحالات المتوقع حدوثها. التعامل مع هذه الحالة لا يختلف عما سبق إلا في شيء واحد فقط و هو إضافة عمود يُسمى وهمي (Dummy)، قيمة التكلفة الخاصة بالنقل فيه تساوي صفر.

مسألة 6-2: الجدول (6-25) يمثل تعديلاً أحدثناه على الكمية المعروضة في المسألة السابقة 6-1 بحيث تصبح الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة بعدد 10 أطنان.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110	110	150	180	0	50
الخرج2	70	120	150	170	0	30
بريدة3	120	140	140	160	0	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

الجدول (6-25)

الآن أصبح عدد أعمدة الجدول (6-25) 5 أعمدة و ذلك بإضافة عمود وهمي بكمية مطلوبة 10 أطنان لزيادة الكمية المطلوبة حتى تتساوى مع الكمية المعروضة. لبدء الحل يمكن استخدام أي طريقة من الطرق السابقة لإيجاد الحل الأولي الممكن. الجدول (6-26) يمثل الحل الأولي الممكن باستخدم طريقة الركن الشمالي الغربي.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 35	110 15	150	180	0	50
الخرج2	70	120 15	150 15	170	0	30
بريدة3	120	140	140	160	0	50

			15	25	10	
المطلوب	35	30	30	25	10	

الجدول (6−26)

باستخدام أسلوب الحلقة المغلقة و طريقة الحجر المتدحرج لإيجاد الحل الأمثل، نبدأ بتقييم الخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{13} = 10$ $\bar{U}_{14} = 20$ $\bar{U}_{15} = 0$ $\bar{U}_{21} = -50$

$\bar{U}_{24} = 0$ $\bar{U}_{25} = -10$ $\bar{U}_{31} = 10$ $\bar{U}_{32} = 30$

قيمة Ū للخلية $CELL_{21}$ هي أصغر قيمة سالبة و بالتالي يمكن لنا تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية كما فعلنا في المسألة السابقة 6−1. الجدول التالي (6−27) يمثل الحل لهذه المرحلة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 20	110 30	150	180	0	50
الخرج2	70 15	120	150 15	170	0	30
بريدة3	120	140	140 15	160 25	0 10	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

الجدول (6−27)

نقيّم الخلايا غير المستخدمة مرةً أخرى.

$\bar{U}_{13} = -40$ $\bar{U}_{14} = -30$ $\bar{U}_{15} = -50$ $\bar{U}_{22} = 50$

$\bar{U}_{24} = 0$ $\bar{U}_{25} = -10$ $\bar{U}_{31} = 60$ $\bar{U}_{32} = 80$

قيمة Ū للخلية $CELL_{15}$ هي أصغر قيمة سالبة و بالتالي يمكن لنا تنفيذ عملية النقل علـــى هـــذه الخليـــة و الجدول (6−28) يمثل الحل لهذه المرحلة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 10	110 30	150	180	0 10	50
الخرج2	70 25	120	150 5	170	0	30
بريدة3	120	140	140 25	160 25	0	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

الجدول (6−28)

نقيّم الخلايا غير المستخدمة مرةً أخرى.

$\bar{U}_{13} = -40$ $\bar{U}_{14} = -30$ $\bar{U}_{22} = 50$ $\bar{U}_{24} = 0$

$\bar{U}_{25} = 40$ $\bar{U}_{31} = 60$ $\bar{U}_{32} = 80$ $\bar{U}_{35} = 50$

قيمة Ū الخلية $CELL_{13}$ هي أصغر قيمة سالبة و بالتالي يمكن لنا تنفيذ عملية النقل على هذه الخلية و الجدول (6−29) يمثل الحل لهذه المرحلة.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	وهمي(5)	المعروض
حرض1	110 5	110 30	150 5	180	0 10	50
الخرج2	70 30	120	150	170	0	30
بريدة3	120	140	140 25	160 25	0	50
المطلوب	35	30	30	25	10	

الجدول (6−29)

نقيّم الخلايا غير المستخدمة مرةً أخرى.

$\bar{U}_{14} = 10$ $\bar{U}_{21} = 50$ $\bar{U}_{22} = 40$ $\bar{U}_{23} = 40$
$\bar{U}_{24} = 40$ $\bar{U}_{31} = 20$ $\bar{U}_{32} = 40$ $\bar{U}_{35} = 10$

حيث أن قيم Ū كلها موجبة فقد وصلنا إلى الحل الأمثل و فيه حرض تستبقي لديها 10 أطنان و هي الفائض نتيجةً لزيادة الكمية المعروضة علر الكمية المطلوبة.

ت.ك. = 14200 ريالاً

الحالة الثالثة: الكمية المعروضة أصغر من الكمية المطلوبة:

مثل الحالة السابقة، هذه حالة من الحالات التي يُتوقع حدوثها و يمكن لنا التعامل مع هذه الحالة كما تعاملنا مع الحالة السابقة و ذلك بإضافة صف يُسمى وهمي (Dummy)، قيمة التكلفة الخاصة بالنقل فيه تساوي صفر.
مسالة 6−3: الجدول (6−30) يمثل تعديلاً أحدثناه على الكمية المعروضة في المسألة 6−1 بحيث تصبح الكمية المعروضة أصغر من الكمية المطلوبة بعدد 10 أطنان.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض1	110	110	150	180	40
الخرج2	70	120	150	170	30
بريدة3	120	140	140	160	40
	0	0	0	0	10

	25	30	30	35	المطلوب

الجدول (6–30)

الجدول التالي (6–31) يمثل الحل الأمثل. (حاول الحل لتصل إلى نفس هذه النتيجة)

المعروض	أبها(4)	جدة(3)	الدمام(2)	الرياض(1)	
40	180	150 5	110 30	110 5	حرض1
30	170	150	120	70 30	الخرج2
40	160 15	140 25	140	120	بريدة3
10	0 10	0	0	0	*وهمي4*
	25	30	30	35	المطلوب

الجدول (6–31)

ت.ك. = 12600 ريالاً

<u>حالة التحلل Degenerate Case:</u>

تحدث حالة التحلل في جداول النقل عندما: (عدد الخلايا المستخدمة < عدد الصفوف + عدد الأعمدة –1) و يدخل في ذلك الصف أو العمود الوهمي. و هذه الحالة غير مرغوب فيها و السبب في ذلك أنه لا يمكن استخدام طريقة الحجر المتدحرج أو طريقة التوزيع المعدلة لإيجاد الحل الأمثل مما يستدعي إيجاد وسائل للتغلب على هذه المشكلة عند حدوثها و كثيراً ما تحدث. لعلاج مشكلة التحلل يمكن تحويل إحدى الخلايا غير المستخدمة إلى خلية اصطناعية مستخدمة (Artificial Used Cell) و ذلك بملء عددٍ من الخلايا غير المستخدمة بكمية اصطناعية تساوي الصفر(اصطناعية لأنها في الحقيقة خلية غير مستخدمة) حتى تتحول الحالة إلى حالة عدم التحلل (عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة –1)، عندئذٍ يمكن لنا استخدام طريقة الحجر المتدحرج أو طريقة التوزيع المعدلة لإيجاد الحل الأمثل.

<u>مسألة 6–4:</u> المسألة التالية كما في الجدول (6–32) توضح هذه الحالة،

المعروض	4	3	2	1	
10	12	10	8	5 10	1
20	10	8	12	10	2

		20			
3	6	8	12 30	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	*85*

الجدول (6–32)

في مثالنا هذا استخدمنا طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأولي الممكن و يلاحظ هنا حالة التحلـــل لأن عدد الخلايا المستخدمة في هذا الجدول 4 خلايا و المطلوب 6 خلايا مستخدمة حيث لدينا ثلاثة صفوف و أربعة أعمدة. سنختار عشوائياً الخلايا $CELL_{21}$ و $CELL_{32}$ و نملأهما بالكمية الاصطناعية صفر، فيصبح لدينا 6 خلايا مستخدمة و نخرج من حالة التحلل كما في الجدول التالي (6–33).

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10 0	12 20	8	10	20
3	6	8 0	12 30	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	*85*

الجدول (6–33)

ت.ك = 900 ريالاً.

باستخدام طريقة الحجر المتدحرج لإيجاد الحل الأمثل، نبدأ بإيجاد قيم $\bar{U}$ التالية للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 1$, $\bar{U}_{13} = -1$, $\bar{U}_{14} = 3$, $\bar{U}_{23} = -8$, $\bar{U}_{24} = -4$, $\bar{U}_{31} = 0$.

سننفذ عملية النقل على الخلية $CELL_{23}$ ($\bar{U}_{23}$ أصغر قيم سالبة) و الموضحة في الجدول (6–34).

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10 0	12	8 20	10	20
3	6	8 20	12 10	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	*85*

الجدول (6–34)

ت.ك = 740 ريالاً.

لاحظ أن الخلية $CELL_{21}$ خلية فارغة في الحقيقة لكن بقيت فيها الكمية صفر من الجدول السابق و لذلك سنظل في حالة التحلل في هذا الجدول. مرةً أخرى باستخدام طريقة الحجر المتدحرج نوجد قيم $\bar{U}$ التالية للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 7, \quad \bar{U}_{13} = 9, \quad \bar{U}_{14} = 11, \quad \bar{U}_{22} = 8, \quad \bar{U}_{24} = 4, \quad \bar{U}_{31} = -8.$

ننفذ الآن عملية النقل على الخلية $CELL_{31}$ ($\bar{U}_{31}$ أصغر قيم سالبة) و الموضحة في الجدول (6–35).

	1	2	3	4	المعروض
1	5 10	8	10	12	10
2	10	12	8 20	10	20
3	6 0	8 20	12 10	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	*85*

الجدول (6–35)

ت.ك = 740 ريالاً.

نلاحظ هنا أن قيمة التكلفة الكلية لم يتغير برغم تغير خط النقل و ذلك لأن التنفيذ تم على خلية مشغولة $CELL_{21}$ بالكمية صفر و التي تم نقلها إلى الخلية $CELL_{31}$ و كل ذلك حدث بسبب وجود حالة التحلل. نوجد الآن قيم $\bar{U}$ الجديدة للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 1, \quad \bar{U}_{13} = -1, \quad \bar{U}_{14} = 3, \quad \bar{U}_{21} = 8, \quad \bar{U}_{22} = 8, \quad \bar{U}_{24} = 4.$

ننفذ الآن عملية النقل على الخلية $CELL_{13}$ و الموضحة في الجدول (6–36).

	1	2	3	4	المعروض
1	5 0	8	10 10	12	10
2	10	12	8 20	10	20
3	6 10	8 20	12	10 25	55
المطلوب	10	20	30	25	*85*

الجدول (6–36)

ت.ك = 730 ريالاً.

قيم Ū الجديدة للخلايا غير المستخدمة:

$\bar{U}_{12} = 1, \quad \bar{U}_{14} = 3, \quad \bar{U}_{21} = 7, \quad \bar{U}_{22} = 7, \quad \bar{U}_{24} = 3, \quad \bar{U}_{33} = 1.$

حيث أن جميع قيم Ū الجديدة للخلايا غير المستخدمة موجبة و حيث أن دالة الهدف للمسألة هو تخفيض تكاليف النقل فقد وصلنا إلى الحل الأمثل.

حالة خاصة: حالة اغلاق بعض الطرق:

مسألة 6-5: **ماذا يحدث لو أن بعض طرق ممنوعة (مغلقة)، مثلاً لو كان من الممنوع النقل من بريدة إلى جدة. في هذه الحالة لابد من تغيير تكلفة النقل من بريدة إلى جدة من 140 ريالاً إلى قيمة كبيرة جداً نسميها M. هذا يعني أن الجدول الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي سيظهر كالتالي كما في الجدول (6-37).**

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 35	110 5	150	180	40

الخرج(2)	70	120 25	150 5	170	30
بريدة(3)	120	140	M 25	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–37)

بعد تقييم الخلايا غير المستخدمة ظهرت لنا القيم التالية:

$\bar{U}_{13} = 10$ $\bar{U}_{14} = M-120$ $\bar{U}_{21} = -50$
$\bar{U}_{24} = M-140$ $\bar{U}_{31} = 150-M$ $\bar{U}_{32} = 170-M$

أصغر قيمة سالبة للمنفعة $\bar{U}$ موجودة في الخلية غير المستخدمة $CELL_{31}$. يمكن الآن تنفيذ عملية النقل لهذه الخلية و سيظهر لنا كما في الجدول (6–38). نلاحظ هنا أن عدد الخلايا المشغولة أقل مما هو مطلوب في حالة عدم التحلل و بالتالي سنملأ إحدى الخلايا غير المستخدمة و لتكن الخلية CELL33 بالكمية صفر و نستمر في عملية التقييم حتى نصل إلى الحل الأمثل كما هو موضح في الجدول (6–38) إلى الجدول (6–41) و الحل الأمثل موجود في الجدول (6–41).

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 10	110 30	150	180	40
الخرج(2)	70	120	150 30	170	30
بريدة(3)	120 25	140	M 0	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–38)

$\bar{U}_{13} = -M+160$ $\bar{U}_{14} = 30$ $\bar{U}_{21} = M-200$
$\bar{U}_{22} = M-150$ $\bar{U}_{24} = M-140$ $\bar{U}_{32} = 20$ $\bar{U}_{33} = 0$

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 10	110 30	150 0	180	40
الخرج(2)	70	120	150 30	170	30
بريدة(3)	120 25	140	M	160 25	50

المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–39)

$\bar{U}_{13} = 0$ $\quad$ $\bar{U}_{14} = 30$ $\quad$ $\bar{U}_{21} = -40$

$\bar{U}_{22} = 10$ $\quad$ $\bar{U}_{32} = 20$ $\quad$ $\bar{U}_{33} = M-160$

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110	110 30	150 10	180	40
الخرج(2)	70 10	120	150 20	170	30
بريدة(3)	120 25	140	M	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–40)

$\bar{U}_{11} = 40$ $\quad$ $\bar{U}_{14} = 70$ $\quad$ $\bar{U}_{22} = 10$

$\bar{U}_{24} = 60$ $\quad$ $\bar{U}_{32} = -20$ $\quad$ $\bar{U}_{33} = M-200$

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110	110 10	150 30	180	40
الخرج(2)	70 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120 5	140 20	M	160 25	50
المطلوب	35	30	30	25	120

الجدول (6–41)

$\bar{U}_{11} = 20$ $\quad$ $\bar{U}_{14} = 50$ $\quad$ $\bar{U}_{22} = 30$

$\bar{U}_{23} = 20$ $\quad$ $\bar{U}_{24} = 60$ $\quad$ $\bar{U}_{33} = M-180$

ت.ك. = 15100 ريالاً

تحليل الحساسية لمسألة النقل:

رأينا سابقاً في موضوع تحليل الحساسية لمسائل البرمجة الخطية كيف يمكن معرفة الأثر الذي يظهر على الحل الأمثل عند تغير عنصرٍ أو أكثر من عناصر البرنامج الخطي و حيث أن مسألة النقل ماهي إلا تطبيق من

تطبيقات لبرمجة الخطية فإن استخدام التحليل السابق ممكن باستخدام مخرجات برنـــامج Lindo أو باســـتخدام جداول النقل. سنركز في حديثنا هنا على دراسة تحليل الحساسية باستخدام جداول النقل.

من المسألة 6-1 وجدنا عند الحل الأمثل أن المتغيرات الأساسية هـــي $X_{11}=5, X_{12}=30, X_{13}=5, X_{21}=30,$ $X_{33}=25, X_{34}=25$ و أن باقي المتغيرات غير أساسية و أن قيمة دالة الهدف تساوي 14200 ريالاً.

أولاً: أثر التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف:

1. أثر التغير في معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف:

إذا تغير المعامل C_{ij} للمتغير غير الأساسي X_{ij} في دالة الهدف ضمن المدى المسموح به فإن هذا التغيــر لــن يغير الحل الأمثل و لا قيم المتغيرات و لا قيمة دالة الهدف. و لمعرفة هذا المدى لمعـــاملات المتغيـــرات غيـــر الأساسية في دالة الهدف لمسألة النقل في حالة تخفيض التكاليف (Min) فإن الحد الأعلى يكون دائمـــاً و أبـــداً مالا نهاية حيث أن التكلفة الحالية لهذا المتغير غير مقبولة حالياً مما جعل الكمية المنقولة تساوي صفراً فكيـــف سيكون الحال لو زادت هذه التكلفة؟ أما قيمة الحد الأدنى فيمكن إيجادها بطرح التكلفة المخفضة مـــن التكلفـــة الحالية لهذا المتغير و التكلفة المخفضة هنا يمكن إيجادها باستخدام طريقة الحجر المتدحرج من قيمـــة $\bar{U}_{ij}$ أو باستخدام طريقة التوزيع المعدلة من قيمة k_{ij}.

في المسألة 6-1 نجد أن X_{14} متغير غير أساسي و تكلفته الحالية 180 ريالاً للطن الواحد و حيـــث أن قيمـــة $\bar{U}_{14}=10$ باستخدام طريقة الحجر المتدحرج (جدول 6-17) أو قيمة $k_{14}=10$ باستخدام طريقة التوزيع المعدلة (جدول 6-24) فإن الحد الأدنى لمعامل $X_{14}=180\text{-}10=170$ بمعنى آخر إذا كانت $170 \le C_{14} \le \infty$ فإن الحل الأمثل لن يتغير و لن تتغير قيم المتغيرات و لن تتغير قيمة دالة الهدف أما إذا انخفضت تكلفة هذا المتغير عن 170 ريالاً مع ثبات العناصر الأخرى فإن الحل الأمثل سيتغير و ستتغير قيم المتغيرات و ســـتتغير قيمـــة دالـــة الهدف و يتحول هذا المتغيرُ من متغير غير أساسي إلى متغيرٍ أساسي. أما إذا كانت تكلفة هذا المتغير تســـاوي 170 ريالاً بالضبط فسيكون لدينا حل بديل أو متعـــدد (Multiple or Alternative Optimal Solution) بمعنى سيكون لدينا حلان الأول يبقى الحال كما هو بدون تغير و الثاني سيتغير فيه الحل الأمثل و ستتغير قـــيم المتغيرات و لكن تبقى قيمة دالة الهدف كما هي.

2. أثر التغير في معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف:

إذا تغير المعامل C_{ij} للمتغير الأساسي X_{ij} في دالة الهدف ضمن المدى المسموح به فإن هذا التغير لـــن يغيـــر الحل الأمثل و لا قيم المتغيرات و لكن ستتغير قيمة دالة الهدف. و لمعرفة هذا المـــدى لمعـــاملات المتغيـــرات

الأساسية في دالة الهدف لمسألة النقل في حالة تخفيض التكاليف (Min) فيمكن استخدام طريقة الحجر المتدحرج أو طريقة التوزيع المعدلة.

أ. باستخدام طريقة الحجر المتدحرج:

لمعرفة المدى الذي يتغير فيه معامل المتغير الأساسي X_{11} ، مسألة 6-1، يمكن لنا النظر في الجدول الأخير (النهائي) في قيم $\bar{U}$ للخلايا الفارغة و حلقاتها المغلقة و التي تتضمن الخلية $CELL_{11}$ عندما تكون الخلية تحمل إشارة موجب أو تحمل إشارة سالب. قيم $\bar{U}$ التالية (جدول 6-17) تتضمن الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ موجبة و هي: $\bar{U}_{22} =+50, \bar{U}_{23} =+40, \bar{U}_{24} =+40$. حيث أن أصغر قيمة موجودة في $\bar{U}_{23}$ و $\bar{U}_{24} =+40$ فإن النقصان المسموح به يساوي 40 ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11} . و بالمثل يمكن إيجاد الزيادة المسموح بها و هي في قيم $\bar{U}$ (جدول 6-17) و التي تتضمن الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ سالبة و هي: $\bar{U}_{31} =+20$ و حيث أن أصغر قيمة و هي القيمة الوحيدة في حالتنا هذه موجودة في $\bar{U}_{31} =+20$ فإن الزيادةالمسموح بها تساوي 20 ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11} .

ب. باستخدام طريقة التوزيع المعدلة:

بنفس الطريقة السابقة يمكن استخدام k_{ij} للخلايا الفارغة و حلقاتها المغلقة و التي تتضمن الخلية $CELL_{11}$ عندما تكون الخلية تحمل إشارة موجب أو تحمل إشارة سالب. في (جدول 6-24) و هو الجدول الأخير)، قيم k_{ij} التالية تتضمن الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ موجبة و هي: $k_{22} =+50, k_{23} =+40, k_{24} =+40$. حيث أن أصغر قيمة موجودة في k_{23} و $k_{24} =+40$ فإن النقصان المسموح به يساوي 40 ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11} . و بالمثل يمكن إيجاد الزيادة المسموح بها و هي في قيم k_{ij} (جدول 6-24) و التي تتضمن الحلقات المغلقة عندما تكون الخلية $CELL_{11}$ سالبة و هي: $k_{31} =+20$ و حيث أن أصغر قيمة و هي القيمة الوحيدة في حالتنا هذه موجودة في $k_{31} =+20$ فإن الزيادةالمسموح بها تساوي 20 ريالاً للطن الواحد لمعامل المتغير الأساسي X_{11} .
كما يمكن استخدام الأسلوب الرياضي التالي فلو فرضنا أننا أضفنا القيمة Δ إلى تكلفة الكمية المنقولة في الخلية $CELL_{11}$ و بالتالي أصبحت $c_{11}=110+\Delta$ فيمكن إيجاد قيم u_i و v_j للجدول 24-5 و بمعلومية تكلفة النقل c_{ij} و أن $(u_i=0)$ كالتالي:

$$u_1 + v_1 = 110 + \Delta \quad ========\Rightarrow \quad v_1 = 110 + \Delta$$

$$u_1 + v_2 = 110 \quad ========\Rightarrow \quad v_2 = 110$$

$$u_1 + v_3 = 150 \quad ========\Rightarrow \quad v_3 = 150$$

$$u_2 + v_1 = 70 \quad ========\Rightarrow \quad u_2 = -40 - \Delta$$

$$u_3 + v_3 = 140 \quad ========\Rightarrow \quad u_3 = -10$$

$$u_3 + v_4 = 160 \quad ========\Rightarrow \quad v_4 = 170$$

$k_{14} = 180 - 0 - 170 = 10$
$k_{22} = 120 - (-40 - \Delta) - 110 = 50 + \Delta \geq 0 \quad ==\Rightarrow \Delta \leq 50$
$k_{23} = 150 - (-40 - \Delta) - 150 = 40 + \Delta \geq 0 \quad ==\Rightarrow \Delta \leq 40$
$k_{24} = 170 - (-40 - \Delta) - 170 = 40 + \Delta \geq 0 \quad ==\Rightarrow \Delta \leq 40$
$k_{31} = 120 - (-10) - (110 + \Delta) = 20 - \Delta \leq 0 ==\Rightarrow \Delta \geq 20$
$k_{32} = 140 - (-10) - 110 = 40$

وهذا يعني أن $40 \leq \Delta \leq 20$ أو أن الزيادة المسموح بها تساوي 40 و النقصان المسموح به يساوي 20.

ثانياً: أثر التغير في قيم الجانب الأيمن:

عند استخدامنا لجداول النقل فإن جميع القيود في مسألة النقل تكون قيوداً نشطةً و ذلك لأننا سنواجه بثلاث حالات:

الحالة الأولى: الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة و بالتالي فإن مجموع الكمية المنقولة من العارض تساوي الكمية المعروضة (الجانب الأيمن) و كذلك مجموع الكمية المنقولة للطالب تساوي الكمية المطلوبة (الجانب الأيمن). و في هذه الحالة فإن الجانب الأيسر يساوي الجانب الأيمن لجميع القيود و إذا كان لدينا حل أمثل فإن جميع القيود تكون قيوداً نشطةً كما في القاعدة 3–2.

الحالة الثانية و الثالثة: الكمية المعروضة أكبر (أصغر) من الكمية المطلوبة و عندئذٍ لابد من إضافة عمود (صف) وهمي تكون فيه الكمية المطلوبة (المعروضة) تساوي القيمة المطلقة للفرق بين الكمية المعروضة و الكمية المطلوبة و بالتالي فإن مجموع الكمية المنقولة من العارض تساوي الكمية المعروضة و كذلك مجموع الكمية المنقولة للطالب تساوي الكمية المطلوبة. و في هاتين الحالتين فإن الجانب الأيسر يساوي الجانب الأيمن لجميع القيود و إذا كان لدينا حل أمثل فإن جميع القيود تكون قيوداً نشطةً كما في القاعدة 3–2.

و لهذا السبب فإن الحديث عن التغير في قيم الجانب الأيمن لن يفرّق بين القيود من حيث نشاطها. **لاحظ** أن هذا الأمر لا ينطبق عند الصياغة الرياضية باستخدام البرمجة الخطية إلا في حالة تساوي الكمية المعروضة و الكمية المطلوبة.

إذا تغيرت الكمية المطلوبة و الكمية المعروضة بالكمية Δ فسيكون لدينا حالتان:

1. إذا كان المتغير X_{ij} (في الصف i الكمية المعروضة المُزادة و العمود j الكمية المطلوبة المُـزادة) متغيـراً أساسياً فيجب زيادة الكمية X_{ij} بقيمة Δ و بالتالي فإن الحل الأمثل لن يتغير و لكن ستتغير قيم المتغيرات (الأثر فقط على المتغير X_{ij}) و ستتغير قيمة دالة الهدف و تصبح:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (C_{ij} \times \Delta X_{ij})$$

يمكن استخدام المسألة 6-1 (الجدول 6-17) فلو زادت الكمية المعروضة من حرض (1) و الكمية المطلوبة من الدمام (2) بقيمة 10 أطنان فإن الحل الأمثل لن يتغير و لكن ستتغير قيمة X_{12} و تصبح 40 و كذلك تتغير قيمة دالة الهدف و تصبح 15300 ريالاً وذلك لأن المتغير X_{12} متغيرُ أساسي و الأثر سيظهر كما في جدول 6-42.

$$\text{New Z-value} = 14200 + (110 \times 10) = 15300$$

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 / 5	110 / 40	150 / 5	180	50
الخرج(2)	70 / 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120	140	140 / 25	160 / 25	50
المطلوب	35	40	30	25	130

الجدول (6-42)

ويمكن أيضاً إيجاد قيمة دالة الهدف باستخدام مخرجات طريقة التوزيع المعدلة u_i و v_j حيث أنهما يمـثلان السعر الثنائي أو سعر الظل بعد عكس الإشارة و على ذلك و كما ذكرنا في قاعدة 6-5 فيمكن كتابة دالة الهدف الجديدة كالتالي:

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + \Delta S.u_i + \Delta D.v_j$$
$$\text{New Z-value} = 14200 + 0(10) + 110(10) = 15300$$

2. إذا كان المتغير X_{ij} (في الصف i الكمية المعروضة المُزادة و العمود j الكمية المطلوبة المُـزادة) متغيـراً غير أساسي فيجب إيجاد الحلقة المغلقة التي تتضمن هذا المتغير. في هذه الحالة الخلايا ذات الإشارة (سـالب) يتم زيادتها بالكمية Δ و الخلايا ذات الإشارة (موجب) فيتم إنقاصها بالكمية Δ أما الخلية $CELL_{ij}$ و التي تمثل تقاطع صف الكمية المعروضة المُزادة و عمود الكمية المطلوبة المُزادة فتبقى كما هي. كمثال على ذلك يمكـن استخدام المسألة 6-1 (الجدول 6-17) لإيضاح ما سيحدث فلو زادت الكمية المعروضة مـن حـرض (1) و الكمية المطلوبة من أبها (4) بقيمة 10 أطنان فإن الحل الأمثل لن يتغير و لكن ستتغير قيمة X_{13} و تصبح 15 و قيمة X_{34} و تصبح 35 و ذلك بإضافة قيمة 10 أطنان لكلٍ منهما و تتغير قيمـة X_{33} و تصـبح 15 و ذلـك

بطرح 10 أطنان منها و لن تتغير قيمة X_{14} و تبقى غير أساسية و كذلك تتغير قيمة دالـــة الهـدف و تصـــبح 15900 ريالاً و الأثر سيظهر كما في جدول 6-43.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150 15	180	50
الخرج(2)	70 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120	140	140 15	160 35	50
المطلوب	35	30	30	35	130

الجدول (6-43)

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + (C_{ij} \times \Delta X_{ij})$$
$$\text{New Z} = 14200 + 150(10) + 160(10) - 140(10) = 15900$$

أو،

$$\text{New Z-value} = \text{Old Z-value} + \Delta S.u_i + \Delta D.v_j$$
$$\text{New Z-value} = 14200 + 10(0) + 10(170) = 15900$$

لكن يجب ملاحظة أنه إذا كانت الكمية Δ أكبر من أصغر كمية موجودة في الخلايا ذات الإشارة (موجــب) فــإن الحل يتحول إلى حل غير ممكن إذا بدأنا الحل في هذه المرحلة (جدول 6-17) مما يعني أننا يجب أن نبدأ الحل من البداية. سنأخذ المسألة 6-1 (الجدول 6-17) لإيضاح ما سيحدث فلو زادت الكمية المعروضة من حرض (1) و الكمية المطلوبة من أبها (4) بقيمة 30 طناً الخلية CELL33 ستأخذ إشارة موجب و بالتالي لا بد مــن إنقاص الكمية في هذه الخلية بالكمية 30 فتتحول قيمة X_{33} و تصبح سالب5 و هذا غير مقبول حيث لا يمكــن نقل كمية سالبة لكن لإيجاد الحل لهذه المسألة في هذه الحالة فنبدأ من البداية باستخدام أي طريقة لإيجاد الحــل الأولي ثم نستمر إلى أن نصل إلى الحل الأمثل و هنا سيكون الحل النهائي الأمثل كما في جدول 6-44.

	الرياض(1)	الدمام(2)	جدة(3)	أبها(4)	المعروض
حرض(1)	110 5	110 30	150 30	180 5	70
الخرج(2)	70 30	120	150	170	30
بريدة(3)	120	140	140	160 50	50
المطلوب	35	30	30	55	150

الجدول (5-44)

ت.ك. = 19350 ريالاً

تمارين:

<u>السؤال الأول:</u> أوجد الحل الأمثل إن وُجد لمسألة النقل التالية بمعلومية أنها في حالة MIN، مع الشرح و إيجاد التكلفة الكلية.

From \ To	1	2	3	Supply
A	5	4	2	70
B	6	3	2	50
C	1	5	1	10
Demand	50	50	30	130

<u>السؤال الثاني:</u> أوجد الحل الأمثل إن أمكن لمسألة النقل التالية مع الشرح و إيجاد التكلفة الكلية لكل جدول (مع العلم أنها في حالة Min).

Fr \ To	1	2	3	4	Supply
1	10	20	22	20	300
2	15	18	16	24	300
3	18	22	20	25	600
Demand	400	300	200	200	

<u>السؤال الثالث:</u> أوجد الجدول الأول و الثاني إن أمكن مع إيجاد التكلفة الكلية و أسباب الانتقال أو عدم الانتقال من جدول إلى آخر لمسألة النقل التالية بمعلومية أنها في حالة MIN.

Fr \ To	1	2	3	Supply
1	10	30	20	40
2	20	15	30	20
3	20	10	20	10
Demand	25	15	30	

<u>السؤال الرابع:</u> أوجد الحل الأمثل إن أمكن لمسألة النقل في السؤال الثالث مع الشرح و إيجاد العائد الكلي لكل جدول في حالة Max.

__تمرين و حله:__

أوجد الحل الأمثل إن أمكن لمسألة النقل التالية مع الشرح و إيجاد التكلفة الكلية لكل جدول (مع العلم أنها في حالة Min).

Fr To	1	2	3	4	Supply
1	10	20	22	20	600
2	15	18	16	24	400
3	18	22	20	25	200
Demand	400	300	200	200	

__الحل:__

حيث أن الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة فلابد من إضافة عمود وهمي (Dummy) و سنرمز له بالرمز D و تكون الكمية المطلوبة لهذا العمود تساوي القيمة المطلقة للفرق بين الكمية المعروضة و الكمية المطلوبة و تكاليف النقل لخلايا هذا العمود تساوي صفراً.

سنبدأ الجدول الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي كما يلي:

F T	1	2	3	4	D	Sup
1	10 400	20 200	22	20	0	600
2	15	18 100	16 200	24 100	0	400
3	18	22	20	25 100	0 100	200
Dem	400	300	200	200	100	1200

TC = 17900

$\bar{U}_{13} = 4, \bar{U}_{14} = -6, \bar{U}_{1D} = -1, \bar{U}_{22} = 7, \bar{U}_{2D} = 1, \bar{U}_{31} = 9, \bar{U}_{32} = 3, \bar{U}_{33} = 3$

حيث أن لدينا قيمة سالبة $\bar{U}_{14} = -6$ فإننا لم نصل للحل الأمثل و لابد من عمل جدول ثان و ننفذ في الخلية 14.

F T	1	2	3	4	D	Sup
1	10 400	20 100	22	20 100	0	600
2	15	18 200	16 200	24	0	400
3	18	22	20	25	0	200

				100	100	
Dem	**400**	**300**	**200**	**200**	**100**	**1200**

TC = 17300

$\bar{U}_{13} = 4$, $\bar{U}_{1D} = 5$, $\bar{U}_{22} = 7$, $\bar{U}_{24} = 6$, $\bar{U}_{2D} = 7$, $\bar{U}_{31} = 3$, $\bar{U}_{32} = -3$, $\bar{U}_{33} = -3$

حيث $\bar{U}_{32} = -3$ و $\bar{U}_{33} = -3$ فإننا لم نصل للحل الأمثل و لابد من عمل جدول ثالث و ننفذ في 32 أو33.

لنختار الخلية 32.

F T	1	2	3	4	D	Sup
1	10 400	20	22	20 200	0	**600**
2	15	18 200	16 200	24	0	**400**
3	18	22 100	20	25 0	0 100	**200**
Dem	**400**	**300**	**200**	**200**	**100**	**1200**

TC = 17000

$\bar{U}_{12} = 1$, $\bar{U}_{13} = 7$, $\bar{U}_{1D} = 5$, $\bar{U}_{21} = 4$, $\bar{U}_{24} = 3$, $\bar{U}_{2D} = 4$, $\bar{U}_{31} = 3$, $\bar{U}_{33} = 0$

حيث أن جميع قيم $\bar{U}$ موجبة إلا واحدة تساوي الصفر فقد وصلنا إلى الحل الأمثل و هو حل متعدد (Multiple Optimal Solution). لاحظ كذلك أننا كنا في حالة تحلل مما استدعى إضافة صفر في واحدة من الخلايا الفارغة حتى نتمكن من حل المسألة.