**نماذج البرمجة الخطية: الأسلوب البياني**

**أهداف التعلم:** في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. فهم الافتراضات والخواص الأساسية للبرمجة الخطية.
2. حل أي مشكلة بيانياً فيها متغيرين فقط
3. فهم القضايا الخاصة في البرمجة الخطية مثل عدم الإمكانية
4. فهم دور تحليل الحساسية
5. استخدام اكسل

**مواضيع الفصل**

1. متطلبات مسائل البرمجة الخطية
2. كيفية تشكيل مسائل البرمجة الخطية
3. الحل البياني
4. حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام اكسل

**مقدمة**

كثير من القرارات الإدارية تتعلق بكيفية الحصول على أكبر فائدة ممكنة من استخدام موارد المنظمة. البرمجة الخطية هي تقنية تستخدم النمذجة الرياضية لمساعدة المدراء في التخطيط وصنع القرار المتعلقان بتوزيع الموارد.

والجدير بالذكر أن كلمة البرمجة الواردة في تعبير "البرمجة الخطية" لا تشير إلى برمجة الكومبيوتر. وإنما المقصود إيجاد النموذج وحل المسألة رياضياً. وبنفس الوقت هذا لا يعني أنه لا يمكن حل مسائل البرمجة الخطية عن طريق برامج الكومبيوتر.

**أولاً: متطلبات مسائل البرمجة الخطية**

**الخاصية الأولى:** وجود تابع هدف واحد. معظم المسائل تسعى نحو تعظيم أو تخفيض كمية ما مثل الربح أو التكلفة وهذا التعظيم أو التخفيض ندعوه تابع الهدف في مسألة البرمجة الخطية.

**الخاصية الثانية:** وجود قيد أو أكثر من القيود التي تترافق مع هدف المسألة. فمثلاً هناك قيود تحد من الانتاج منها القوى العاملة والآلات.

**الخاصية الثالثة:** مناهج بديلة للعمل، إذا كان هناك أكثر من منتج وليكن 3 منتجات، فقد تستخدم الإدارة البرمجة الخطية لكي تقرر كيفية توزيع الموارد المحدودة على المنتجات المختلفة.

**الخاصية الرابعة:** الخاصة الخطية، يجب التعبير عن الأهداف والقيود في مسائل البرمجة الخطية ضمن المعادلات والمتراجحات الخطية من الدرجة الأولى وليس من الدرجة الثانية أو الثالثة. مثلاً المعادلة: 2A + 5B = 10 هي معادلة خطية، بينما المعادلة ليست خطية لأن A مربعة و B مكعبة.

يشير تعبير "خطي" إلى الصفة النسبية و والصفة الجمعية. النسبية تعني إذا كانت وحدة واحدة من الانتاج تحتاج 3 ساعات عمل فإن إنتاج 10 وحدات يحتاج 30 ساعة. يمكن شرح الجمعية من خلال المثال التالي. فمثلاً إذا كان إنتاج وحدة واحدة يعطي ربح قدره 3 ريالات و إنتاج وحدة واحدة أخرى يعطي ربح قدره 8 ريالات يكون لدينا الربح الكلي هو مجموع الربحين أي 11 ريالاً.

**الخاصية الخامسة:** شروط التأكد، تعني أننا متأكدين أن الأهداف والقيود معروفة ولا تتغير خلال فترة الانتاج.

**الخاصية السادسة:** القسمة، إذا كنا ننتج كراسي مثلاً وأنتجنا 4.5 كرسياً خلال أسبوع هذا يعني أننا أنتجنا أربعة كراسي و الكرسي الرابع قيد الانتاج وقد انهينا 50% من صنعه والباقي سيتم صنعه في الفترة الانتاجية اللاحقة أي الأسبوع القادم.

**الخاصية السابعة:** عدم السلبية، جميع الأجوبة غير سلبية فمثلاً لا يمكن أن ننتج عدداً سالباً من الكراسي.

**ثانياً: كيفية تشكيل مسائل البرمجة الخطية**

يتم ذلك من خلال إنشاء نموذج رياضي لتمثيل المشكلة الإدارية. وتشكل المسألة باتباع الخطوات التالية:

1. الفهم الكامل للمشكلة الإدارية.
2. تحديد الأهداف والقيود
3. تحديد متغيرات القرار (مثلاً: كمية المنتج الأول، كمية المنتج الثاني .....)
4. استخدام متغيرات القرار لكتابة العبارات الرياضية المتعلقة بتابع الهدف و القيود.

**شركة أثاث**

تنتج هذه الشركة منتجات غالية الثمن، من هذه المنتجات لديها طاولات وكراسي. هناك تشابه بين المنتجين من حيث عدد ساعات العمل: النجارة المطلوبة وكذلك عدد ساعات عمل الطلاء. كل طاولة تحتاج 4 ساعات نجارة و ساعتين طلاء. كل كرسي يحتاج 3 ساعات نجارة و ساعة واحدة طلاء. خلال فترة الانتاج الحالية، هناك إمكانية لتوفير 240 ساعة نجارة و 100 ساعة طلاء. كل طاولة تباع تأني بربح قدره 70 ريال؛ كل كرسي يباع يأني بربح قدره 50 ريال.

تريد الشركة أن تتخذ قرار تحدد فيه عدد الطاولات وعدد الكراسي التي يجب إنتاجها بحيث تحصل على أفضل ربح ضمن الإمكانيات (الموارد) المتاحة. ترغب الشركة في حل هذه المشكلة باتباع أسلوب البرمجة الخطية.

نبدأ بتلخيص المعلومات اللازمة وحل هذه المشكلة. الجدول التالي يلخص المعلومات اللازمة:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة | | | |
| **القسم** | طاولات  ط | كراسي  ك | الساعات المتاحة في هذا الأسبوع |
| **النجارة** | 4 | 3 | 240 |
| **الطلاء** | 2 | 1 | 100 |
| **الربح للوحدة** | 70 | 50 |  |

الخطوة التالية: نحدد الهدف والقيود. الهدف هو: تعظيم الربح. القيود هي:

1. **لا يمكن توفير أكثر من 240 ساعة نجارة.**
2. **لا يمكن توفير أكثر من 100 ساعة طلاء.**

نحدد متغيرات القرار كما يلي:

ط = عدد الطاولات التي يجب إنتاجها في الأسبوع

ك = عدد الكراسي التي يجب إنتاجها في الأسبوع

الآن نستطيع إيجاد تابع الهدف ضمن شروط عدد الطاولات وعدد الكراسي. نشكل تابع الهدف كما يلي: **تعظيم الربح = 70 ط + 50 ك**

الخطوة التالية: إنشاء علاقة رياضية تصف القيدين في هذه المسألة. إن الوقت المستخدم في قسم النجارة هو:

(4 ساعات لكل طاولة)x(عدد الطاولات المنتجة)+(3 ساعات لكل كرسي)x(عدد الكراسي المنتجة)

(4)x(ط)+(3)x(ك)

نشكل القيد الأول كما يلي:

الوقت المستخدم في النجارة  الوقت المتاح للنجارة

4 ط + 3 ك  240 ساعة

نشكل القيد الثاني كما يلي:

الوقت المستخدم في الطلاء  الوقت المتاح للطلاء

2 ط + 1 ك  100 ساعة

كلا القيدان يمثلان الحد الأعلى لطاقة الانتاج و تأثير ذلك على الربح. فمثلاً، لا تستطيع الشركة انتاج 80 طاولة خلال فترة الانتاج لأن ذلك سيتعدى كلا القيدين. وكذلك الأمر لا تستطيع الشركة انتاج 50 طاولة و 10 كراسي خلال فترة الانتاج لأن ذلك سيتعدى القيد الثاني.

لا يمكن أن يكون عدد الطاولات أو عدد الكراسي سالباً أي ط  0 و ك  0. وهذه تسمى قيود عدم السلبية. **يمكننا الآن التعبير عن المسألة رياضياً كما يلي:**

**تعظيم الربح = 70 ط + 50 ك**

وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

4 ط + 3 ك  240 ساعة (قيد النجارة)

2 ط + 1 ك  100 ساعة (قيد الطلاء)

ط  0 و ك  0

**ثالثاً: الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية**

**التمثيل البياني للقيود**

لتمثيل القيد الأول 4 ط + 3 ك  240 ساعة، يجب أولاً رسم المعادلة 4 ط + 3 ك = 240، وذلك بتعيين نقطتين، الأولى تقاطع خط المعادلة مع محور ط والثانية تقاطع خط المعادلة مع محور ك. يتقاطع خط المعادلة مع محور ط عندما يكون عدد الكراسي ك = 0 أي عندما 4ط = 240 أي عندما يكون عدد الطاولات ط=60. يتقاطع خط المعادلة مع محور ك عندما يكون عدد الطاولات ط= 0 أي عندما 3ك = 240 أي عندما يكون عدد الكراسي ك=80.

الشكل 1

يمثل المحور الأفقي عدد الطاولات ويمثل المحور العمودي عدد الكراسي. يمثل الخط الأزرق الحد الأعلى لمتراجحة النجارة. يمكن تنجير 80 كرسي و 0 طاولة أو 60 طاولة 0 كرسي أو أي نقطة على الخط الأزرق الذي معادلته 4ط + 3ك = 240. أي نقطة أسفل الخط وداخل المحورين يمثلها الجزء الآخر من المتراجحة 4ط + 3ك < 240. أي نقطة أعلى من الخط لا تمثلها المتراجحة. مثلاً: 4(30)+3(20)=180، 180<240 هذا يعني أن انتاج 30 طاولة و 20 كرسي لا يتجاوز قيد ساعات النجارة. 4(70)+3(40)=400، 400>240 هذا يعني أن انتاج 70 طاولة و 40 كرسي يتجاوز قيد ساعات النجارة، أي لا تكفي ساعات النجارة لإنتاج 70 طاولة و 40 كرسي.

لتمثيل القيد الثاني 2 ط + 1 ك  100 ساعة، يجب أولاً رسم المعادلة 2 ط + 1 ك = 100، وذلك بتعيين نقطتين، الأولى تقاطع خط المعادلة مع محور ط والثانية تقاطع خط المعادلة مع محور ك. يتقاطع خط المعادلة مع محور ط عندما يكون عدد الكراسي ك = 0 أي عندما 2ط = 100 أي عندما يكون عدد الطاولات ط=50. يتقاطع خط المعادلة مع محور ك عندما يكون عدد الطاولات ط= 0 أي عندما 1ك = 100 أي عندما يكون عدد الكراسي ك=100.

الشكل 2

يمثل الخط الأزرق الحد الأعلى لمتراجحة الطلاء. يمكن طلاء 100 كرسي و 0 طاولة أو 50 طاولة 0 كرسي أو أي نقطة على الخط الأزرق الذي معادلته 2ط + 1ك = 100. أي نقطة أسفل الخط وداخل المحورين يمثلها الجزء الآخر من المتراجحة 2ط + 1ك < 100. أي نقطة أعلى من الخط لا تمثلها المتراجحة. مثلاً: 2(30)+1(20)= 80، 80<100 هذا يعني أن طلاء 30 طاولة و 20 كرسي لا يتجاوز قيد ساعات الطلاء. 2(70)+1(40)=180، 180>100 هذا يعني أن انتاج 70 طاولة و 40 كرسي يتجاوز قيد ساعات الطلاء، أي لا تكفي ساعات الطلاء في الأسبوع الواحد لطلاء 70 طاولة و 40 كرسي.

الشكل 3

في الشكل رقم 3 يمثل الخط الأزرق الحد الأعلى لمتراجحة (قيد) النجارة بينما يمثل الخط الأخضر الحد الأعلى لمتراجحة (قيد) الطلاء. تسمى المنطقة التي هي أدنى الخطين المنطقة الممكنة. المنطقة الممكنة هي المنطقة التي تتوافق مع قيود المسألة (مسألة البرمجة الخطية)، فهي المنطقة التي تشترك فيها جميع قيود المسألة.

من الممكن إنتاج (نجارة وطلاء) 30 طاولة و 20 كرسي خلال أسبوع (فترة الانتاج في مسألتنا أسبوع) لأن هاتان الكميتان لا تتعديان قيدي المسألة لأن:

4 ط + 3 ك  240 ساعة

4 (30) + 3 (20) = 180 ساعة  240 ساعة

2 ط + 1 ك  100 ساعة

2 (30) + 1 (20) = 80  100 ساعة

لا يمكن إنتاج (نجارة وطلاء) 70 طاولة و 40 كرسي خلال أسبوع لأن هاتان الكميتان تتعديان قيدي المسألة (النجارة و الطلاء) لأن:

4 ط + 3 ك  240 ساعة

4 (70) + 3 (40) = 400 ساعة  240 ساعة

2 ط + 1 ك  100 ساعة

2 (70) + 1 (40) = 180  100 ساعة

لا يمكن إنتاج (نجارة وطلاء) 50 طاولة و 5 كراسي خلال أسبوع لأن هاتان الكميتان تتعديان **قيد الطلاء** لأن:

4 ط + 3 ك  240 ساعة

4 (50) + 3 (5) = 215 ساعة  240 ساعة

2 ط + 1 ك  100 ساعة

2 (50) + 1 (5) = 105  100 ساعة

**أسلوب الحل**

بعد أن رسمنا بيانياً المنطقة الممكنة سنتوجه إلى إيجاد الحل الأمثل للمسألة. الحل الأمثل هو تلك النقطة التي تقع ضمن المنطقة الممكنة والتي تشير إلى الربح الأعلى. لكن هناك كثير من النقاط تقع ضمن المنطقة الممكنة فكيف لنا معرفة تلك النقطة التي تعطينا أعلى ربح؟

هناك طرق مختلفة لإيجاد الحل الأمثل، أسرع طريقة تدعى خطوط الانتاج المتساوية الربح.

نبدأ التقنية بأن نجعل الأرباح تساوي قدراً ضئيلاً من المال. يمكن أن نختار أرباح ضئيلة لشركة الأثاث قدرها 2100 ريال. هذا المقدار من الربح لا يتعدى قيدي المسألة. يمكن كتابة تابع الهدف كما يلي: **70ط + 50ك = 2100 ريال.**

تمثل معادلة الهدف خط ندعوه الخط الذي تتساوى فيه الأرباح، إنه يمثل كل الثنائيات الممكنة من ط و ك التي تتحقق معها النتيجة 2100. لرسم المستقيم على محوري الإحداثيات، نفرض أن ط=0 فينتج أن 50ك=2100 هذا يعني أن ك=42 ثم نفرض أن ك=0 فينتج أن 70ط=2100 هذا يعني أن ط=30.

**الشكل 4**

نصل بين النقطتين (ط=0، ك=42) و (ط=30، ك=0) فنحصل على الخط الأخضر في الشكل 4. كل النقاط الموجودة على الخط الأخضر تمثل حلولاً ممكنة لمعادلة الهدف التي تعطي 2100 ريال.

إذا نظرنا إلى الشكل ندرك أن 2100 ريال ليست الربح الأعظم للشركة.

يمكن أن نختار أرباح أعلى لشركة الأثاث قدرها 2800 ريال. هذا المقدار من الربح لا يتعدى قيدي المسألة. يمكن كتابة تابع الهدف كما يلي: **70ط + 50ك = 2800**.

تمثل معادلة الهدف خط ندعوه خط تتساوى فيه الأرباح وهو يمثل كل الثنائيات الممكنة من ط و ك التي تتحقق معها أرباح قدرها 2800 ريال. لرسم المستقيم على محوري الإحداثيات، نفرض أن ط=0 فينتج أن 50ك=2800 هذا يعني أن ك=56 ثم نفرض أن ك=0 فينتج أن 70ط=2800 هذا يعني أن ط=40.

**الشكل 5**

نصل بين النقطتين (ط=0، ك=56) و (ط=40، ك=0) فنحصل على الخط الأزرق الغامق في الشكل 5. كل النقاط الموجودة على الخط الأزرق الغامق تمثل حلولاً ممكنة لمعادلة الهدف التي تعطي 2800 ريال.

إذا نظرنا إلى الشكل ندرك أن 2800 ريال ليست الربح الأعظم للشركة.

يمكن أن نختار أرباح أعلى لشركة الأثاث قدرها 3500 ريال. هذا المقدار من الربح لا يتعدى قيدي المسألة. يمكن كتابة تابع الهدف كما يلي: **70ط + 50ك = 3500**.

تمثل معادلة الهدف خط ندعوه خط تتساوى فيه الأرباح وهو يمثل كل الثنائيات الممكنة من ط و ك التي تتحقق معها أرباح قدرها 3500 ريال. لرسم المستقيم على محوري الإحداثيات، نفرض أن ط=0 فينتج أن 50ك=3500 هذا يعني أن ك=70 ثم نفرض أن ك=0 فينتج أن 70ط=3500 هذا يعني أن ط=50.

**الشكل 6**

نصل بين النقطتين (ط=0، ك=70) و (ط=50، ك=0) فنحصل على الخط الأزرق الفاتح في الشكل 6. كل النقاط الموجودة على الخط الأزرق الفاتح تمثل حلولاً ممكنة لمعادلة الهدف التي تعطي أرباح قدرها 3500 ريال.

إذا نظرنا إلى الشكل ندرك أن 3500 ريال ليست الربح الأعظم للشركة. كلما ابتعدنا عن المبدأ أكثر بمستقيمات موازية كلما زاد الربح أكثر.

نأخذ أعلى مستقيم بالنسبة للمبدأ لايزال يلمس نقطة من المنطقة الممكنة هذه النقطة هي تقاطع مستقيمي القيدين. هذه النقطة توافق (ط=30، ك=40). نحصل على هذه النقطة بحل معادلتي القيدين:

4 ط + 3 ك = 240 ساعة (معادلة القيد الأول: النجارة)

2 ط + 1 ك = 100 ساعة (معادلة القيد الثاني: الطلاء)

من المعادلة الأولى نستخرج قيمة ط:  نعوضها في المعادلة الثانية:

2 (60 - 0.75ك) + ك = 100

120 – 0.5 ك = 100

0.5 ك = 20

**ك = 40** نعوض قيمة ك في المعادلة الثانية: 2ط + 40 = 100 نستنتج أن **ط = 30**

نعوض هذه النقطة في معادلة الهدف:

**الربح = 70ط + 50 ك** = 70(30) + 50(40) = 2100 + 2000 = 4100 ريالاً

إذاً إنتاج 30 طاولة و 40 كرسياً يعطي ربحاً قدره 4100 ريالاً.

**طريقة نقاط الزوايا**

تعتمد هذه الطريقة على النظر إلى رسم المنطقة الممكنة بعد رسم القيدين وإذا نظرنا إلى المنطقة الممكنة في الرسم التالي نجد أربع زوايا لكل زاوية نقطة.

**الشكل 7**

نقطة المبدأ (ط=0، ك=0)، نقطة أخرى واقعة على محور الطاولات (ط=50، ك=0)،

نقطة أخرى واقعة على محور الكراسي (ط=0، ك=80)، النقطة الرابعة وهي تقاطع القيدين (ط=30، ك=40). الجدول التالي يتضمن الحالات الأربع والربح في كل حالة بعد التعويض في معادلة الهدف.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| عدد الطاولات | عدد الكراسي | الربح (ريال) |
| 0 | 0 | 0 |
| 50 | 0 | 3500 |
| 0 | 80 | 4000 |
| 30 | 40 | 4100 |

إذا كانت المسألة تحوي على أكثر من متغيرين يفضل الاعتماد على برامج الكومبيوتر.

**الموارد غير المستخدمة و الفائض**

إضافةً إلى معرفة الحل الأمثل، من المفيد أن نعرف أين استخدمت الموارد وماهي الموارد غير المستخدمة وما هو الفائض.

الموارد غير المستخدمة = الموارد المتاحة – الموارد المستخدمة

في الحل الأمثل (ط=30، ك=40) لا يوجد موارد غير مستخدمة، لأن:

الموارد غير المستخدمة = الموارد المتاحة: 240 – الموارد المستخدمة: 240= 0

في مثال شركة الأثاث يوجد 240 ساعة نجارة متاحة. فإذا قررت الشركة إنتاج 25 كرسياً، سيكون لدينا (4ط + 3ك = 4(20) + 3(25) = 155)

الموارد غير المستخدمة = الموارد المتاحة:240 – الموارد المستخدمة: 155 = 85

**الموارد غير المستخدمة تتعلق في القيد الذي يحد من الأعلى (يساوي أو أقل،**

**مثال:** 4 ط + 3 ك  240 ساعة**)**

**الفائض**

لنفرض أن هناك قيد ينص على أنه يجب أن يكون عدد الطاولات والكراسي معاً 42 على الأقل. ولنفرض أن الشركة أنتجت 45 فيكون الفائض كما يلي:

الفائض = 45 – 42 = 3

**الفائض يتعلق في القيد الذي يحد من الأدنى (يساوي أو أكبر،**

**مثال:** 4 ط + 3 ك  240 ساعة**)**

**المقارنة بين طريقة مستقيمات الربح وطريقة نقاط الزوايا**

|  |  |
| --- | --- |
| **طريقة مستقيمات الربح** | **طريقة نقاط الزوايا** |
| 1. نرسم القيود وأوجد المنطقة الممكنة | 1. نرسم القيود وأوجد المنطقة الممكنة |
| 1. نختار أحد خطوط الربح (أو التكلفة) وارسمه لإيجاد ميله. | 2. نوجد نقاط الزوايا في المنطقة الممكنة |
| 1. نحرك خط تابع الهدف باتجاه رفع الربح (أو خفض التكلفة) مع المحافظة على ميل المستقيم. آخر نقطة يلمسها المستقيم من المنطقة الممكنة هي نقطة الحل الأمثل. | 3. نحسب الربح (أو التكلفة) لكل نقطة من نقاط زوايا المنطقة الممكنة. |
| 1. نوجد قيم متغيرات (الكراسي والطاولات) القرار عند تلك النقطة الأخيرة لكي نحسب الربح (أو التكلفة). | 4. نختار النقطة التي يأخذ فيها تابع الربح أفضل قيمة في الخطوة 3. تلك النقطة تمثل الحل الأمثل. |