مـثـال (١-٣١)

حل المعادلة التفاضلية:

$$y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0 \qquad (١-٦٩)$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x+2y+1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x+3y+2$$

إذن: $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$، فالمعادلة ليست تامة.

لكن: $y \neq 0$ ،

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{x+y+1}{y(x+y+1)} = -\frac{1}{y} \qquad (y+x-1 \neq 0)$$

فحسب (١-٦٨)، فإن عامل التكميل يساوي:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{Ln|y|} = |y|$$

وسواء كانت $y > 0$ أو $y < 0$ ، يكفي ضرب طرفي المعادلة (١-٦٩) بالمقدار y لتصبح تامة، وبالتالي فإن:

$y^2(x+y+1)dx + xy(x+3y+2)dy = 0$ ، وباستخدام طريقة التجميع، فإن

$$(y^2x dx + x^2y dy) + (y^3 dx + 3y^2x dy) + (y^2 dx + 2xy dy) = 0$$

ومنه:

$$d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) + d(y^3x) + d(y^2x) = 0$$

فحل المعادلة التفاضلية يعرف بشكل ضمني بالعلاقة:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + y^3x + y^2x = \frac{c}{2}$$

أو:

$$x^2y^2 + 2y^3x + 2y^2x = c \quad \text{حيث} \quad c \in IR \qquad (١-٧٠)$$

لاحظ أن $y = 0$ حل للمعادلة التفاضلية (١-٦٩) وللمعادلة (١-٧٠)، عندما $c = 0$.

ومنه القاعدتان التاليتان:

(أ) إذا كانت $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ ، فإن عامل التكميل للمعادلة غير التامة:

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (١-٧١)$$

هو:

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

(ب) أما إذا كانت $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y)$ ، فإن عامل التكميل للمعادلة (١-٧١)

هو:

$$\mu = e^{-\int g(y)dy}$$

مـثـال (١-٣٢)

حل المعادلة التفاضلية:

$$y(x^3 - y)dx - x(x^3 + y)dy = 0$$

الحـــل

لنلجأ لطريقة التجميع. إن المعادلة بعد تغيير ترتيب حدودها بشكل مناسب تكتب

على الشكل:

$$x^3(ydx - xdy) - y(ydx + xdy) = 0$$

وبملاحظة أن:

$$d(xy) = ydx + xdy \; ، \; d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

فإن المعادلة تصبح على الشكل:

$$x^3 d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{d(xy)}{y} = 0 \qquad (١-٧٢)$$

لنتساءل عن إمكانية استبدال المتغيرين x, y بالمتغيرين:

$$u = xy \quad , \quad v = \frac{x}{y}$$

من الملاحظ أن: $x^2 = uv$. بقسمة طرفي المعادلة (١-٧٢) على x وبالاستفادة مـ

المتغيرين الجديدين، نجد:

$$uvdv - \frac{du}{u} = 0 \qquad (y \neq 0, \; x \neq 0)$$

وهذه معادلة منفصلة المتحولات تكتب على الشكل:

$$vdv - \frac{du}{u^2} = 0$$

وبتكامل الطرفين، فإن:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{1}{u}=\frac{1}{2}c \quad \text{أو} \quad \frac{x^2}{2y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}c \qquad (٧٣\text{-}١)$$

ومنه:

$$x^3+2y=cy^2x$$

ومن الملاحظ أن $x = 0$ حل للمعادلة التفاضلية وكذلك $y = 0$ ولا يوجدان في الحل العام (١-٧٣).

مـثـال (١-٣٣)

حل المعادلة التفاضلية:

$$ydx+(x+x^3y^2)dy=0 \qquad (٧٤\text{-}١)$$

الحـل

لنلجأ لطريقة التجميع. تكتب المعادلة بعد تغيير ترتيب الحدود على الشكل:

$$(ydx+xdy)+x^3y^2dy=0 \Leftrightarrow d(xy)+x^3y^2dy=0$$

لنتساءل عن إمكانية إجراء التغيير: $xy = u$. نكتب المعادلة على الشكل:

$x\neq 0,\ y\neq 0\ ,\ d(u)+\frac{u^3}{y^3}y^2dy=0$ (عوضنا عن x بالقيمة $\frac{u}{y}$ حيث $y \neq 0$).

هذه المعادلة منفصلة المتحولات وهي تكتب بالصورة:

$$\frac{du}{u^3}+\frac{dy}{y}=0$$

وبتكامل الطرفين فإن:

$$-\frac{1}{2u^2}+Ln|y|=c \quad \text{أو} \quad -\frac{1}{2x^2y^2}+Ln|y|=c \qquad (٧٥\text{-}١)$$

لاحظ أن $x = 0$ و $y = 0$ حلان للمعادلة (١-٧٤) لا تحتوي عليهما المعادلة (١-٧٥).

من المناسب هنا ذكر نبذة بسيطة عن نظرية الدوال الضمنية من الشكل:

$$F(x, y) = 0 \qquad (٧٦\text{-}١)$$

والتي سنستخدمها عند إيجاد حلول بعض المعادلات التفاضلية.

سنتعرض من خلال هذه النظرية إلى الشروط التي تحققها الدالة F عند نقطة معينة (x_0,y_0) وبجوار هذه النقطة، وذلك لضمان وجود دالة φ قاعدتها من الشكل: $y = \varphi(x)$ معرفة على فترة I، بحيث تحقق y من أجل قيم x المعرفة على هذه الفترة المعادلة:

$$F(x,\varphi(x)) = 0$$

نظريــة (١-٣) (نظرية الدوال الضمنية)

لتكن F دالة حقيقية معرفة بالمعادلة (١-٧٦) على مستطيل مفتوح R مركزه (x_0,y_0)، ولنفترض أن:

١) $\frac{\partial F}{\partial x}$، $\frac{\partial F}{\partial y}$ متصلتان على R.

٢) $F(x_0,y_0)=0$ ، $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

عندئذ، يوجد دالة حقيقية φمعرفة على فترة I مركزها x_0 ومتصلة على هذه الفترة، بحيث تكون:

١) $y_0=\varphi(x_0)$ ٢) $\frac{d\varphi}{dx}$ متصلة على I

ويتحقق من أجل نقاط I:

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

مـثـال (١-٣٤)

برهن أن الدالة الضمنية:

$$F(x,y)=x^2+y^2-1=0 \qquad (٧٧\text{-}١)$$

تعرف لنا دالة φ بجوار النقطة $(0,1)$ تحقق شروط النظرية (١-٣).

البرهـان

إن الدالة F معرفة ومتصلة على أي مستطيل R مفتوح مركزه النقطة $(0,1)$، وكذلك فإن: $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$، $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ متصلتان على R

وأن: $F(0,1)=0$، $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=2\neq 0$

عندئذ، يوجد دالة حقيقية φ معرفة على فترة I مركزها $x_0=0$ من الشكل:

$$\varphi(x)=y=\sqrt{1-x^2}$$

من الممكن اختيار I بالشكل: $I=(-1,1)$. وهناك خيارات أخرى لفترات محتواة في I. من الواضح أن: $\varphi(0)=1$، وأن المشتقة $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ متصلة على I، ويتحقق على I المساواة:

$$F(x,\sqrt{1-x^2})=1-x^2+x^2-1=0$$

يجب أن ننوه هنا أنه ليس من السهل إيجاد صيغ رياضية في كثير من الأمثلة للدالة φ بل يتعذر ويستحيل حل المعادلة (١-٧٦) واستنتاج y بدلالة المتغير x بالرغم من تحقق الشروط الموجودة في النظرية السابقة. ونكتفي عند ذلك بوجود هذه الدالة بشكل نظري وهذا ما يهمنا في هذا المقرر.

تمارين (١-٣)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

١) $(1+3x\sin y)dx-x^2\cos y\,dy=0$

٢) $(x^2+y^2+1)dx+x(x-2y)dy=0$

٣) $(2y^2+3xy-2y+6x)dx+x(x+2y-1)dy=0$

٤) $2y(x+y+2)dx+(y^2-x^2-4x-1)dy=0$

٥) $y(8x-9y)dx+2x(x-3y)dy=0$

) برهن أن الدوال الآتية:

(أ) $u(y)=\frac{1}{y^2}\ ,\ y\neq 0$

(ب) $u(x,y)=\frac{1}{xy}\ ,\ xy\neq 0$

(ج) $u(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\ ,\ x\neq 0, y\neq 0$

(د) $u(x,y)=\frac{1}{(x-y)^2}\ ,\ x\neq y$

هي عوامل تكميل للمعادلة التفاضلية: $ydx-xdy=0$

(١-٩) المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

الشكل العام لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، هو:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x) \qquad (١-٧٨)$$

حيث P, Q دالتان متصلتان على الفترة: $I=(a,b)$

يوجد لأي عدد حقيقي y_0 ولأي عـدد $x_0\in I$ دالة وحيدة f حيث: $y=f(x)$ تكـون حلا للمسألة التفاضلية:

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

وهذا ينتج بشكل مباشرة مـن نظرية الوجـود (١-١)، بعـد كتابة المعادلة (١-٧٨) على الشكل:

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y+Q(x)$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

١) طريقة تغيير الثابت

لنحل المعادلة المتجانسة:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \qquad (١-٧٩)$$

من الواضح أن:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx\ ,\ y\neq 0$$

Scanned by CamScanner

بتكامل الطرفين، فإن:

$$\mathrm{Ln}|y| = -\int p(x)dx + a \Leftrightarrow |y| = e^{a}e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow y = ce^{-\int p(x)dx} \quad \text{حيث} \quad c \in IR \qquad (١-٨٠)$$

(وذلك بملاحظة أن $y = 0$ حل للمعادلة (١-٧٩) وللمعادلة (١-٨٠)، عندما $c = 0$)

لنجعل في المعادلة (١-٨٠) الثابت c مقدارًا متغيرًا ولنستبدله بالمتغير ν، فنجد:

$$y = \nu e^{-\int p(x)dx} \qquad (١-٨١)$$

لنحدد ν بحيث تكون y المحددة في (١-٨١) حلا للمعادلة (١-٧٨)، فنجد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\nu}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,e^{-\int p(x)dx}\nu$$ (بالاستفادة من (١-٨١))

وبالتعويض في المعادلة (١-٧٨)، فإن:

$$\frac{d\nu}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,e^{-\int p(x)dx}\nu + \nu p(x)\,e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

أو:

$$\frac{d\nu}{dx} = Q(x)\,e^{\int p(x)dx}$$

ومنه:

$$\nu = \int Q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx + c \qquad (١-٨٢)$$

بالتعويض عن قيمة ν من (١-٨٢) في المعادلة (١-٨١)، نحصل على المعادلة:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int (Q(x)\,e^{\int p(x)dx})dx\right] + c\,e^{-\int p(x)dx} \qquad (١-٨٣)$$

وهو يمثل الحل العام للمعادلة (١-٧٨). للحصول على حل خاص لهذه المعادلة يكفي تعويض c بالصفر فنجد الحل الخاص:

$$y_p = e^{-\int p(x)dx}\left[\int (Q(x)\,e^{\int p(x)dx})dx\right]$$

نعلم أن الحل للمعادلة المتجانسة (١-٧٩) هو: $y_h = c\,e^{-\int p(x)dx}$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بشكلها العام يساوي:

$$y = y_p + y_h$$

أي يساوي حلا عامًا للمتجانسة (بدون طرف ثان) مضافا إليه حلاً خاصًا للمعادلة مع طرف ثان.

مثال (١-٣٥)

حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} - y\cot x = \csc x \quad , \quad \sin x \neq 0 \qquad (١-٨٤)$$

الحل

لنحل القسم المتجانس: $\frac{dy}{dx} - y\cot x = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \cot x dx$ حيث $y \neq 0$.

بتكامل الطرفين، نجد:

$$\mathrm{Ln}|y| = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \mathrm{Ln}|\sin x| + \mathrm{Ln}|c|$$

ومنه:

$c \in IR \quad , \quad y = c\sin x$ ($y = 0$ حل للقسم المتجانس).

لنجر التغيير:

$$y = \nu \sin x \quad \text{(استبدلنا c بالمتغير ν)} \qquad (١-٨٥)$$

بالاشتقاق:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\nu}{dx}\sin x + \nu\cos x$$

بالتعويض في (١-٨٤):

$$\frac{d\nu}{dx}\sin x + \nu\cos x - \nu\sin x\cot x = \csc x \Leftrightarrow \frac{d\nu}{dx}\sin x = \csc x \Leftrightarrow d\nu = \csc^2 x dx$$

وبتكامل الطرفين:

$\nu = -\cot x + c$.

لنعوض عن ν بقيمتها في (١-٨٥)، نجد:

$\sin x \neq 0 \quad , \quad y = -\cos x + c\sin x$ (c ثابت اختياري).

وهو يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (١-٨٤).

$y_p = -\cos x$ يمثل الحل الخاص للمعادلة الخطية، $y_h = c\sin x$ يمثل الحل العام للقس
المتجانس.

ملحوظـة (١-٥)

إذا أعطينا الشرط: $y(x_0) = y_0$ ، والذي نسميه بالشرط الابتدائي.

نعوض في المعادلة (١-٨٣) بعد إجراء التكاملات الموجودة عن x, y بالقيمتين x_0, y_0 ، فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بالنسبة للثابت c ، بحلها نجد قيمة هذا الثابت ومن ثم نعوضها في (١-٨٣) فنجد الحل الخاص.

٢) طريقة عامل التكميل

لنكتب المعادلة (١-٧٨) على الشكل:

$$p(x)y\,dx + dy = Q(x)dx \qquad (٨٦-١)$$

من الملاحظ أن: $M = p(x)y$ ، $N = 1$. وأن: $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = p(x)$

فعامل التكميل للقسم المتجانس من (١-٨٦) هو: $\mu = e^{\int p(x)dx}$

بضرب طرفي (١-٨٦) بالعامل μ، نجد:

$$p(x)\, e^{\int p(x)dx} y\,dx + e^{\int p(x)dx} dy = e^{\int p(x)dx} Q(x)dx \Leftrightarrow d(y\, e^{\int p(x)dx}) = Q(x)dx$$

وبتكامل الطرفين، نجد:

$$y\, e^{\int p(x)dx} = \int (e^{\int p(x)dx} Q(x))dx + c \Leftrightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int (e^{\int p(x)dx} Q(x))dx\right] + c\, e^{-\int p(x)dx}$$

وهي المعادلة (١-٨٣) التي حصلنا عليها سابقًا.

مثـال (١-٣٦)

حل المعادلة التفاضلية:

$$(y+1)\frac{dx}{dy} + (4x - y) = 0 \qquad (٨٧-١)$$

ثم أوجد الحل الخاص المحقق للشرط: $y(-\frac{1}{20}) = 0$

الحـــل

لنعتبر y هو المتغير المستقل. تكتب المعادلة على الشكل:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{4}{y+1}x = \frac{y}{y+1} = 1 - \frac{1}{1+y} \quad , \quad y \neq -1$$

عامل التكميل: $\mu = e^{\int \frac{4}{y+1}dy} = e^{4Ln|y+1|} = (y+1)^4$

لنضرب طرفي (١-٨٧) بالعامل μ، فنجد:

$$(y+1)^4\frac{dx}{dy} + 4(y+1)^3 x = (y+1)^4 - (y+1)^3 \Leftrightarrow \frac{d}{dy}[x(1+y)^4] = (y+1)^4 - (y+1)^3$$

وبالتكامل، فإن:

$$x(1+y)^4 = \frac{1}{5}(y+1)^5 - \frac{1}{4}(1+y)^4 + c \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}(1+y) - \frac{1}{4} + c(1+y)^{-4} \quad , \quad y+1 \neq 0$$

لإيجاد الحل الخاص، نعوض في المعادلة السابقة عن: x, y بالقيمتين 0 ، $-\frac{1}{20}$ ، فنحصل على المعادلة:

$$-\frac{1}{20} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + c \Leftrightarrow c = 0$$

وبالتعويض عن c بقيمتها، نجد الحل الخاص:

$$x = \frac{1}{5}(1+y) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 5x + \frac{1}{4}$$

تمـاريـن (١-٤)

حل المعادلات التفاضلية:

١) $y' = x - 2y\cot 2x$

٢) $(y - x + xy\cot x)dx + xdy = 0$

٣) حل المسألتين التفاضليتين:

(أ) $\begin{cases}(2x+3)y' = y + (2x+3)^{\frac{1}{2}} \\ y(-1) = 0\end{cases}$ (ب) $\begin{cases}y' = x^3 - 2xy \\ y(1) = 1\end{cases}$

٤) أوجد المنحني الذي يحقق المعادلة التفاضلية :

$$y' = 2(2x - y)$$

والذي يمر بالنقطة $(0, 1)$.

(١-١٠) معادلة بيرنولي (Bernoulli's Equation)

الشكل العام لمعادلة بيرنولي هو:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \qquad (١-٨٨)$$

n عدد قياسي (نسبي)، Q و P دالتان متصلتان على فترة I.

حل معادلة بيرنولي

لنقسم طرفي (١-٨٨) على y^n ، فتصبح على الشكل :

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = Q(x) \quad , \quad y \neq 0 \qquad (١-٨٩)$$

نفرض:

$$(-n+1)y^{-n}y' = z' \Leftarrow y^{-n+1} = z \qquad (١-٩٠)$$

نكتب المعادلة (١-٨٩) على الشكل التالي، بعد ضرب طرفيها بالعدد $(1-n)$:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$$

وهذه معادلة خطية من المرتبة الأولى، بحلها نحصل على z بدلالة المتغير x. بالرجوع إلى الفرضية (١-٩٠) نحصل على y بدلالة المتغير x.

ملحوظة (١-٦)

تظهر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى كحالة خاصة من معادلة بيرنولي بعد تعويض n بالقيمة $n = 0$.

مثال (١-٣٧)

حل المعادلة التفاضلية :

$$y' + y = xy^2 \qquad (١-٩١)$$

الحل

لنقسم على y^2 مع فرض أن $y \neq 0$ ، نجد :

$$y'y^{-2} + y^{-1} = x$$

نفرض أن : $-y^{-2}y' = z' \Leftarrow y^{-1} = z$ ، فالمعادلة السابقة تصبح على الشكل :

$$z' - z = -x$$

عامل التكميل هو : $\mu = e^{-\int dx} = e^{-x}$

ويضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل μ، نجد :

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}z) = -xe^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}(z' - z) = -xe^{-x}$$

وبتكامل الطرفين، فإن :

$$\frac{1}{y} = z = x + 1 + c\,e^x \Leftrightarrow e^{-x}z = x\,e^{-x} - \int e^{-x}dx + c \Leftrightarrow e^{-x}z = -\int x\,e^{-x}dx + c$$

وهكذا فإن الحل العام :

$$y = \frac{1}{x+1+c\,e^x} \quad , \quad y \neq 0 \quad , \quad x+1+c\,e^x \neq 0$$

(مع ملاحظة أن $y = 0$ حل للمعادلة التفاضلية (١-٩١) ولا يوجد في الحل العام، c ثابت اختياري).

مثال (١-٣٨)

حل المسألة التفاضلية :

$$\begin{cases}\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y' + y^{\frac{3}{2}} = 1 \\ y(0) = 4\end{cases}$$

نفرض أن: $z = y^{\frac{3}{2}} \Leftarrow z' = \frac{3}{2} y' y^{\frac{1}{2}}$ ، وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$z' + z = 1 \qquad (١-٩٢)$$

لنحل المعادلة المتجانسة: $z' + z = 0$ ، نجد:

$$(c = \pm e^{a}) \; z = ce^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{Ln}|z| = -x + a \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -dx \Leftrightarrow z' = -z$$

وبملاحظة أن $z = 1$ حل خاص للمعادلة (١-٩٢)، فإن الحل العام للمعادلة (١-٩٢)، هو:

$$z = y^{\frac{3}{2}} = 1 + ce^{-x} \quad , \quad c \in IR$$

وحسب الشروط الابتدائية، فإن:

$$c = 7 \Leftarrow 8 = 1 + c \Leftarrow (4)^{\frac{3}{2}} = 1 + c$$

فالحل الخاص هو:

$$y = (1 + 7e^{-x})^{\frac{2}{3}} \Leftarrow y^{\frac{3}{2}} = 1 + 7e^{-x}$$

تمـاريـن (١-٥)

١) حل المعادلة التفاضلية:
$(2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2)$ ، بطريقتين مختلفتين.

٢) حل المعادلتين التفاضليتين:

(أ) $y' = 1 + 6x\,e^{x-y}$

(ب) $xy' - y = x^k y^n$ حيث $n \neq 1$ ، $k + n \neq 1$

حل المسألتين التفاضليتين:

(أ) $\begin{cases} y' = 2(3x+y)^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} 2xyy' = y^2 - 2x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

حل المعادلة التالية باعتبار y هو المتغير المستقل:

$$6y^2 dx - x(2x^3 + y)dy$$

(١-١١) أشكال خاصة لمعادلات تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى

تعـــرفنا في البند (١-١٠) على طريقة حـل معادلـة تفاضليـة خطيـة مـن الرتبـة الأولى، وأوجدنا حلول بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية كالمنفصلـة المتحـولات والمتجانســة والتامــة. لكن يجب أن ننبــه هنا أنه لا توجــد طريقــة عامة لحل معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى حتى ولو استطعنا إثبات وجود حل لها استنادًا للنظرية (١-١).

سوف نتعرض فيما يلي لإيجاد حلول بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية من الرتبة الأولى وذات أشكال خاصة من خلال الطرائق التالية:

أ) التحليل إلى عوامل

تعطى المعادلة التفاضلية:

$$f(x,y,p) = 0 \quad , \quad y' = p \qquad (١-٩٣)$$

إذا استطعنا تحليل المعادلة (١-٩٣)، إلى عوامل بسيطة في المتغيرات x,y,p ، فقد نستطيع حلها. والأمثلة التالية توضح هذه الفكرة.

مـثـال (١-٣٩)

حل المعادلة التفاضلية:

$$xyp^2 + (x+y)p + 1 = 0 \qquad (١-٩٤)$$

الحـــل

بتحليل الطرف الأيسر، تكتب المعادلة على الشكل:

$(xp+1)(yp+1) = 0$ ، هناك حالتان:

(أ) إذا كانت: $dy = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow p = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow xp + 1 = 0$

(x لا يمكن أن تساوي الصفر)

وبتكامل الطرفين، فإن: $y = -\mathrm{Ln}|c_1 x| \Leftrightarrow y = -\mathrm{Ln}|x| - \mathrm{Ln}|c_1|$