مثال (6.11): دولاب يحتوي على ثلاث ملفات حمراء وخمس ملفات سوداء، سحب منه ثلاث ملفات عشوائياً على التوالي (بدون إرجاع)، ما احتمال:

- أن يكون من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين.
- أن يكون من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين على الأقل.
- أن يكون من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين على الأكثر.

الحل:

- $A$: الملف أسود $B$: الملف أحمر 1: الملف الأول 2: الملف الثاني 3: الملف الثالث

وحيث لم يرد في المسألة ترتيب لعملية السحب ، فسنجد أن:

من بين الثلاث ملفات ملفين أسود = (الملف الأول أسود والثاني أسود والثالث أحمر) أو (الملف الأول أسود والثاني أحمر والثالث أسود) أو (الملف الأول أحمر والثاني أسود والثالث أسود)

وعند حساب احتمال أي طريقة (أي ترتيب) نجد أنه متساوي بالنسبة للطرق الثلاثة. وعلى ذلك يكون الحل بطريقة مختصرة باستخدام التوافيق، كما يلي :

$$P(A \cap B) = [\text{عدد طرق الاختيار}] \times [\text{احتمال أي ترتيب}]$$

$$P(A \cap B) = C_2^3 \times P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(B_3 / A_2 A_1)$$

$$= 3\left[\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}\right] = \frac{180}{336}$$

من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين على الأقل = من بين الثلاث ملفات ملفين أسود (الفقرة السابقة)

أو جميع الملفات الثلاث سوداء

$$P(A\cap B)=C_2^3\times P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(B_3/A_2A_1)+P(A_1)\cdot P(A_2/A_2)\cdot P(A_3/A_2A_1)$$

$$=3\left[\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\right]+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{180}{336}+\frac{60}{336}=\frac{240}{336}$$

من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين على الأكثر = من بين الثلاث ملفات ملفين أسود (الفقرة السابقة)

أو من بين الثلاث ملفات ملف أسود أو من بين الثلاث ملفات ولا ملف أسود

$$
\begin{aligned}
P(A\cap B) &= C_0^3 \times P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P(B_3/B_2B_1)\\
&+C_1^3 P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)\cdot P(B_3/B_2A_1)\\
&+C_2^3 P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(B_3/A_2A_1)
\end{aligned}
$$

يمكن حساب هذا الاحتمال مباشرة ولكن من الأسهل في هذه الحالة استخدام تعريف الاحتمال بأن احتمال وقوع حدث + عد وقوعه يساوي الواحد، بمعنى:

من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين على الأكثر + احتمال جميع الثلاث الملفات سوداء = 1

⇐ احتمال من بين الثلاث ملفات ملفين أسودين على الأكثر = 1 – احتمال جميع الثلاث الملفات سوداء

$$\Rightarrow P(A\cap B)=1-P(A_1)\cdot P(A_2/A_2)\cdot P(A_3/A_2A_1)=1-\frac{60}{336}=\frac{276}{336}$$

ملاحظة هامة: إذا لم يُذكر الترتيب في المسألة فيمكن استخدام التوافيق لتبسيط الحل.

# تمارين

**تمرين ١ :**

سحبت ورقه من أوراق اللعب ( الكوتشينة ) ، ما هو احتمال أن تحمل الورقة المسحوبة الرقم ( ٢ ) أو صورة ؟

**الحل**

مما سبق في مثال (6.2)، حالات التجربة N=52، كما أن:

A: ورقة تحمل الرقم ٢ B: ورقة تحمل صورة

الحدثان A و B مانعان.

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{12}{52} = \frac{16}{52}$$

## تمرين ٢ :

سحبت ورقتين من أوراق اللعب ( الكوتشينة ) ، ما هو احتمال أن تحمل ان تكون الورقة الأولى المسحوبة الرقم ( ٢ ) والاخرى صورة ؟

## الحل

مما سبق في مثال (6.2)، حالات التجربة N=52، كما أن:

A: ورقة تحمل الرقم ٢ B: ورقة تحمل صورة

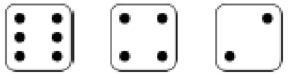
الحدثان A و B مستقلان.

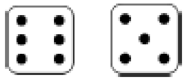
$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{52} \times \frac{12}{52} = \frac{48}{2704} = \frac{3}{169}$$

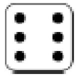
## تمرين ٣:

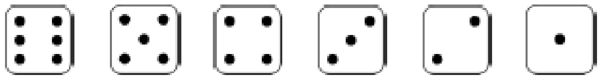
ألقيت زهرة نرد ( طاوله ) مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من 4 ؟

## الحل

الحدث A:  m=3

الحدث B:  m=2

$A \cap B$  m=1

حالات التجربة الكلية  $\Leftarrow$ $N = 6$

الحدثان A و B غير مانعان.

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

## تمرين ٤ :

صندوق به (6) كرات حمراء ، (4) بيضاء سحبنا منه عشوائيا ( 3 ) كرات على التوالي ما هو احتمال الحصول على :

١- كرتين حمراء

٢- كرتين على الأقل حمراء

٣- كرتين على الأكثر حمراء

## الحل

A: كرة حمراء B: كرة بيضاء 1: الكرة الأولى 2: الكرة الثانية 3: الكرة الثالثة

وحيث لم يرد في المسألة ترتيب لعملية السحب، فسنجد أن:

***من بين ثلاث كرات كرتين حمراء= (الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة بيضاء) او (الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة حمراء) أو (الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة حمراء)***

وعند حساب احتمال أي طريقة (أي ترتيب) نجد أنه متساوي بالنسبة للطرق الثلاثة. وعلى ذلك يكون الحل بطريقة مختصرة باستخدام التوافيق، كما يلي :

$$P(A \cap B) = [\text{عدد طرق الاختيار}] \times [\text{احتمال أي ترتيب}]$$

$$P(A \cap B) = C_2^3 P(A_1).P(A_2).P(B_3) = 3\left[\frac{6}{10}.\frac{6}{10}.\frac{4}{10}\right] = \frac{54}{125}$$

**من بين الثلاث كرات كرتين كرتين حمراء على الأقل = من بين الثلاث كرات كرتين حمراء (الفقرة السابقة) او جميع الكرات الثلاثة حمراء**

$$P(A \cap B) = C_2^3 P(A_1).P(A_2).P(B_3) + P(A_1).P(A_2).P(A_3)$$
$$= 3\left[\frac{6}{10}.\frac{6}{10}.\frac{4}{10}\right] + \frac{6}{10}.\frac{6}{10}.\frac{6}{10} = \frac{81}{125}$$

***من بين الثلاث كرات كرتين حمراء على الأكثر = من بين الثلاث كرات كرتين حمراء (الفقرة السابقة) او من بين الثلاث كرات كرة حمراء أو من بين الثلاث كرات ولا كرة حمراء***

**باستخدام تعريف الاحتمال بأن احتمال وقوع حدث + عدم وقوعه يساوي الواحد، بمعنى:**

احتمال من بين الثلاث كرات كرتين حمراء على الأكثر + احتمال جميع الثلاث كرات حمراء =١

احتمال من بين الثلاث كرات كرتين حمراء على الأكثر =١- احتمال جميع الثلاث كرات حمراء

$$P(A \cap B) = 1 - P(A_1).P(A_2).P(A_3)$$
$$= 1 - \frac{6}{10}.\frac{6}{10}.\frac{6}{10} = \frac{98}{125}$$

## تمرين ٥ :

ألقيت قطعة نقود معدنية ثلاث مرات ، ما احتمال:

١. ظهور شعار(صورة) على قطعتين من بين الثلاث القطع النقدية.

٢. ظهور كتابة على قطعتين من بين الثلاث القطع النقدية.

٣. ظهور شعار واحد على الأقل على قطعة من بين الثلاث القطع النقدية.

٤. ظهور كتابتين على الأكثر على قطعتين من بين الثلاث القطع النقدية.

### الحل

$N=8$

{(ص،ص،ص)، (ص،ص،ك)،
(ص،ك،ص)،(ك،ص،ص)،(ص،ك،ك)،(ك،ص،ك)،(ك،ك،ص)،(ك،ك،ك)}

حيث: ص: صورة (شعار)        ك: كتابة

١. احتمال ظهور شعار(صورة) على قطعتين من بين الثلاث القطع النقدية $=\frac{3}{8}$

{(ص،ص،ك)، (ص،ك،ص)،(ك،ص،ص)}

٢. احتمال ظهور كتابة على قطعتين من بين الثلاث القطع النقدية $= \frac{3}{8}$

{(ص،ك،ك)،(ك،ص،ك)،(ك،ك،ص)}

٣. احتمال ظهور شعار واحد على الأقل على قطعة من بين الثلاث القطع النقدية $=\frac{7}{8}$

{(ص،ص،ص)، (ص،ص،ك)، (ص،ك،ص)،(ك،ص،ص)،(ص،ك،ك)،(ك،ص،ك)،(ك،ك،ص)}

٢. احتمال ظهور كتابتين على الأكثر على قطعتين من بين الثلاث القطع النقدية $=\frac{7}{8}$

{ (ص،ص،ص)، (ص،ص،ك)، (ص،ك،ص)،(ك،ص،ص)،(ص،ك،ك)،(ك،ص،ك)،(ك،ك،ص)}