مذكرات مقرر 210 فيز

قسم الفيزياء والفلك
جامعة الملك سعود
د. ناصر بن صالح الزايد

قد توجد أخطاء غير متعمدة في المذكرات


جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك
مقرر 210 فيز
د. ناصر بن صالح الزايد
nalzayed@ksu.edu.sa
المحاضرة رقم: 1

تحليل المعادلات باستخدام الأبعاد

TABLE 1.6 Dimensions and Common Units of Area, Volume, Speed, and Acceleration

System	Area (L^2)	Volume (L^3)	Speed (L/T)	Acceleration (L/T^2)
SI	m^2	m^3	m/s	m/s^2
British engineering	ft^2	ft^3	ft/s	ft/s^2

نريد استخدام الوحدات والأبعاد من أجل التأكد من كون المعادلة التي نكتبها صحيحة أم لا؟

الأبعاد على يسار المعادلة = الأبعاد على يمين المعادلة

سوف نستخدم: حرف *L* كرمز للبعد (الطول)

حرف *T* كرمز للزمن

ويمكن استخدام أية حروف، المهم أن يتم توحيدها للطرفين.

بقية الكميات الفيزيائية يستخدم لها رموز مشابهة وذات دلالة

تحليل المعادلات باستخدام الأبعاد

تطبيق: من المعلوم أن المسافة x التي تقطعها سيارة في حالة تسارع a خلال فترة زمنية t تعطى بالعلاقة الرياضية التالية: $x = \frac{1}{2}at^2$

فكيف يمكننا استخدام مفهوم الوحدات والأبعاد للتأكد من صحة هذه المعادلة؟

التوضيح: بما أن المسافة x هي بعد (طول) فنعبر عنها بالرمز L

والزمن t نعبر عن بالرمز T ولكن مع التربيع

والتسارع: عبارة عن مسافة مقسومة على مربع الزمن

أذن تصبح المعادلة كالتالي: $L = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{T^2} \cdot T^2$

ثم نقوم بعملية اختصار: ونحصل على: $L = \frac{1}{2} \cdot L$

إذن الطرف الأيسر = الطرف الأيمن (لاحظ أن القيمة ½ ليس لها بعد)

إذن المعادلة (العلاقة الرياضية) أعلاه صحيحة.

تحليل المعادلات باستخدام الأبعاد

مثال: بين أن علاقة السرعة: $v = at$ صحيحة باستخدام تحليل الأبعاد؟

الحل: من الجدول المعطى سابقا:

$$\because \quad [v] = \frac{L}{T}$$

$$and \quad [a] = \frac{L}{T^2}$$

$$and \quad [t] = T$$

$$\Rightarrow [v] = [a]\cdot[t] = [at] = \frac{L}{T^2}\cdot T = \frac{L}{T}$$

$$\therefore \; L.H.S. = R.H.S.$$

- إذن من تحليل الأبعاد في الجهة اليسرى نلاحظ أن الأبعاد على يسار المعادلة (للسرعة) متطابقة مع الأبعاد على يمن المعادلة (التسارع مضروبا في الزمن)
- وهذا يدل على صحة المعادلة من حيث الأبعاد

تمرين: جرب العلاقة $v = at^2$ هل هي صحيحة؟

كويز: هل استخدام تحليل المعادلات باستخدام الأبعاد يساعدنا على تحديد القيمة الرقمية لثوابت التناسب في المعادلات؟ مثلا: كتلة الكرة تتناسب طرديا مع مكعب نصف القطر r^3 أي أن: $m \; \alpha \; r^3$ فهل $m = kr^3$ يمكننا تحديد قيمة الثابت k بطريقة تحليل الأبعاد؟

تحليل المعادلات باستخدام الأبعاد

الحل: جواب الكويز هو (لا).

صحيح أن التحليل باستخدام الأبعاد يعطينا أبعاد ثابت التناسب ولكن لا يعطي أية معلومات عن القيمة الرقمية له.

في المثال المعطى لكتلة الكرة المصمتة لو كتبنا المعادلة باستخدام الأبعاد:

$$M = k \cdot L^3$$

$$\Rightarrow k = \frac{M}{L^3} \quad (kg / m^3)$$

إذن وحدة ثابت التناسب هي kg/m^3 ولكن لم نحصل على أي معلومات عن قيمته الرقمية.

موهبة التقريب العشري

البحث عن الرقم التقريبي للحل يفي بالغرض في كثير من الأحيان، ويعطي تصورا جيدا عن حجم النتيجة الحقيقية. أن طالب الفيزياء يتميز بقدرته الفائقة على أيجاد حلول تقريبية في وقت سريع جدا. ويتم ذلك عادة باستخدام أرقام مناسبة وسهلة.

مثال توضيحي: لو أحب أحدنا أن يخمن عدد مرات التنفس في حياة إنسان عادي. فيقوم بذلك كما يلي:

- نقرب عمر الشخص لـ 70 سنة
- نقرب عدد الأيام في السنة إلى 400 يوم
- نقرب عدد الساعات في اليوم إلى 25 ساعة
- نقدر عدد مرات التنفس بـ 10 مرات كل دقيقة

يصبح لدينا المعادلة التقريبية التالية:

$$No. = 70\,yr \times 400\frac{day}{yr} \times 25\frac{h}{day} \times 60\frac{\min}{h} \times 10\frac{times}{\min} \approx 4\times10^{8}$$

الحركة في خط مستقيم

- في هذا الفصل نناقش الحركة كدالة في الزمان والمكان دون أن نهتم بما يسبب هذه الحركة.
- يسمى هذا النوع من الميكانيكا: علم الحركة المجردة (*kinematics.*).
- سوف نقتصر على الحركة في بعد واحد فقط
- سوف نتعرف على: * الإزاحة Displacement
  - السرعة المتجهة Velocity
  - التسارع Acceleration
- نركز في هذا الباب على الحركة بتسارع ثابت (وليس بالضرورة سرعة ثابتة).

الحركة في خط مستقيم: بتوضيح أكثر

- أن الحركة هي عبارة عن تغير مستمر في موقع الجسم
- في الفيزياء هناك ثلاثة أنواع من الحركة:
  - **الحركة الانتقالية**: *Translational Motion* (حركة سيارة)
  - **الحركة الدورانية**: *Rotational Motion* (دوران الأرض حول نفسها)
  - **الحركة الاهتزازية**: *Vibrational Motion* (حركة البندول)
- في الفيزياء ننظر للجسم المتحرك باعتباره (جسيما نقطيا) Particle أي أنه يملك كتلة مركزة في نقطة بغض النظر عن شكله، مثلا الأرض تدور حول الشمس كنقطة حول نقطة أخرى ثابتة.

الإزاحة، السرعة المتجهة، والسرعة المجردة

- سوف نعرف الإزاحة بعد قليل
- نقصد بالسرعة المتجهة السرعة التي يرافقها اتجاه، مثلا 20 كم/س باتجاه الشمال
- ونقصد بالسرعة المجردة: السرعة التي لا يهم معها الاتجاه، مثلا: سرعة سيارة 20 كم/س (بدون ذكر الاتجاه)
- تعرف الإزاحة كما يلي:

$$\vec{\Delta x} = x_f - x_i \qquad (2.1)$$

- حيث: x_f تمثل الموقع النهائي، و x_i تمثل الموقع الابتدائي للجسم (الجسيم)

الإزاحة، السرعة المتجهة، والسرعة المجردة

- نلاحظ من معادلة الإزاحة ما يلي:
- $x_f > x_i$ الإزاحة موجبة (محصلة حركة الجسم في الاتجاه الموجب)
- $x_f < x_i$ الإزاحة سالبة(محصلة حركة الجسم في الاتجاه السالب)
- $x_f = x_i$ الإزاحة = صفر(عاد الجسم إلى نفس موقعه الأصلي)

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 2

الإزاحة، السرعة المتجهة، والسرعة القياسية

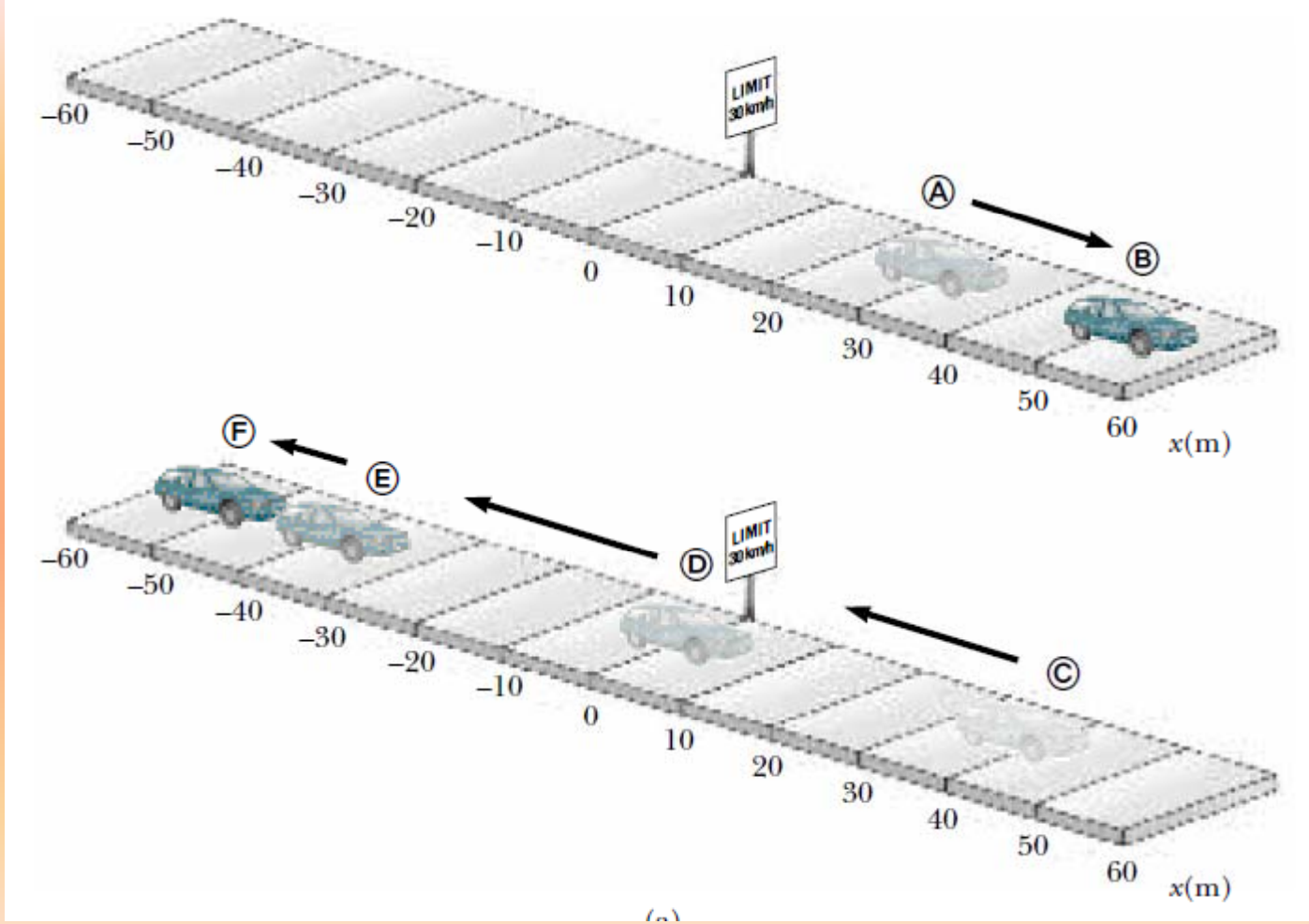
- تعرف الإزاحة كما يلي:

$$\vec{\Delta}x = x_f - x_i \qquad (2.1)$$

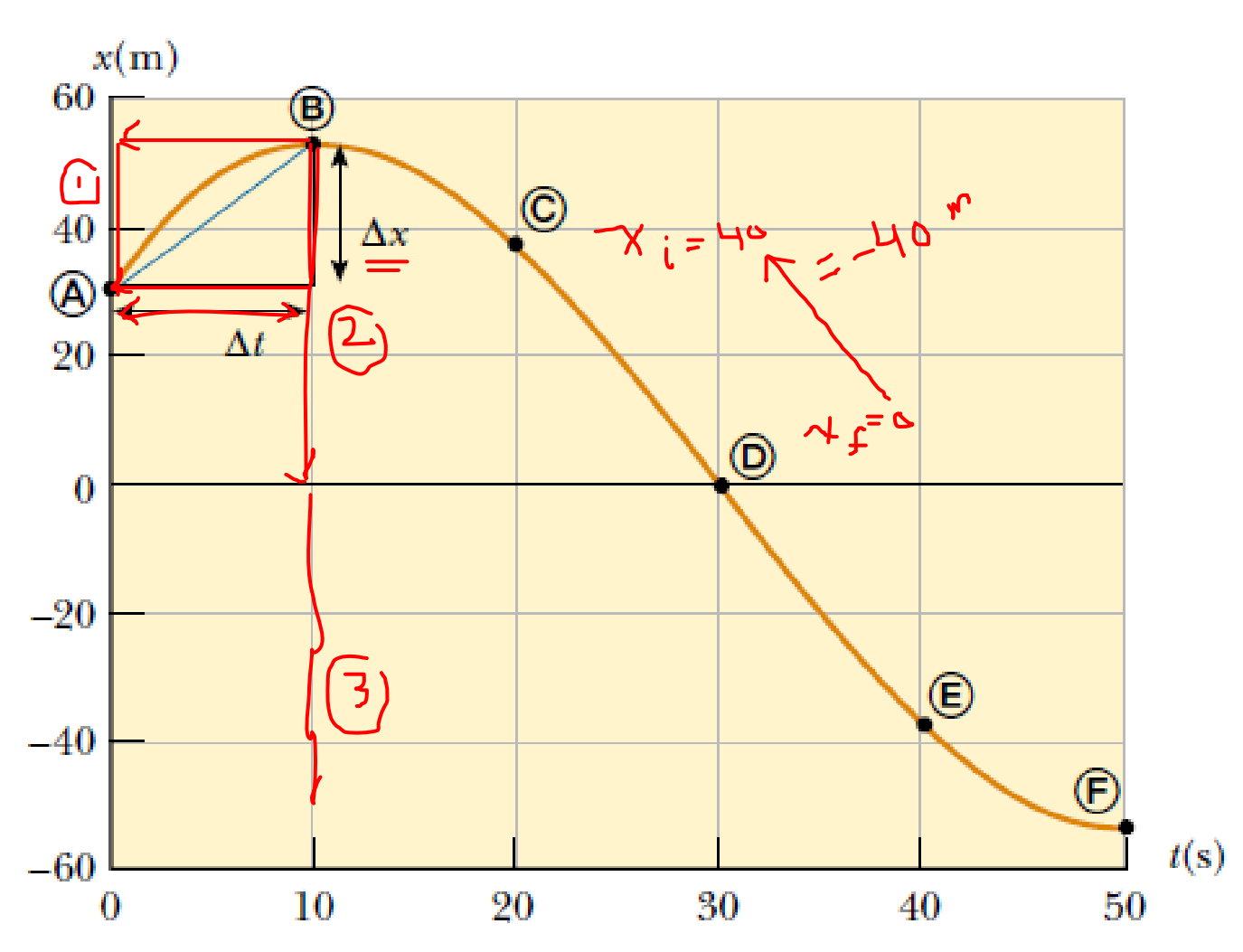
- وجود السهم أعلى الإزاحة يدل على أن الإزاحة كمية متجهة
- حيث: x_f تمثل الموقع النهائي، و x_i تمثل الموقع الابتدائي للجسم

- نلاحظ من معادلة الإزاحة ما يلي:
- $x_f > x_i$ الإزاحة موجبة (محصلة حركة الجسم في الاتجاه الموجب)
- $x_f < x_i$ الإزاحة سالبة(محصلة حركة الجسم في الاتجاه السالب)
- $x_f = x_i$ الإزاحة = صفر(عاد الجسم إلى نفس موقعه الأصلي)

توضيح حركة سيارة في بعد واحد كدالة في الزمن



رسم بياني لحركة سيارة في بعد واحد كدالة في الزمن



فائدة الرسم البياني في تحليل الحركة

- نتأمل في مراحل مختلفة من الحركة يعكسها الرسم البياني السابق.
- عندما تحركت السيارة من الموقع A إلى الموقع B استغرق ذلك 10 s
- أي أن: $\Delta t = 10 - 0 = 10\ s$
- الإزاحة في هذه المرحلة كانت: $\vec{\Delta}x = 50 - 30 = 20\ m$
- في الفترة من C إلى D كانت: $\Delta t = 30 - 20 = 10\ s$
- في حين أن: $\vec{\Delta}x = 0 - 40 = -40\ m$
- فنلاحظ أن التغير في الزمن دائما موجب، لأنه لا يوجد زمن سالب. في حين أن الإزاحة أخذت قيما موجبة و أخرى سالبة
- كذلك نلاحظ أن الزمن كمية قياسية ولذلك لم نضع علامة الاتجاه، في حين أن الإزاحة كمية متجهة

فائدة الرسم البياني في تحليل الحركة

- إذن الرسم البياني أعطى معلومات كثيرة بصورة سريعة وسهلة. وبين أن السيارة تتحرك مرات باتجاه سالب وأخرى باتجاه موجب، ومرات تتحرك أسرع وأخرى أبطأ.
- يهمنا كثيرا قسمة الإزاحة خلال فترة زمنية معينة على تلك الفترة، حيث تسمى الكمية الناتجة: متوسط السرعة المتجهة Average Velocity ورمزها: $\vec{v}_x$ حيث تمثل الشرطة كلمة (متوسط) والسهم يشير للاتجاه
- يعرف متوسط السرعة المتجهة كما يلي:

$$\vec{v}_x = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

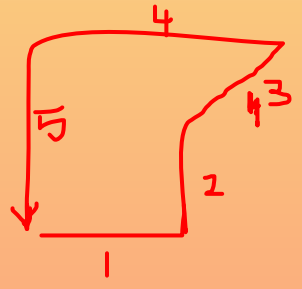
- لاحظ أن متوسط السرعة المتجهة في الحالة الأولى هو: 2 m/s تقريبا. في حين أنه يساوي 4- m/s في الحالة الثانية تقريبا.

دلالة أشارة متوسط السرعة المتجهة

- إذن كما في الإزاحة: ممكن أن يكون متوسط السرعة المتجهة (من الآن فصاعدا: متوسط السرعة) كمية موجبة أو سالبة أو صفرا:
- $\vec{\bar{v}}_x > 0$ موجبة (حركة الجسم في الاتجاه الموجب) +
- $\vec{\bar{v}}_x < 0$ سالبة (حركة الجسم في الاتجاه السالب) −
- $\vec{\bar{v}}_x = 0$ صفر (عاد إلى نفس مكانه الأصلي، أو ليس هناك حركة)
- بالرغم من أننا في الحياة العادية لا نفرق بين السرعة المتجهة والقياسية،إلا أنه في الفيزياء هناك فرق واضح كما سبق.
- إن كون السرعة المتجهة تكون صفرا عندما يعود الجسم إلى نفس موقعه الأصلي، قد يفقدنا معلومات مهمة، لذا لزم أن نتعرف على السرعة القياسية.

متوسط السرعة القياسية و متوسط السرعة المتجهة

- لو تخيلنا لاعبا قطع 20 كيلومترا في سباق ثم عاد إلى نفس مكانه وقطع 20 كيلومترا أخرى، فأن متوسط سرعته المتجه يساوي صفرا. غير أننا في أحيان كثيرة قد نرغب فعلا بالتعرف على سرعة اللاعب بغض النظر عن اتجاهها.



- ومن هنا نحتاج للتعرف على (متوسط السرعة القياسية)

$$\bar{u} = \frac{\text{Total Distance}}{\text{Total Time}} \qquad (Average \quad Speed)$$

- وبحساب هذه السرعة للاعب باعتبار أن الزمن كان ساعتين:

$$\bar{u} = \frac{40{,}000 \ \text{m}}{7200 \ \text{s}} = 5.56 \ m/s$$

- أن متوسط السرعة القياسية دائما موجب.

تطبيق على الكميات السابقة

تطبيق:من الشكل السابق، للفترة من A إلى F: احسب:

1. الازاحة Displacement
2. متوسط السرعة المتجهة Average velocity
3. متوسط السرعة القياسية Average Speed

التوضيح:

$$\because x_A = 30\ m,\quad x_F = -53\ m, t_A = 0\ s\ and\ t_F = 50\ s$$

$$\because \Delta x = x_F - x_A = -53\ m - 30\ m = -83\ m \qquad (1)$$

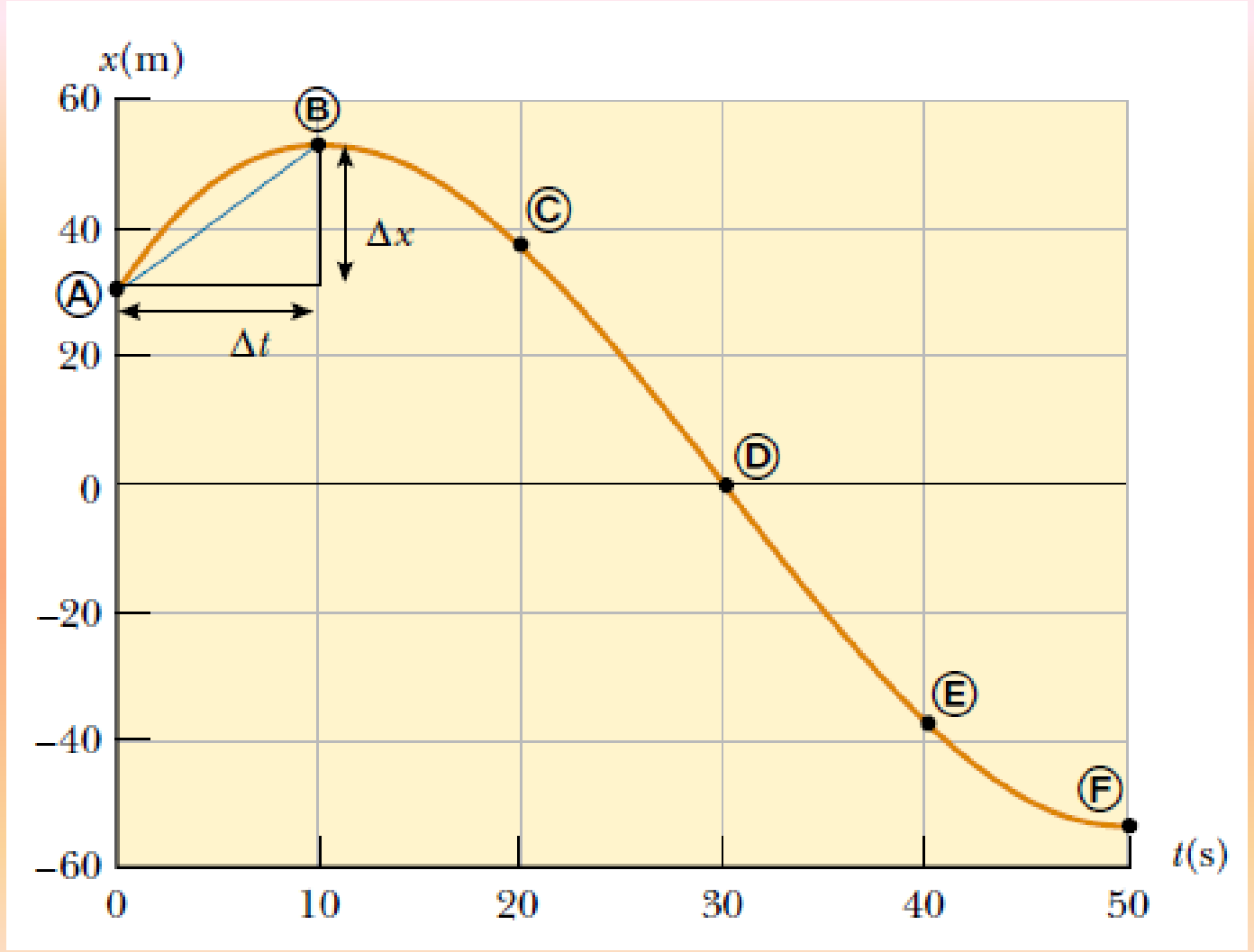
$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_F - x_A}{t_F - t_A} = \frac{-83\ m}{50\ s} = -1.7\ m/s \qquad (2)$$

$$\overline{u} = \frac{\text{total distance}}{\text{total time}} = \frac{22\ m + 52\ m + 53\ m}{50\ s} = 2.5\ m/s \qquad (3)$$

لاحظ أن متوسط السرعة المتجهه سالب ومقداره أقل من متوسط السرعة القياسية.

لاحظ كيف حسبنا المسافات على ثلاث مراحل: الجزء الموجب من A إلى B + الجزء السالب من B إلى O + الجز السالب من O إلى F

حساب المسافات في المراحل المختلفة

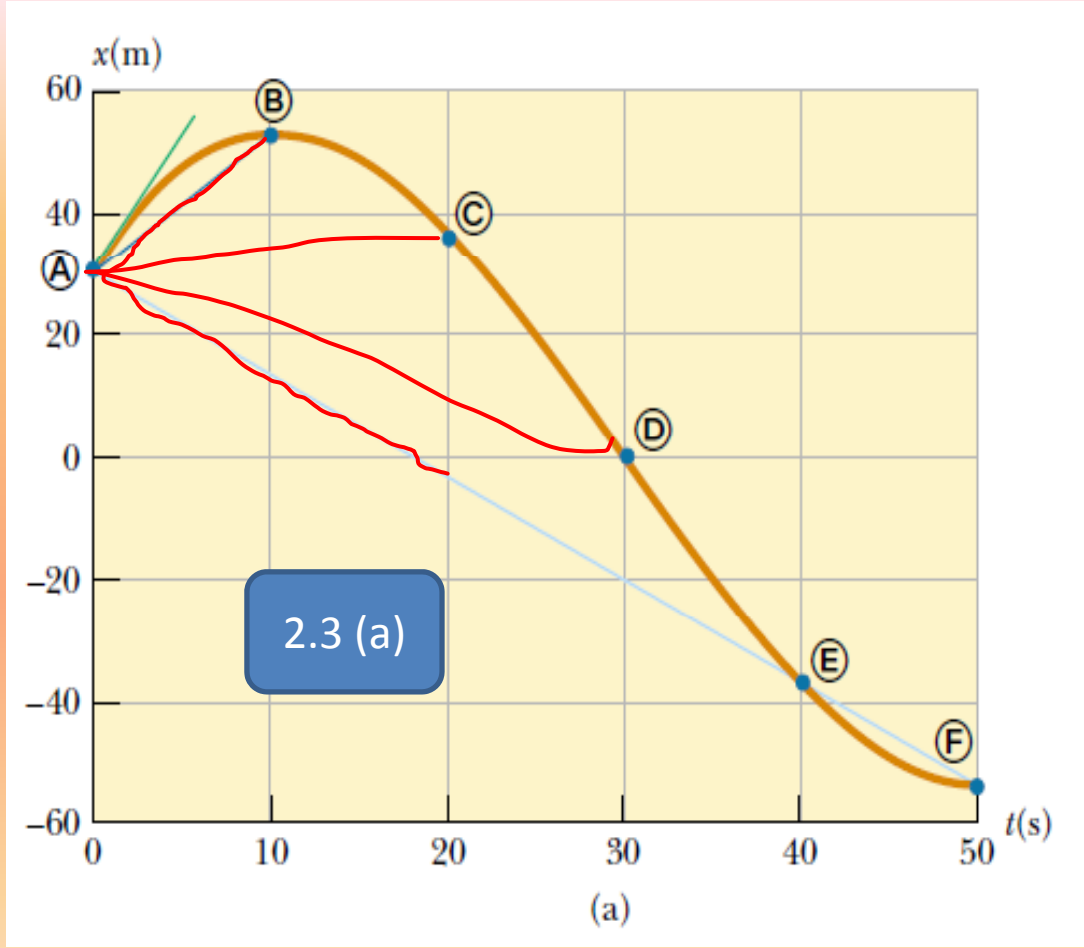


يتم عرض فلاش توضيحي للفرق بين المسافة والأزاحة يتوفر الفلاش في الموقع

السرعة المتجهه والقياسية اللحظيتان

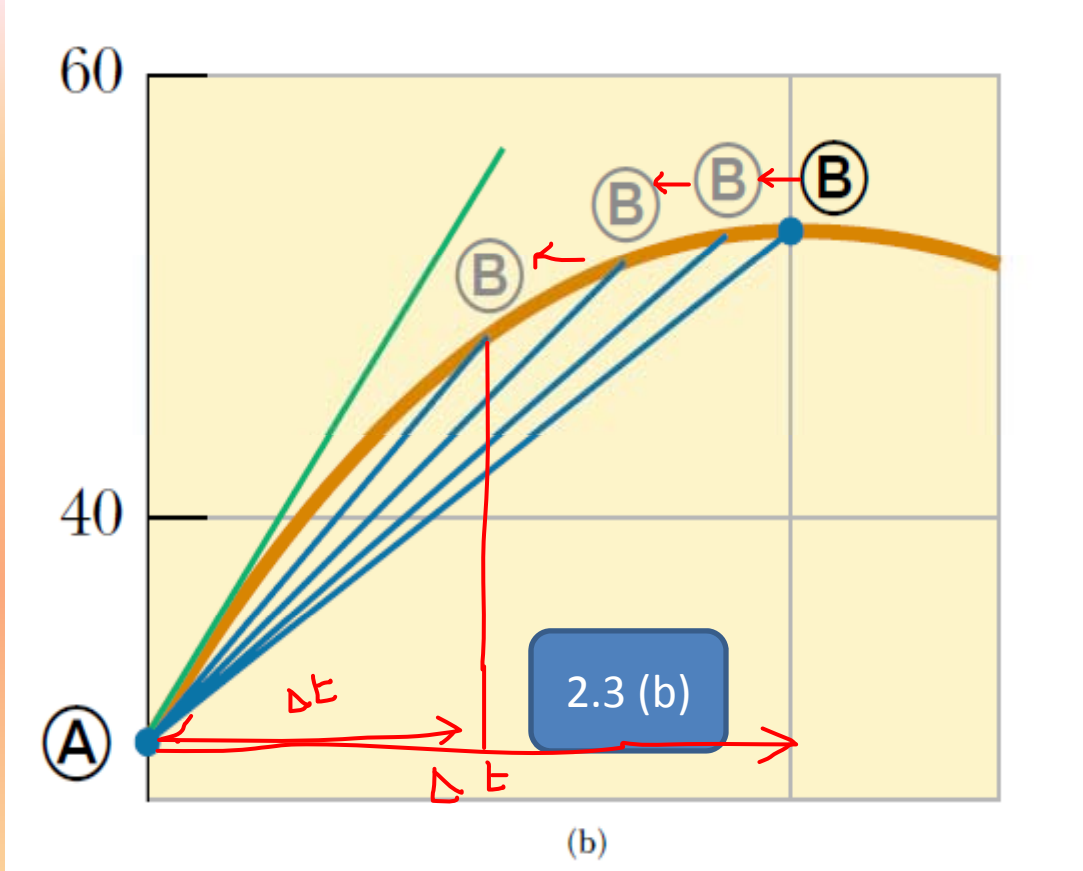
- لعله اتضح من الشكل السابق أن حركة الأجسام ممكن أن يتغير اتجاهها في أي وقت وكذلك تتغير مقاديرالسرعة والتسارع.
- إذن حساب المتوسطات قد يكون غير مفيد وليست له دلالة كافية.
- مثلا لو أن شخصا قاد سيارته باتجاه مدينة الخرج وقطع 100 كم ذهابا وأيابا وتوقف عدة مرات اثناء الطريق بحيث استغرقت الرحلة 4 ساعات، فأن متوسط السرعة المتجهة يساوي صفرا، ومتوسط السرعة القياسية يساوي *50 km/h* وهو متوسط بعيد عن السرعة الحقيقية التي كان يقود بها سيارته.
- فالمطلوب إذن أن نبحث عن سرعة معينة في لحظة معينة وهي ما نسميه (السرعة اللحظية) *Instantanous velocity*

السرعة المتجهه والقياسية اللحظيتان



- الشكل المبين على اليسار هو نفسه الشكل السابق لحركة السيارة.
- تتنقل السيارة في المحطات المبينة مغيرة اتجاهها من الموجب في الفترة من *A* إلى *B* ثم الاتجاه السالب بقية الحركة.
- كما هو واضح تتوقف السيارة لحظيا عند النقطة *B*
- كذلك يتضح أن سرعة السيارة تتناقص قبيل الوصول إلى المحطة *F*

السرعة المتجهه والقياسية اللحظيتان



- الشكل على اليسار هو جزء من الشكل السابق مكبر.
- لاحظ المماس عند النقطة A والخط الواصل بين A و B كيف يقتربان من بعض كلما اقتربت B من A .
- أن معنى اقتراب B من A هو تقليل الفترة الزمنية بين النقطتين تدريجيا حتى تصبح قريبة جدا من الصفر عند شبه تطابق النقطتين مع بعضهما.

السرعة المتجهه والقياسية اللحظيتان

- لقد كان وصف حركة جسم في أية لحظة معينة أمرا غير ممكن في السابق وحتى القرن 1600 تقريبا عندما تم اكتشاف علم التفاضل والتكامل، واستفيد منه في وصف الحركة بشكل دقيق في أية لحظة زمنية.
- لنركز على الشكل (a) 2.3 : حسبنا متوسط السرعة سابقا بين النقطتين A و B وكانت تساوي تقريبا 2 m/s ، كما حسبنا سابقا متوسط السرعة بين A و F وكانت -1.7 m/s .
- السؤال: أي النتيجتين تعتبر أكثر دقة؟
- ربما أننا عندما نضع قصة رحلة السائق إلى مدينة الخرج في الحساب، يتبين أنه كلما قلت الفترة الزمنية المدروسة، كلما كانت النتائج أكثر دقة، وذلك لتناقص احتمالية حصول تغيرات خلال فترات اقصر.
-

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

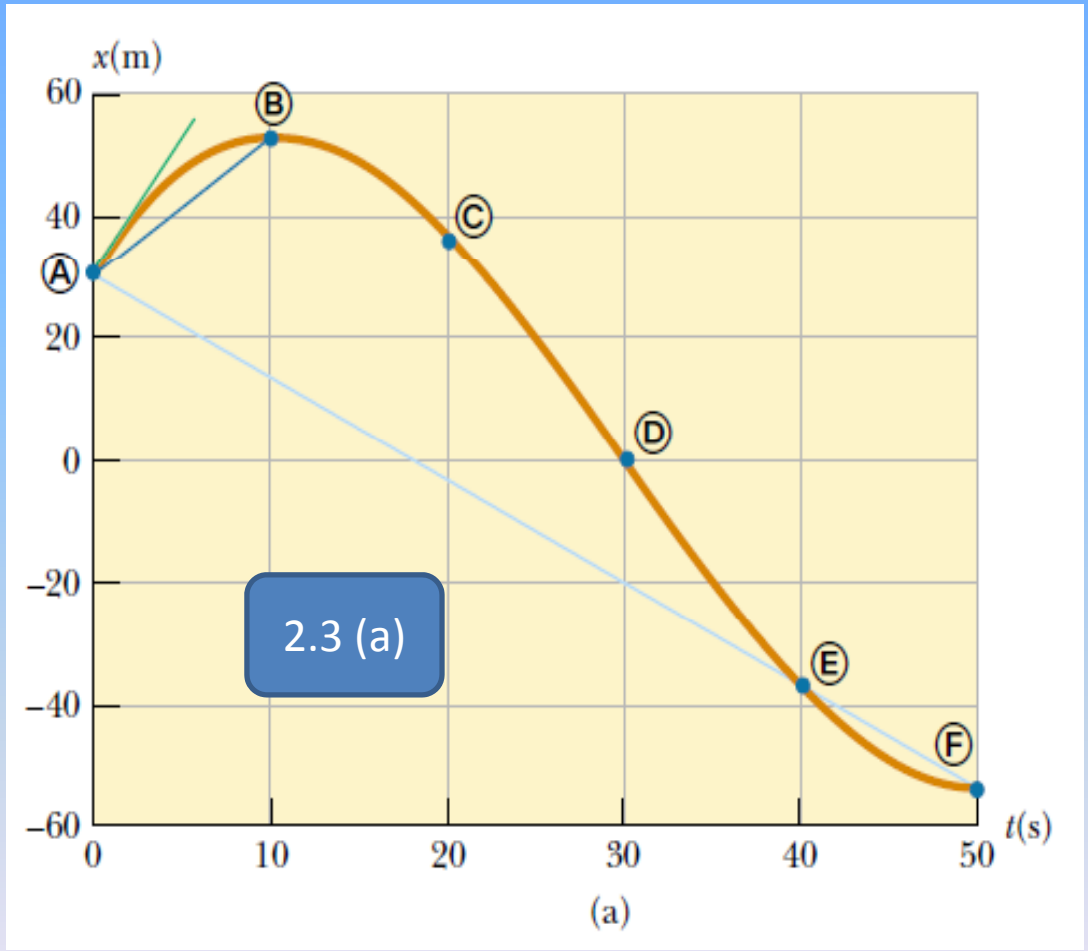
مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

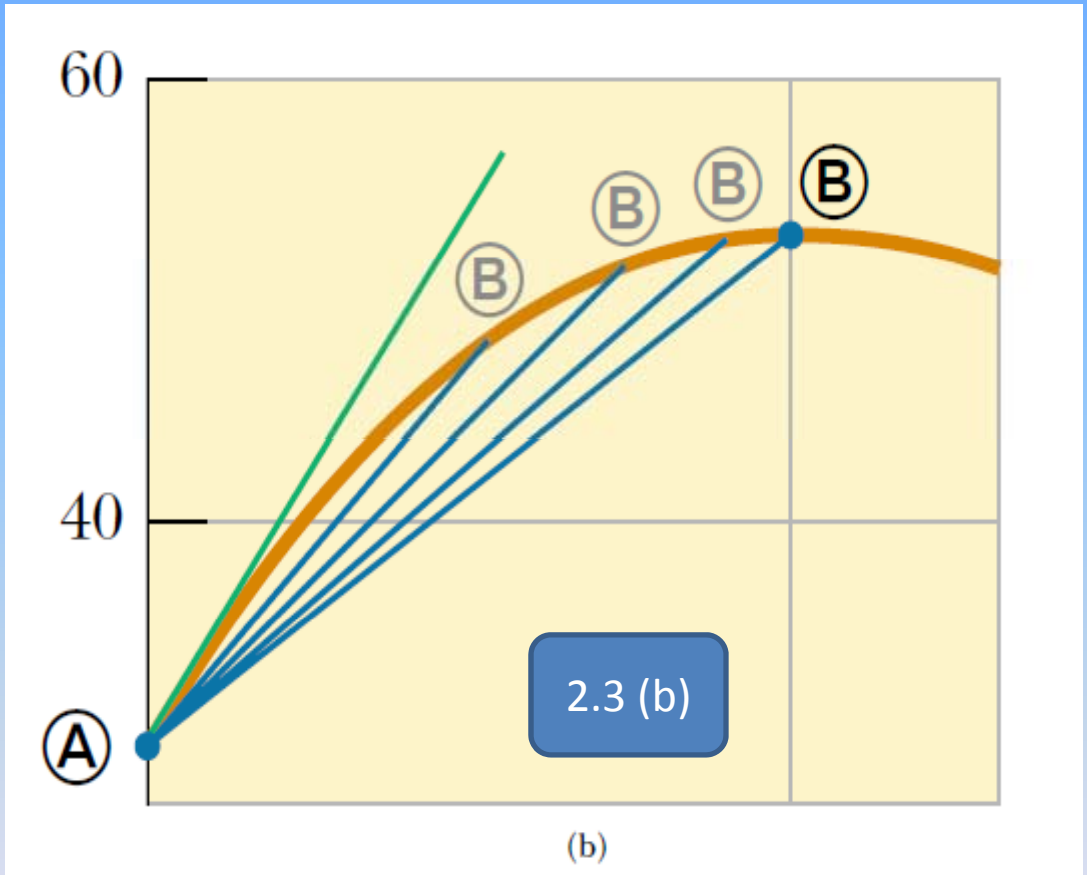
المحاضرة رقم: 3

السرعة المتجهه والقياسية اللحظيتان



- الشكل المبين على اليسار هو نفسه الشكل السابق لحركة السيارة.
- تتنقل السيارة في المحطات المبينة مغيرة اتجاهها من الموجب في الفترة من *A* إلى *B* ثم الاتجاه السالب بقية الحركة.
- كما هو واضح تتوقف السيارة لحظيا عند النقطة *B*
- كذلك يتضح أن سرعة السيارة تتناقص قبيل الوصول إلى المحطة *F*

السرعة المتجهه والقياسية اللحظيتان



- الشكل على اليسار هو جزء من الشكل السابق مكبر.
- لاحظ المماس عند النقطة A والخط الواصل بين A و B كيف يقتربان من بعض كلما اقتربت B من A .
- أن معنى اقتراب B من A هو تقليل الفترة الزمنية بين النقطتين تدريجيا حتى تصبح قريبة جدا من الصفر عند شبه تطابق النقطتين مع بعضهما.

السرعة المتجهة والقياسية اللحظيتان

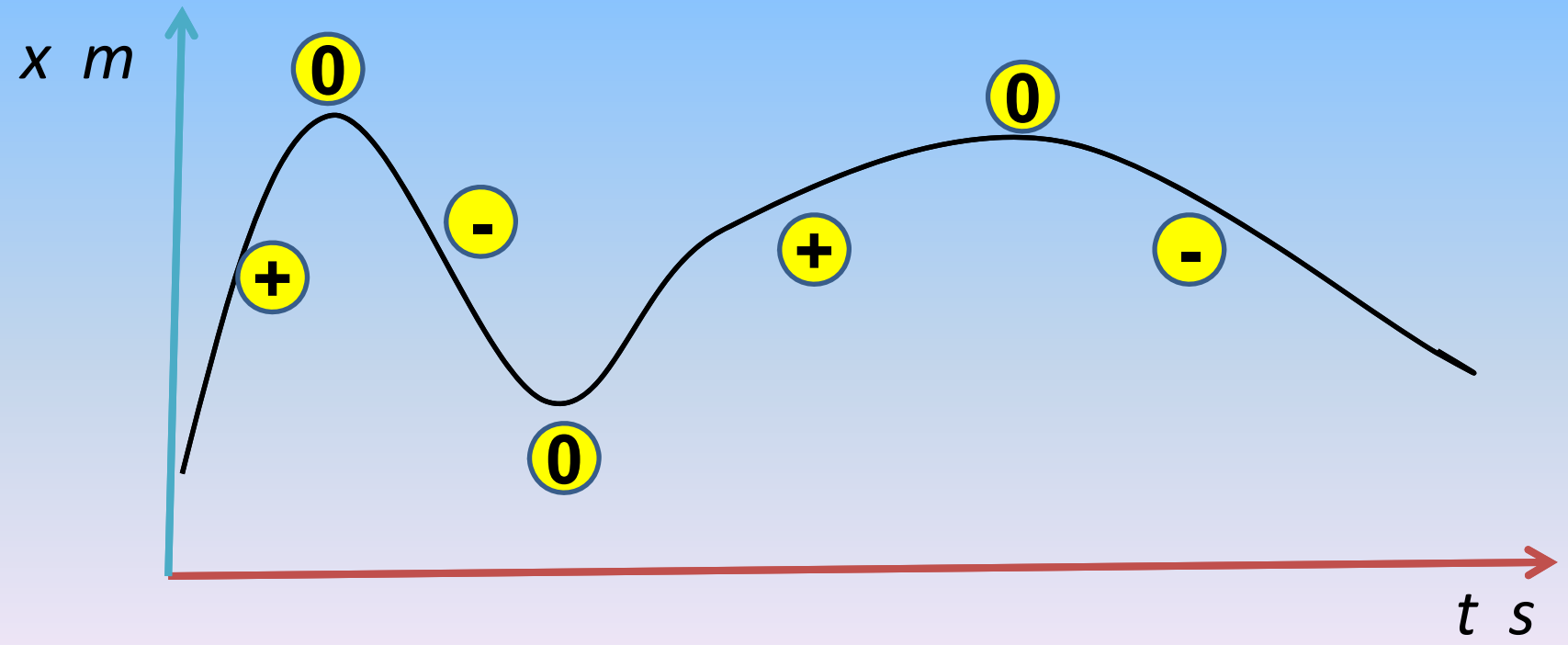
- خلصنا من المحاضرة السابقة إلى أن قياس متوسط السرعة المتجهة أو القياسية غير مفيد في كثير من الأحيان بسبب عدم دقة النتائج، خاصة عندما تكون الحركة متغيرة اتجاها ومقدارا.
- وعليه فسوف نقوم باشتقاق علاقات للحركة اللحظية (الآنية).
- كما في الشكل 2.3 (b) السابق، كلما اقتربت النقطتان A و B أكثر وأكثر، كلما كانت الإزاحة Δx أقل وأقل. بمعنى آخر كلما قلت قيمة الفترة الزمنية التي يحصل عندها التغير Δt كلما كانت دقة النتيجة أكبر.
- أن هذه العملية تقرب قراءة الميل *Slope* من قراءة المماس للخط المنحني.
- نعبر عن كل هذا بكتابة نهاية *Limit* لكمية الإزاحة مقسومة على الزمن:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.4)$$

- لاحظ مرة أخرى، عندما تؤول Δt إلى الصفر، فأن Δx كذلك تؤول إلى الصفر والميل يؤول إلى ميل المماس للخط المنحني.

السرعة المتجهة والقياسية اللحظيتان

- إن نتيجة المعادلة (2.4) للسرعة اللحظية قد تكون:
- موجبة: عندما يكون المنحنى صاعدا، اتجاه الحركة إلى اليمين (x +)
- سالبة: عندما يكون المنحنى هابطا، اتجاه الحركة إلى اليسار (x -)
- صفرا: توقف لحظي للحركة (عند القيم العظمى أو الدنيا للمنحنى)



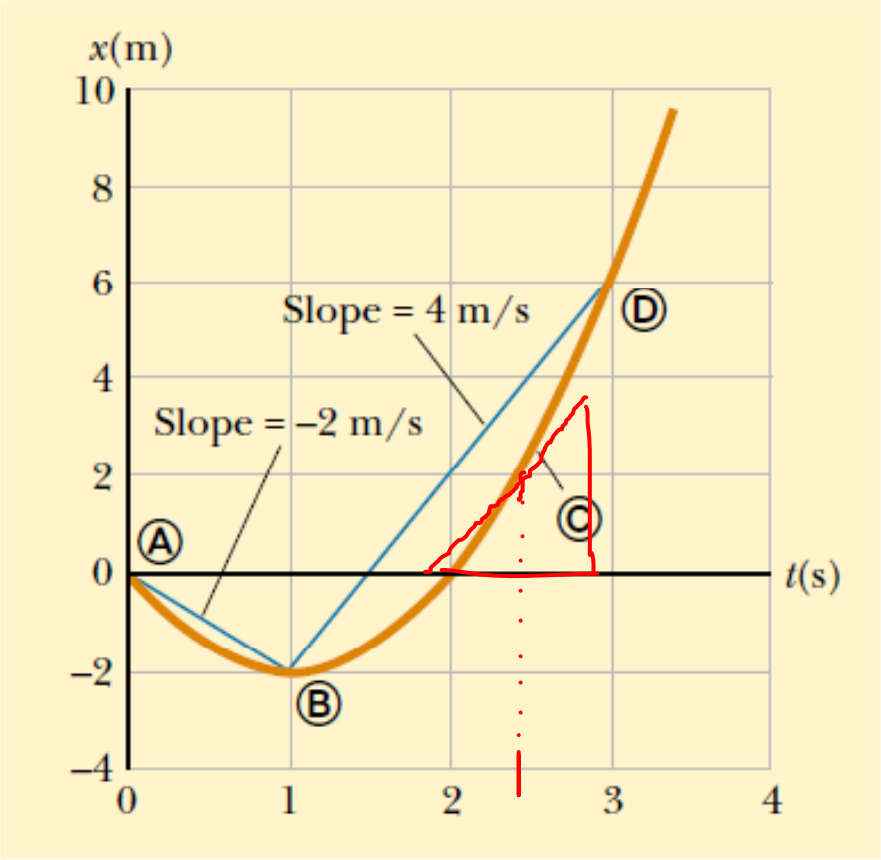
السرعة المتجهة والقياسية اللحظيتان

- بالنسبة للسرعة **القياسية اللحظية**:
- بما أن السرعة اللحظية (المتجهة) تحصل عند زمن قصير جدا، فمن غير الممكن تغير الاتجاه خلال ذلك الزمن.
- إذن، مقدار هذه السرعة (أي بعد حذف الأشارة الجبرية) هو نفسه السرعة القياسية اللحظية.
- أي أن : $u_x = |v_x|$

- **إذن: السرعتان المتجهة اللحظية والقياسية اللحظية متساويتان مقدارا**

- **من الآن وصاعدا فسوف نستخدم كلمة (سرعة) velocity ونقصد فيها السرعة اللحظية، ما لم يرد خلاف ذلك، وكذلك الحال مع السرعة اللحظية القياسية: السرعة القياسية (نقصد بها اللحظية ما لم يرد خلاف ذلك).**

أمثلة تطبيقية على السرعة اللحظية والسرعة القياسية



- **مثال 2.2:**
- جسيم يتحرك وفق العلاقة: $x = -4t + 2t^2$ حيث x بالأمتار و t بالثواني. كما هو مبين في الشكل.
- (أ) أوجد الإزاحة للجسيم خلال الفترة الزمنية: t= 0 to t= 1 s وكذلك الفترة الزمنية: t= 1 s to t= 3 s

- **الحل:**
- نبدأ بالحل من كتابة معادلة الإزاحة:

$$\Delta x_{A-B} = x_B - x_A$$

إذن نحتاج إلى حساب قيمة x_A عند الزمن 0 s ثم قيمة x_B عند الزمن 1 s

أمثلة تطبيقية على السرعة اللحظية والسرعة القياسية

$$\because \Delta x_{A\to B} = x_f - x_i = x_B - x_A \quad (1)$$

$$\because x(t) = -4t + 2t^2 \quad (2)$$

$$\therefore x_A = x(0) = -4(0) + 2(0) = 0m \quad (3)$$

$$x_B = x(1) = -4(1) + 2(1) = -2m \quad (4)$$

$$\therefore \Delta x_{A\to B} = x_B - x_A = -2 - 0 = -2m \quad (5)$$

$$\because \Delta x_{B\to D} = x_f - x_i = x_D - x_B \quad (6)$$

$$x_D = x(3) = -4(3) + 2(9) = 6m \quad (7)$$

$$\therefore \Delta x_{B\to D} = x_D - x_B = 6 - (-2) = 8m \quad (8)$$

- لاحظ من الحل على اليسار أننا قمنا بالتعويض عن قيم الزمن عند كل محطة مطلوبة.
- أي أنه عند كل لحظة زمنية مطلوبة نستخدم المعادلة المعطاة، ومنها نحسب قيم موقع القسم عند كل زمن بالتعويض في المعادلة، ثم نطرح قيمة الموقع الابتدائي من قيمة الموقع النهائي لنحصل على الإزاحة أثناء تلك الفترة الزمنية.
- **لاحظ أن قيم الإزاحات يمكن قراءتها مباشرة من الرسم**

أمثلة تطبيقية على السرعة اللحظية والسرعة القياسية

• **مثال 2.2:**

• (ب) أحسب متوسط السرعة للجسيم خلال الفترة الزمنية: t= 0 to t= 1 s وكذلك الفترة الزمنية: t= 1 s to t= 3 s

(استخدم نفس النتائج التي حصلت عليها في الفقرة السابقة.

• في الحل المبين على اليسار قمنا أولا بكتابة المعادلة المستخدمة ثم بدأنا بالتعويض عن المطلوب.

• في (9) لأن الجسم يتحرك بالاتجاه السالب صارت السرعة سالبة.

• إذن متوسط السرعة متغير بحسب المرحلة المطلوبة.

$$\because \bar{v}_{x(A\to B)} = \frac{\Delta x_{A\to B}}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{\Delta t}$$

$$= \frac{-2\,m}{1\,s} = -2\,m/s \qquad (9)$$

$$\because \bar{v}_{x(B\to D)} = \frac{\Delta x_{B\to D}}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{x_D - x_B}{\Delta t}$$

$$= \frac{8\,m}{2\,s} = +4\,m/s \qquad (10)$$

أمثلة تطبيقية على السرعة اللحظية والسرعة القياسية

- **مثال 2.2:**
- **(ج) أحسب السرعة اللحظية للجسيم عند اللحظة الزمنية t = 2.5 s .**

- أولا: كتبنا معادلة الموقع كدالة في الزمن
- ثم استخدمنا المعادلة الصحيحة للسرعة اللحظية، وقمنا بالاشتقاق نسبة للزمن
- ثم عوضنا بالزمن المعطى، وحصلنا على النتيجة.
- **ملحوظة: حاول حساب هذه السرعة مباشرة من الرسم البياني السابق**

$$\because x = -4t + 2t^2$$

$$or \quad x(t) = -4t + 2t^2$$

$$\because v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -4 + 4t$$

$$\therefore v_x(2.5) = -4 + 4(2.5)$$

$$= -4 + 10 = 6\, m/s$$

ملاحظة مهمة: هل تذكر كم قيمة السرعة اللحظية عند القيم العظمي والدنيا للمنحنيات؟ احسب السرعة اللحظية عند النقطة B في الشكل السابق باستخدام نفس الطريقة في فقرة (ج) أعلاه وتأكد أن السرعة فعلا تساوي 0.

التسارع Acceleration

- ربما عرفنا من كل ما سبق أن التغير في موقع الجسم خلال فترة زمنية معينة يقود إلى وجود حركة للجسم (سرعة)
- فماذا عن التغير في السرعة نفسها؟ أي ماذا نقول عن وصف حركة جسم يتحرك بسرعة متغيرة مع الزمن؟
- إن هذا يقودنا لإدخال كمية جديدة نسميها: التسارع Acceleration .
- سوف نستخدم مقارنة بسيطة كما في الجدول:

تغير في السرعة Δv	التغير في الزمن Δt	تغير في الموقع Δx
$\Delta v = v_f - v_i$		$\Delta x = x_f - x_i$
$\bar{a}_x = \Delta v / \Delta t$	متوسط *Average*	$\bar{v}_x = \Delta x / \Delta t$
$a_x = dv/dt$	لحظي *Instantaneous*	$v_x = dx/dt$

التسارع Acceleration

- إذن يمكننا كتابة معادلة **متوسط التسارع** كما يلي:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad (2.5)$$

- وكما في السرعة، فالتسارع أيضا يحظى بثلاثة احتمالات تتعلق بالإشارة:
- **تسارع موجب**: السرعة تتزايد في اتجاه +x (تسارع: *Acceleration*)
- **تسارع سالب**: السرعة تتناقص (تباطؤ *Deceleration*)
- **تسارع يساوي الصفر**: السرعة ثابتة مع الزمن *Constant velocity*

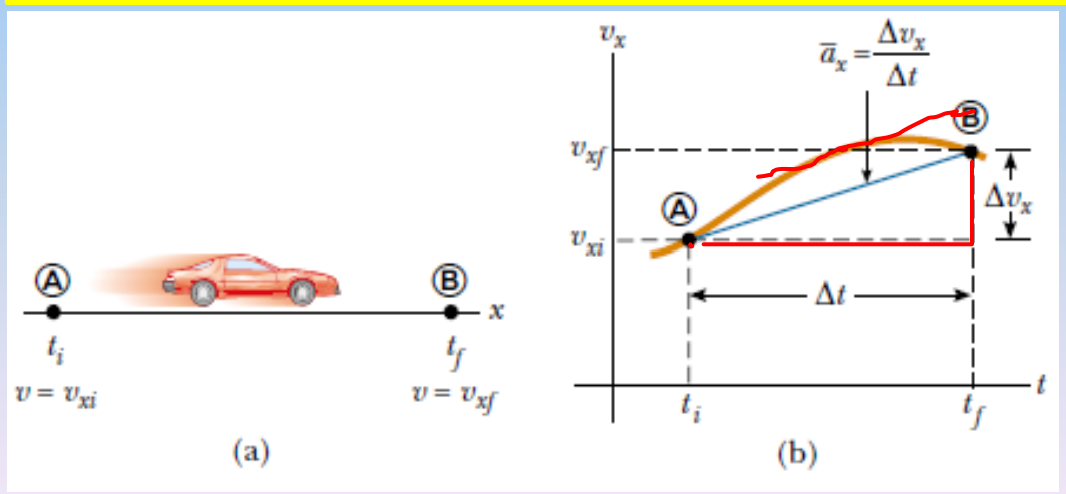
- كما في السرعة ومتوسط السرعة، فأن التسارع ليس ثابتا بل يتغير زيادة ونقصانا خلال الحركة، ولنفس المبررات السابقة فأننا نحتاج إلى حساب التسارع اللحظي.

التسارع Acceleration

• بنفس طريقة حساب السرعة اللحظية، فأننا نتصور أن الفترة الزمنية Δt تقترب من الصفر وبالتالي:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.6)$$

• إذن عندما نعطى معادلة للموقع مقابل الزمن (كما في المثال السابق 2.2) فأننا نقوم بالاشتقاق أولا لحساب السرعة ثم نشتق مرة ثانية لحساب التسارع.



• في الشكل: ميل المنحنى للفترة من A إلى B يعطي متوسط التسارع، في حين أن ميل مماس المنحنى في اية لحظة زمنية يعطي التسارع

التسارع Acceleration

• لاحظ أننا يمكن أن نكتب المعادلة 2.6 أعلاه بطريقة ثانية. فحيث أن v_x نفسها مشقة للموقع بالنسبة للزمن فأن:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.7)$$

• **كويز**: في المثال 2.2 فقرة (ج): احسب التسارع عند نفس الزمن 2.5 s؟

• **الحل**: تم توضيح الحل علي اليسار.

1. قمنا بالاشتقاق وحصلنا على السرعة كدالة في الزمن،
2. ثم قمنا باشتقاق المعادلة الناتجة مرة ثانية، فحصلنا على التسارع كدالة في الزمن،
3. ثم قمنا بالتعويض عند الفترة المطلوبة.
4. **لاحظ أن التسارع الناتج ثابت = 4 m/s^2 لأنه ليس دالة في الزمن.**

$\because \; x = -4t + 2t^2$

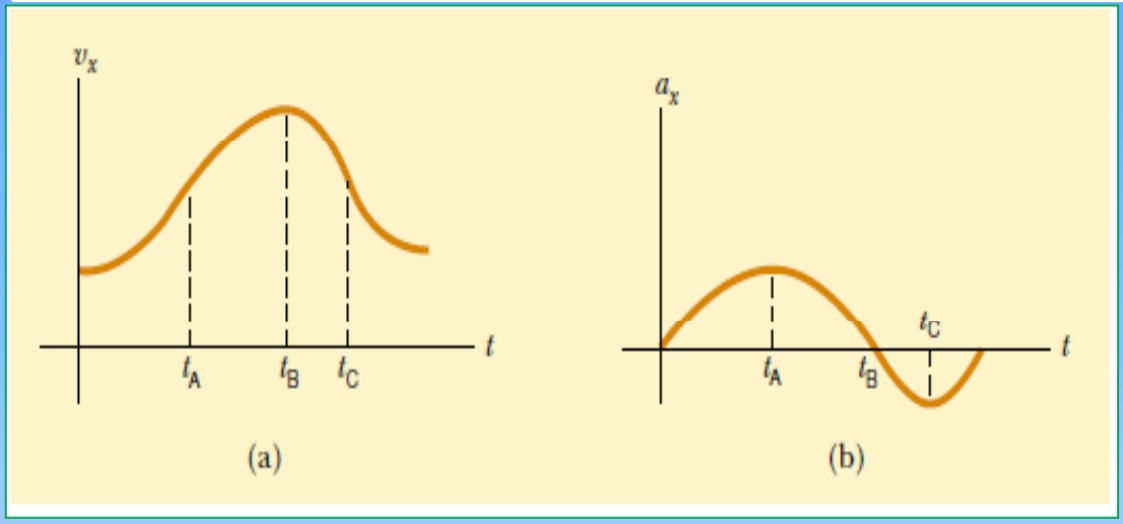
$or \quad x(t) = -4t + 2t^2$

$\because \; v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -4 + 4t$

$\because \; a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 + 4$

$\Rightarrow a_x(2.5\ s) = 4\ m/s^2$

Acceleration التسارع



• يمكننا أيجاد قيم التسارع اللحظي باستخدام الشكل v_x-t من قراءة الميل.
لاحظ الأزمنة المعطاة في (a) وما يقابلها من قيم التسارع في (b) .

ملاحظات:

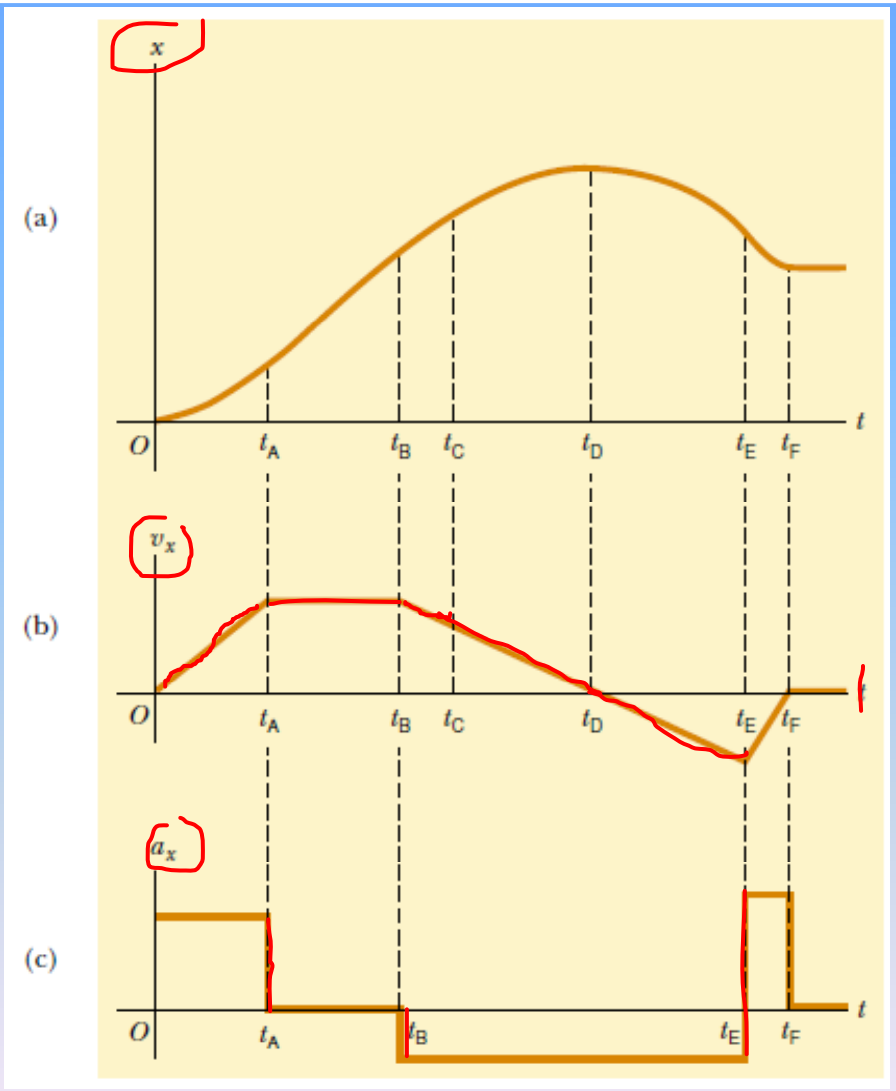
1. كانت قيمة التسارع $a_x = 0$ عند بداية الحركة وكذلك عندما كانت $v_x = max$
2. التسارع يتزايد حتى النقطة t_A ثم يبدأ بالتناقص بسبب انحراف الميل إلى اليمين.
3. مقدار التسارع يتناقص ابتداء من نقطة t_A حتى الوصول إلى لصفر عند t_B. ($v_x = max$)
4. لاحظ أن التسارع موجب ابتداء من أول الحركة وحتى t_A ثم يصبح سالبا حتى الوصول إلى نقطة t_C ثم يعكس إشارته ويصبح موجبا.
5. من المهم أن نعلم أن التسارع السالب يؤدي إلى تباطؤ أولا ثم حركة بالاتجاه السالب أخيرا.

مفهوم أشارة التسارع + أم - ؟

- **كويز سريع**: كم قيمة تسارع الجاذبية الأرضية في الحالات التالية:
  1. عندما يكون الجسم في حالة صعود (مقذوف إلى أعلى)
  2. عندما يتوقف الجسم في أعلى نقطة يصل إليها؟
  3. عندما يبدأ الجسم بالعودة باتجاه الأرض؟

- **الحل**: دائما $g = -9.8\ m/s^2$.

مثال توضيح للمفاهيم الأساسية لعلاقات الموقع، السرعة والتسارع



- بحسب الشكل المبين نلاحظ الجزء (a) يوضح تغير الموقع مقابل الزمن.
- الجزء (b) يبين تغير السرعة مقابل الزمن
- الجزء (c) يوضح تغير التسارع مقابل الزمن لنفس الجسم.
- **سؤال: لماذا تبدو قيم التسارع مختلفة عند: t_A و t_B و t_E و t_F؟**

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 4

مثال توضيح للمفاهيم الأساسية لعلاقات الموقع، السرعة والتسارع

- **مثال**: يتحرك جسم ما بسرعة وفق العلاقة التالية: $v_x=(40-5t^2)$ m/s على طول محور x .
- (أ) احسب متوسط التسارع خلال الفترة الزمنية t = 0 to t= 2.0 s.

- **الحل**: تم توضيح الحل علي اليسار.
1. كتابة المعادلة المطلوبة
2. التعويض في الكميات الداخلة في المعادلة
3. حساب المطلوب النهائي.

نلاحظ أن متوسط التسارع سالبا.

$$\because \ \bar{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xB} - v_{xA}}{t_B - t_A}$$

$$\because \ v_x(t) = 40 - 5t^2$$

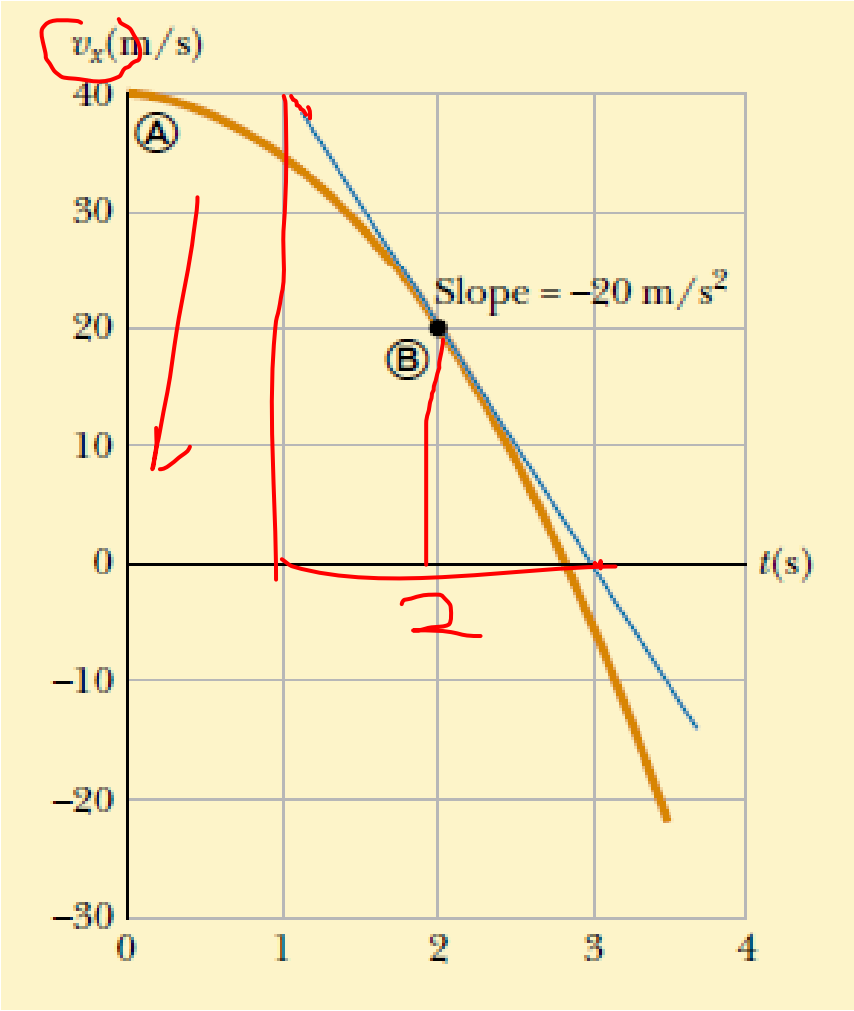
$$\therefore \ v_{xB} = v_x(2) = 40 - 5(4) = 20 \ m/s$$

$$and \ \ v_{xA} = v_x(0) = 40 - 5(0) = 40 \ m/s$$

$$\Rightarrow \ \bar{a}_x = \frac{20 - 40}{2 - 0} = -10 \ m/s^2$$

- (ب) احسب التسارع عند اللحظة الزمنية t = 2 s.

مثال توضيح للمفاهيم الأساسية لعلاقات الموقع، السرعة والتسارع



$$\because\ v_x(t) = 40 - 5t^2$$

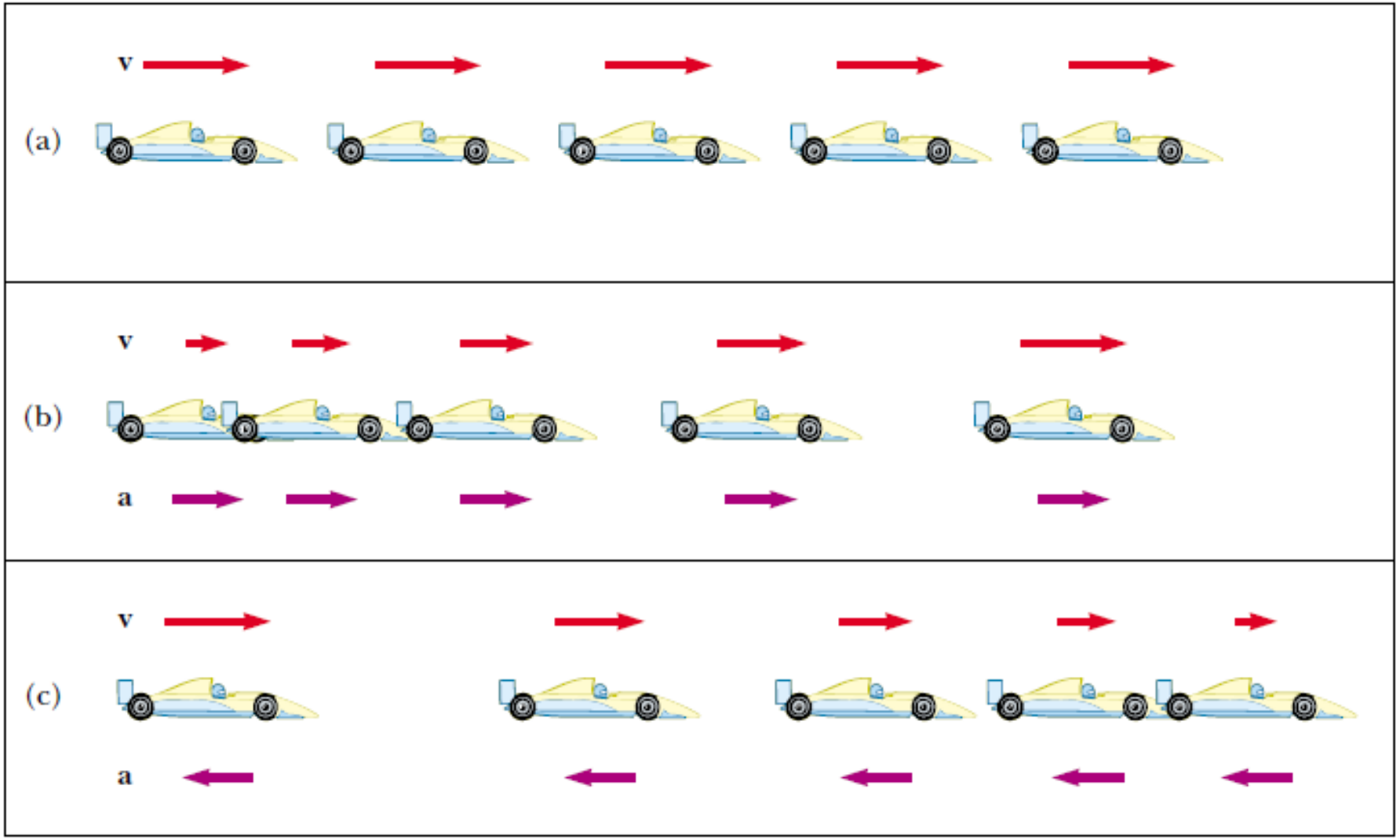
$$\because\ a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\Rightarrow a_x(t) = -10\,t$$

$$\therefore\ a_x(2) = -10\,(2) = -20\ m/s^2$$

- **الحل**: تم توضيح الحل في الأعلى.
- لاحظ أن التسارع اللحظي مختلف عن متوسط التسارع المعطى في الفقرة السابقة. وهذا يؤكد أهمية استخدام التسارع اللحظي وليس متوسط التسارع.

الأشكال التوضيحية للحركة Motion Diagrams



الحركة في بعد واحد وبتسارع ثابت *1-D motion at Const Acc.*

في المسائل ذات التسارع المتغير مع الزمن، يصبح الحل معقدا وصعبا، وسوف نقتصر هنا على الحالات التي يكون فيها التسارع ثابتا مع الزمن، وفي هذه الحالة نلاحظ أن التسارع اللحظي هو نفسه متوسط التسارع ولذلك فسوف نستخدم نفس معادلة متوسط التسارع ولكن بدون علامة المتوسط:

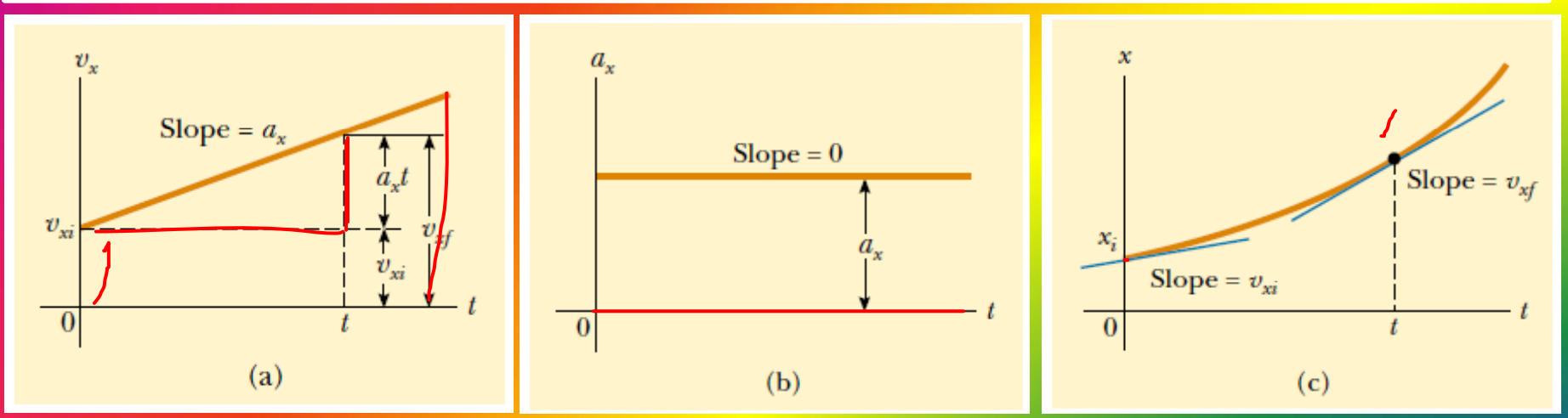
$$\because \; a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \; or \; = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t}$$

$$\Rightarrow \; v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (2.8)$$

لاحظ أن تفاضل هذه المعادلة مرة واحدة بالنسبة للزمن يعطي مباشرة معادلة التسارع اللحظي: $a_x = dv_x/dt$.

لذلك فأن رسم العلاقة بين السرعة في اتجاه x والزمن يعطي خطا مستقيما مائلا إلا في حالة كون التسارع يساوي الصفر، وميل هذا الخط يمثل التسارع، انظر الشكل القادم

الحركة في بعد واحد وبتسارع ثابت *1-D motion at Const Acc.*



شكل (a) يمثل الرسم البياني للسرعة كدالة في الزمن عندما يكون التسارع ثابتا. لاحظ أن ميل الخط يمثل التسارع.

شكل (b) يمثل الرسم البياني للتسارع كدالة في الزمن. لاحظ أنه خط مستقيم أفقي ثابت بالنسبة للزمن.

شكل (c) ويوضح الموقع بالنسبة للزمن لنفس الحركة. لو كان التسارع يساوي صفرا فأن الخط سوف يكون مستقيما مائلا. ودائما يمثل ميل المماس في اية لحظة السرعة في تلك اللحظة (السرعة اللحظية).

الحركة في بعد واحد وبتسارع ثابت. اشتقاق المعادلة الثانية للحركة

سوف نقوم باشتقاق معادلة أخرى للحركة المنتظمة.
حيث أن السرعة تتزايد بشكل منتظم وفي نفس الاتجاه، أذن (**وفي هذه الحالة فقط**) فيمكن كتابة متوسط سرعتين كما يلي:

$$\overline{v}_x = \frac{v_{xf} + v_{xi}}{2} \qquad (2.9)$$

مرة أخرى، معادلة (2.9) تصلح فقط في حالة التسارع الثابت (تسارع ليس دالة في الزمن).

نقوم الآن باشتقاق المعادلة الثالثة للحركة في خط مستقيم.
بتذكر اننا نتحدث عن الحركة عند تسارع ثابت وفي خط مستقيم، فنبدأ من المعادلة السابقة (2.2) مع استبدال Δt بـ t ونحل بذلك على المعادلة المطلوب بعد التعويض من المعادلة (2.8) أعلاه:

الحركة في بعد واحد وبتسارع ثابت. اشتقاق المعادلة الثالثة للحركة

$$\because \bar{v}_x = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} \quad (2.2)$$

$$let : \Delta t \to t \; and \; rearrange \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow x_f - x_i = \bar{v}_x t$$

$$from \; (2.9) : x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad (a = const.) \quad (2.10)$$

$$from \; (2.8) \; in \; (2.10) \; for \; v_{xf} :$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xi} + a_x t)t = \frac{1}{2}(2v_{xi}) + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$\Rightarrow x_f - x_i = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.11)$$

الحركة في بعد واحد وبتسارع ثابت. اشتقاق المعادلة الرابعة للحركة

$$\because \quad x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \qquad (2.10)$$

$$\because \quad v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (2.8)$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}$$

$$\therefore (2.10) \Rightarrow :$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xf} + v_{xi})\left[\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_f - x_i = \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$\Rightarrow \quad v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad (2.12)$$

الحركة في بعد واحد وبتسارع ثابت. تلخيص المعادلات الأربع

TABLE 2.2 Kinematic Equations for Motion in a Straight Line Under Constant Acceleration

Equation	Information Given by Equation
1 $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocity as a function of time
2 $x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$	Displacement as a function of velocity and time
3 $x_f - x_i = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	Displacement as a function of time
$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	Velocity as a function of displacement

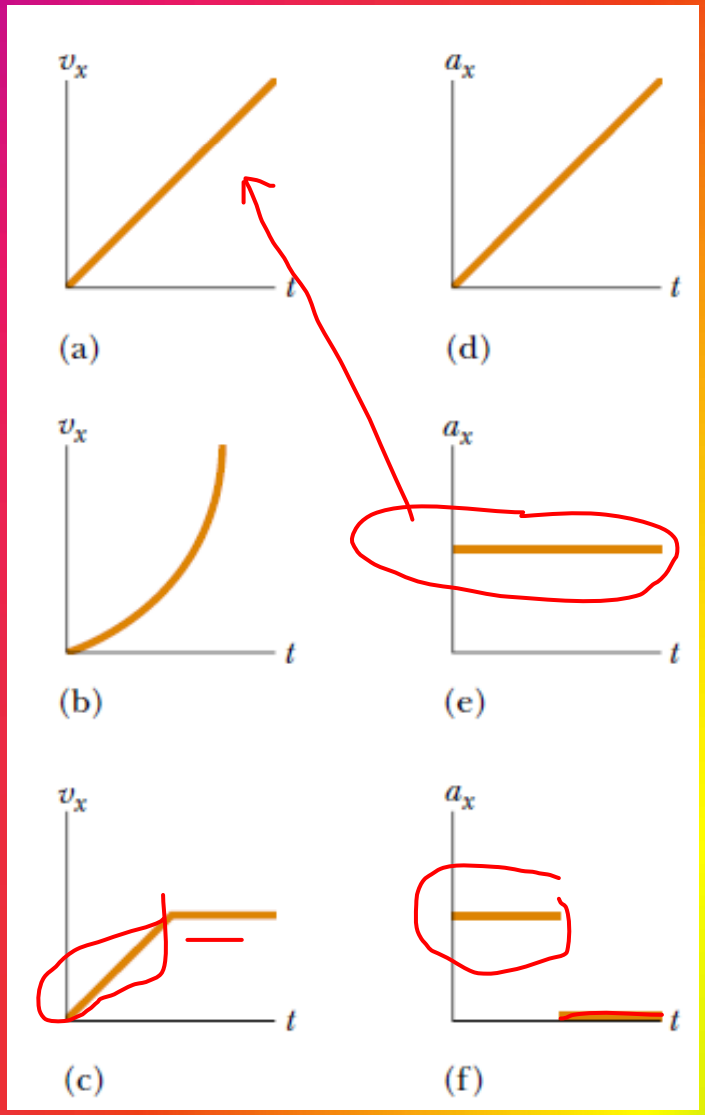
هذه المعادلات الأربع صحيحة وقابلة للتطبيق فقط في حالة كون التسارع ثابتا مع الزمن a_x = *constant* .

يمن حل أية مسائل للحركة في خط مستقيم تحت تسارع ثابت باستخدام واحدة أو أكثر من هذه المعادلات.

يطلق على الحركة التي تتسم بهذه السمات: **الحركة المنتظمة**.

للتسهيل، يمكن جعل x_i في المعادلات 3 و 4 صفرا إلا إذا لزم الأمر غير ذلك.

كويز توضيحي



كويز: الشكل المجاور يعرض ثلاث صور مختلفة من أشكال السرعة – الزمن $v_x - t$ معلمة بالحروف: (a), (b) and (d) على الترتيب.
ويوجد كذلك ثلاث رسومات للتسارعات المقابلة لهذه السرعات ولكن مخلوطة.
المطلوب: اختيار شكل التسارع الصحيح المقابل لكل رسم سرعة – زمن.

حل الكويز:

(a) يقابله (e) والسبب أن منحنى السرعة صاعد بشكل منتظم، أي أن التسارع ثابت مع الزمن

(b) يقابله (d) والسبب أن منحنى السرعة يزداد انحناء مع الزمن (التسارع متغير مع الزمن)

(c) يقابله (f) هناك تسارع ثابت ثم يساوي الصفر

مثال تطبيقي 2.7

مثال: 2.7

تقوم طائرة حربية نفاثة بالهبوط على ظهر حاملة طائرات بسرعة مقدارها 63 m/s .

(أ) ما هو تسارع الطائرة إذا علمت بأنها تتوقف خلال فترة 2 s .

(ب) احسب إزاحة الطائرة أثناء عملية التوقف على ظهر البارجة.

الحل: نقوم أولا بكتابة المعطيات، ثم نقوم بكتابة المطلوب، ثم نقوم بالحل:

$$v_{xi} = 63 m/s, v_{xf} = 0 m/s, t = 2 s$$.

$$(a)\ find\ \ a_x \quad (b)\ find\ \ \Delta x$$

$$(a)\ from\ : v_{xf} = v_{xi} + a_x t \Rightarrow a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} = \frac{0 - 63\ m/s}{2\ s} = -31.5\ m/s^2$$

$$(b)\ from\ :\because\ x_f - x_i = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = \frac{1}{2}(63 + 0)2 = 63\ m$$

$$or\ \ from\ : x_f - x_i = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (63)(2) + 0.5(-31.5)(4)$$

$$= 126 - 63 = 63\ m$$

مثال تطبيقي 2.8

مثال: 2.8 : تتحرك سيارة بسرعة ثابتة مقدارها 45 m/s ومرت بالقرب من دورية المرور. بعد مرور ثانية وحدة فقط، تحركت سيارة الدورية للامساك بالسيارة حيث كان تسارع سيارة الدورية هو $3.0\ m/s^2$.

كم الزمن اللازم للوصول للسيارة المسرعة؟

الحل: حيث أن تسارع سيارة الدورية يتم بتسارع ثابت، فإذن هذه المسالة يمكن حلها باستخدام معادلات الحركة المنتظمة.

وحيث أن $v_{xf}=v_{xi}+at$ فأن سيارة المرور سوف تصل إلى سرعة 45 m/s بعد مرور:

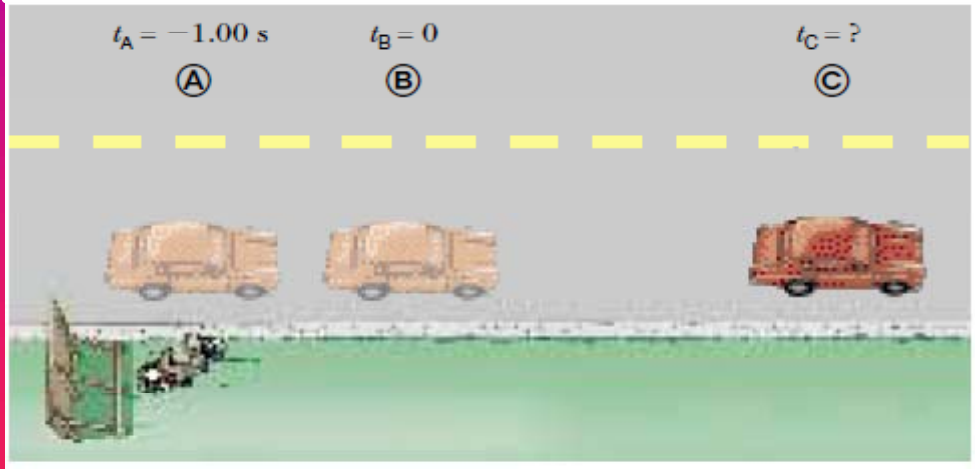
$45 = 0 + 3.0\ (t)$ وبالحل نجد أن ذلك الزمن يساوي 15 ثانية إضافة إلى الثانية قبل التحرك (أي 16 ثانية).

ولكن خلال هذه الفترة تكون السيارة قد تحركت بعيدا عن الدورية.

إذن تحتاج الدورية أن تواصل تسارعها من أجل اللحاق بالسيارة.

من أجل الحل: سوف نقوم بالرمز للسيارة بـ B والدورية: A ومكان الالتقاء C، ونعتبر أن موقع الدورية يمثل النقطة 0 على محور السينات.

مثال تطبيقي 2.8



لاحظ أنه بعد مرور ثانية واحدة في البداية وقبل تحرك الدورية قطعت السيارة مسافة 45 m بالضبط.

$$v_{xB} = 45\ m/s\ , a_x = 0\ m/s^2\ , v_{xiA} = 0\ m/s, a_{xA} = 3.0\ m/s^2$$

$$t_B = 0\ s\ , t_A = -1.0\ s\ , t_c = ?\ \ [At\ 0\ m\ on\ x-axis\ ]$$

After t_c the car is at : $x_B = 45 + 45\,t_c$ (1)

After t_c the plice car is at : $x_{fA} = x_{iA} + v_{xiA}\,t_c + \frac{1}{2}\,a_{xA}\,t_c^{\,2}$ (2)

$\because x_{fA} = x_B \rightarrow x_{iA} + v_{xiA}\,t_c + \frac{1}{2}\,a_{xA}\,t_c^{\,2} = 45 + 45\,t_c$

$\rightarrow 0 + 0 + \frac{1}{2}(3)t_c^{\,2} = 45 + 45\,t_c \Rightarrow 1.5t_c^{\,2} - 45\,t_c - 45 = 0$

Solving : $t_c = 31\ s$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 5

Freely Falling Objects السقوط الحر للأجسام

- يعرف السقوط الحر للأجسام بأنه حركة الأجسام بشكل حر تماما تحت تأثر الجاذبية الأرضية فقط. أي بإهمال أثر الهواء، وعدم وجود قوة محركة أخرى للأجسام سوى قوة الجاذبية الأرضية.
- أن الأجسام التي تتحرك إلى أعلى أو أسفل أو مقذوفه بزاوية معينة، تظل كلها تتمتع بالحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية، وتنطبق عليها قوانين السقوط الحر، ولكن فقط في حركتها الرأسية.

- بما أن الحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية هي حركة منتظمة تتم بتسارع ثابت مقداره $g = 9.8\ m/s^2$ فيمكننا إذن استخدام نفس المعادلات السابقة للحركة المنتظمة.
- ولكن مع التعديلات التالية:

$$a \rightarrow g = -9.8\ m/s^2$$

$$v_x \rightarrow v_y : + \text{ when } \uparrow \text{ and } - \text{ when } \downarrow$$

$$x \rightarrow y : + \text{upeve firing Levl}, - \text{below firing Level}$$

السقوط الحر للأجسام معادلات الحركة الرأسية الحرة

- إذن نعيد كتابة المعادلات السابقة كما يلي (الثلاث الرئيسية):

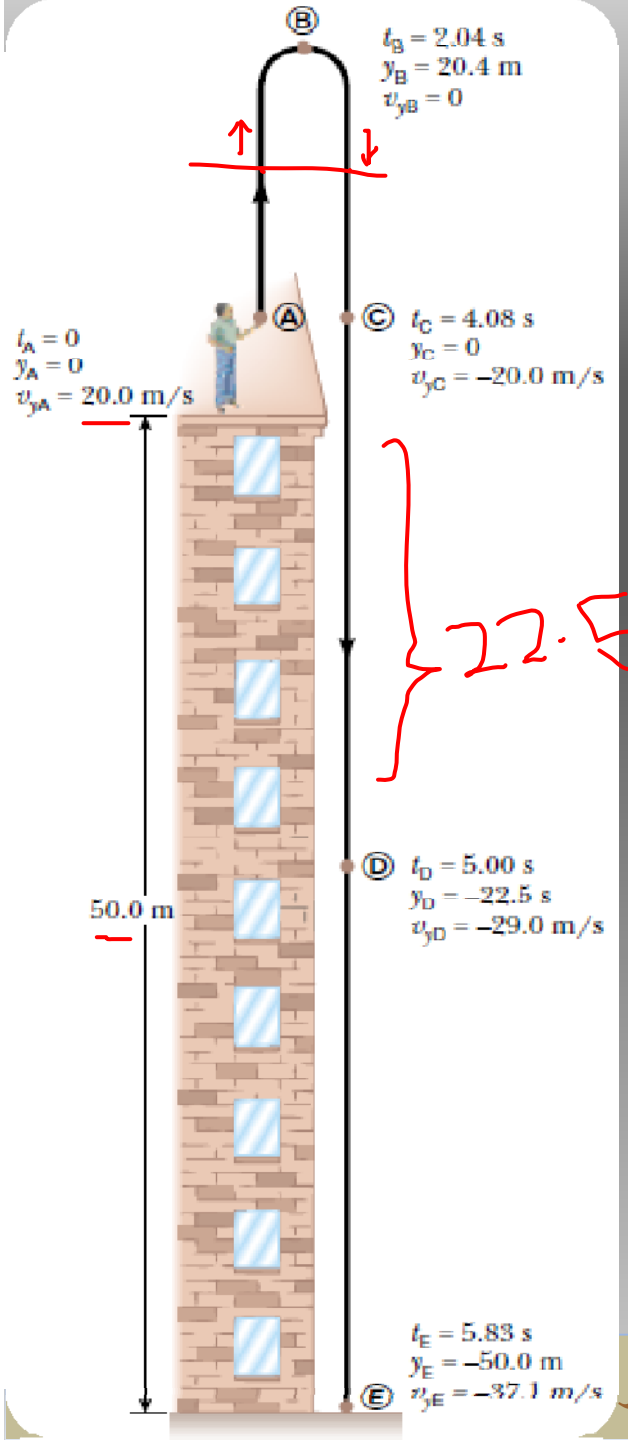
$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t \quad (1)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2 \times 9.8 y_f \quad (2)$$

$$y_f = v_{yi} t - 0.5 * 9.8 t^2 \quad (3)$$

- يمكن حل جميع مسائل الحركة الرأسية الحرة باستخدام هذه المعادلات.
- لاحظ أن قيمة y سالبة تحت مستوى الإطلاق وموجبه فوقه
- ولاحظ قيمة تسارع الجاذبية الأرضية دائما سالب
- ولاحظ أن السرعة سالبة في حالة كون الجسم هابطا وموجبة عندما يكون صاعدا
- ومن المهم ملاحظة أن هذه الإشارات تفرض في حالة معرفة الوضع وتفسر في حالة ورودها في الحل.
- مثلا: لو قمنا بالحل وصارت السرعة سالبة، فهذا يدل على أن الجسم في حالة هبوط
- ولو كانت y سالبة فهذا يدل على أن الجسم يقع الآن تحت مستوى أطلاقة.

السقوط الحر للأجسام – مثال توضيحي



- **مثال: 2.12 :**
- كما في الشكل المجاور، تم رمي كرة من أعلى سطح المبنى الذي ارتفاعه 50 m بسرعة ابتدائية مقدارها 20 m/s رأسيا إلى أعلى.
أحسب الكميات التالية:
- أ – الزمن اللازم لوصول الكرة إلى أعلى ارتفاع.
- ب- الارتفاع الأقصى
- ج- الزمن اللازم لعودة الكرة إلى نفس مستوى إطلاقها
- د- سرعة الكرة عند تلك اللحظة.
- هـ- سرعة وموقع الكرة بعد 5 s.

- **الحل:**
- نلاحظ ما يلي:
- أولا: تتوقف الكرة تماما عند نقطة B وتغير اتجاهها
- عند أية نقطتين متقابلتين على مسار الكرة، السرعتان متساويتان من حيث المقدار متضادتان من حيث الاتجاه.

السقوط الحر للأجسام حل المثال التوضيحي

$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t \quad (1)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2 \times 9.8\, y_f \quad (2)$$

$$y_f = v_{yi} t - 0.5 * 9.8 t^2 \quad (3)$$

....

$Given : v_{yi} = +20\ m/s\ ,\ y_i = 0\ m$

(a) time at max. height : use eq. (1) :

$\because\ v_{yB} = 0 = +20 - 9.8t$

$\Rightarrow t = 20 / 9.8 = 2.04\ s$

(b) Max. height :use eq. (3) :

$\because\ y_i = 0\ m \Rightarrow y_B = +20(2.04) - 0.5 * 9.8(2.04)^2 = 20.04\ m$

(c) for t_A : we can just use $2.04 * 2 = 4.08$ s

or : $Eq.(3) \Rightarrow 0 = v_{yi} t - 0.5 * 9.8 t^2 \Rightarrow 0 = +20t - 0.5 * 9.8 t^2$

$\Rightarrow 0 = +20 - 0.5 * 9.8 t \Rightarrow t = 20 \div (0.5 * 9.8) = 4.08\ s$

السقوط الحر للأجسام استكمال الحل التوضيحي

$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t \quad (1)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2 \times 9.8 y_f \quad (2)$$

$$y_f = v_{yi} t - 0.5 * 9.8 t^2 \quad (3)$$

....

$$Given : v_{yi} = +20\ m/s\ ,\ y_i = 0\ m$$

$$(e) : \text{we can just use : - 20 m/s (opposite of } v_A)$$

$$or : Eq.(1) \Rightarrow v_{yf} = 20 - 9.8(4.08) = -20\ m/s \downarrow$$

$$(f)\ Eq.(1) \Rightarrow v_{yf} = 20 - 9.8(5) = -29\ m/s \downarrow$$

$$Eq.(3) \Rightarrow y_f = 20(5) - 0.5 * 9.8(5^2) = -22.5\ m$$

- لاحظ أن الموقع سالب مما يعني أن الكرة تقع الآن تحت مستوى الإطلاق.
- والسرعة -29 m/s مما يعني أنه بعد 5 ثواني تكون الكرة تتحرك باتجاه الأرض

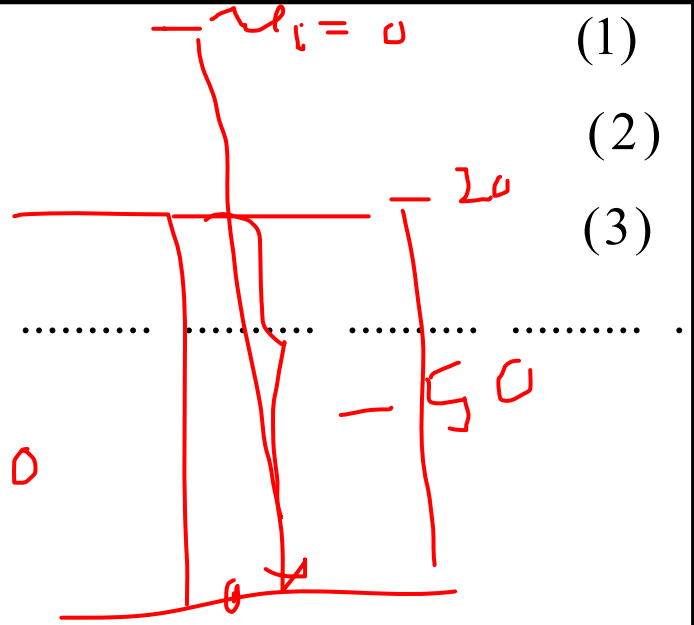
السقوط الحر للأجسام كويز على المثال السابق

- كويز:
- (أ) احسب سرعة الكرة قبيل وصولها إلى الأرض
- (ب) احسب الزمن الكلي للوصول إلى سطح الأرض.

$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t \quad (1)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2 \times 9.8 y_f \quad (2)$$

$$y_f = v_{yi} t - 0.5 * 9.8 t^2 \quad (3)$$



$(a)\ Eq.(2)\ with\ \ y_f = -50\ m \Rightarrow:$

$$v_{yf}^2 = (20^2) - 2 \times 9.8(-50) = 1380$$

$$\therefore v_{yf} = \pm\sqrt{1380} = -37.14\ m/s \downarrow$$

$(b)\ Eq.(1)\ with\ \ v_f = -37.14\ m/s \Rightarrow:$

$$-37.14 = +20 - 9.8t \Rightarrow t = (-37.14 - 20)/-9.8 = 5.83\ s$$

اشتقاق معادلات الحركة بطريقة التفاضل والتكامل

- معادلات الحركة المنتظمة التي قمنا سابقا باشتقاقها، يمكن كذلك القيام باشتقاقها بطريقة أخرى وهي باستخدام حساب التفاضل والتكامل.

$$\because a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow dv_x = a_x dt$$

Integrating both sides : $v_x = \int a_x dt \rightarrow v_x = a_x t + c_1$

finding c_1 from initial conditions : at $t = 0, v_x = v_{xi}$

$$\therefore v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (1)$$

$$\because v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x dt$$

Integrating both sides : $x = \int v_x dt = \int (v_{xi} + a_x t) dt$

$$\rightarrow x = v_{xi} t + 1/2\, a_x t^2 + c_2$$

finding c_2 from initial conditions : at $t = 0, x = x_i$

$$\therefore x_f = x_i + v_{xi} t + 1/2\, a_x t^2 \text{ or } : x_f - x_i = v_{xi} t + 1/2\, a_x t^2 \qquad (2)$$

اشتقاق معادلات الحركة بطريقة التفاضل والتكامل

- المعادلة الثالثة يمكن الحصول عليها من التعويض عن t من معادلة (1) في (2) ثم القيام بعمليات ضرب الحدود:

$$\because v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (1)$$

$$\therefore t = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}$$

$$\Rightarrow x_f - x_i = v_{xi}\left[\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right] + \frac{1}{2}a_x\left[\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right]^2$$

$$= \frac{2v_{xi}(v_{xf} - v_{xi})}{2a_x} + \frac{1}{2}a_x\frac{(v_{xf} - v_{xi})^2}{a_x^2}$$

$$\Rightarrow 2a_x(x_f - x_i) = 2v_{xi}v_{xf} - 2v_{xi}^2 + v_{xf}^2 + v_{xi}^2 - 2v_{xi}v_{xf}$$

$$= v_{xf}^2 - v_{xi}^2$$

$$\Rightarrow v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad (3)$$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء و الفلك

مقرر 210 فيز

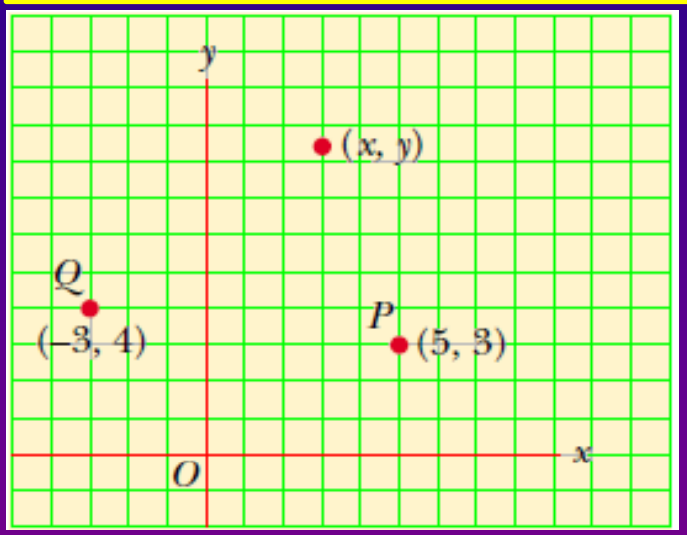
د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 6

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.1 نظام الإحداثيات

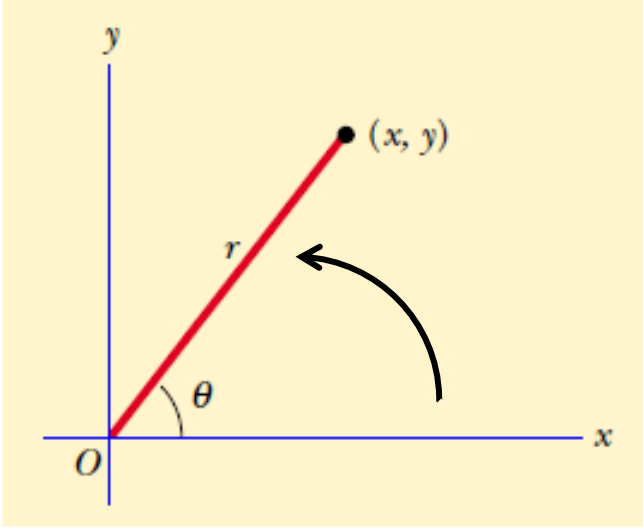
- يتم التعبير عادة عن مواقع الأجسام باستخدام نظم تسمى نظم الإحداثيات. ومن هذه النظم ما يلي:
- 1- نظام الإحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinates (x,y)
- 2- نظام الإحداثيات القطبية Polar Coordinates (r,θ)



- على اليسار: يتم التعبير عن موقع أية نقطة في المستوى x-y باستخدام نقطة من أحداثيين: (x,y)
- مثلا نقطة P تقع عند: (5,3) بينما Q عند: (-3,4)
- ومعنى ذلك أن نقطة P تبعد عن نقطة الأصل بـ 5 وحدات على محور x و 3 وحدات على محور y.
- لاحظ أشارة (-) عندما تكون النقطة على يسار نقطة الأصل وكذلك عندما تكون تحتها بالنسبة لمحور y.

- يمكن وصف نفس النقاط باستخدام نظام الإحداثيات القطبية Polar Coordinates (r,θ)
- كما يمكن التحويل بن النظامين باستخدام معادلات رياضية كما سوف نبين بعد قليل.
- سوف يتم استخدام النظامين في نفس الوقت بحسب الحاجة خلال هذا المقرر أن شاء الله.

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.1 نظام الإحداثيات القطبية



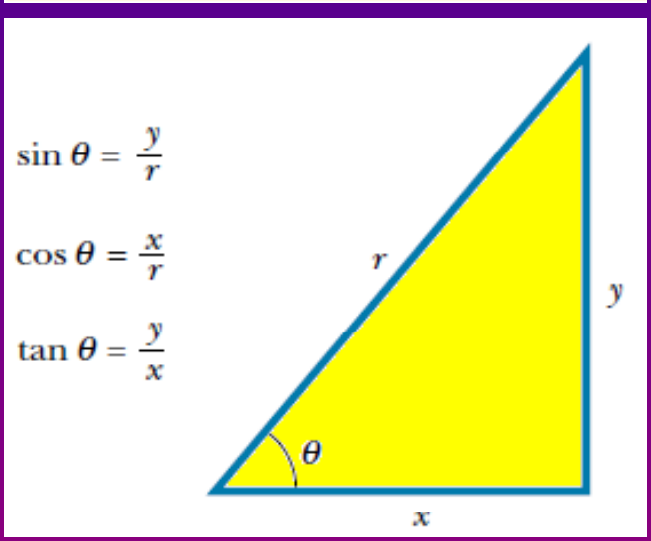
• كما في الأشكال المجاورة، تم التعبير عن الموقع بدلا من (x,y) باستخدام أحداثي r يبين المسافة بين المركز والنقطة وكذلك باستخدام زاوية قطبية هي θ .
• للتحويل بين النظامين يمكن استخدام حساب المثلثات:

$$x = r\cos\theta \qquad (3.1)$$

$$y = r\sin\theta \qquad (3.2)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (3.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3.4)$$

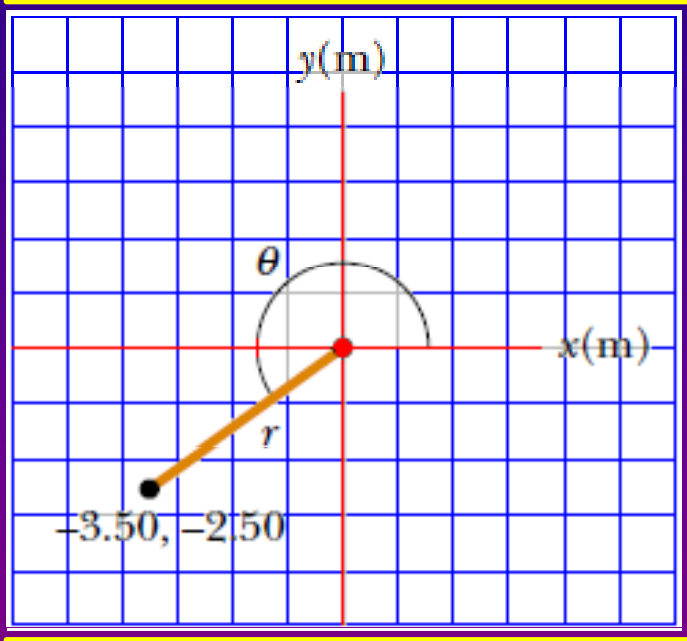


• لاحظ أن الزاوية θ تقاس بالنسبة لمحور x وباتجاه ضد عقارب الساعة دائما . ويجب وضع القيمة الحقيقية لكل من x و y بما في ذلك الإشارات الجبرية.

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.1 نظام الإحداثيات: مثال للتوضيح

• مثال 3.1 الإحداثيات القطبية:

• إذا علمت بأن الإحداثيات الكارتيزية لنقطة ما في الفراغ هي: (x,y) = (-3.5, -2.5) كما هو مبين في الشكل، فاحسب الإحداثيات القطبية المعادلة لها.



$$\because r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-3.5^2) + (-2.5^2)}$$

$$= 4.3\,m$$

.

$$\because \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.5}{-3.5} = 0.714$$

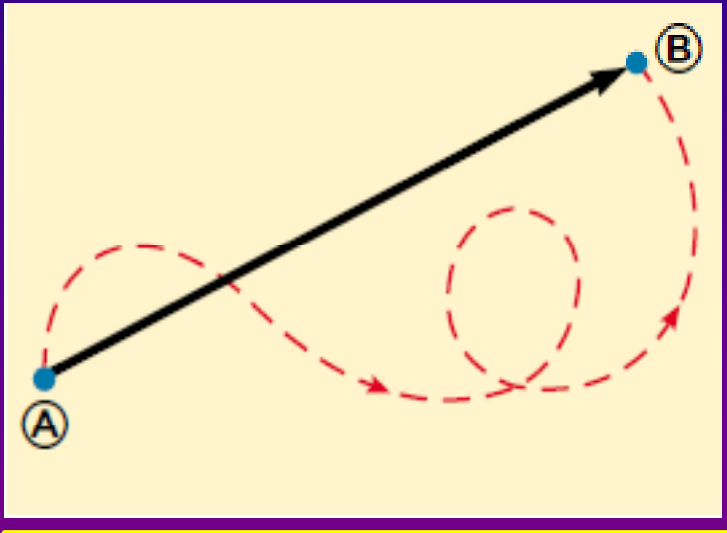
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} 0.714 = 216^o$$

• لاحظ أهمية الاحتفاظ بالإشارات في الكميات الداخلة في المعادلات السابقة. بحسب الزاوية التي وصلنا إليها، فنحن في الربع الثالث.

• وكان من المفروض أن نتوقع هذه الزاوية حيث أن قيمة كل من x و y سالبة.

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.2 الكميات المتجهة والكميات القياسية

- سبقت الإشارة إلى الفرق بين الكميات المتجهة والقياسية.
- الكمية المتجهة لها مقدار + اتجاه
- الكمية القياسية لها مقدار فقط.



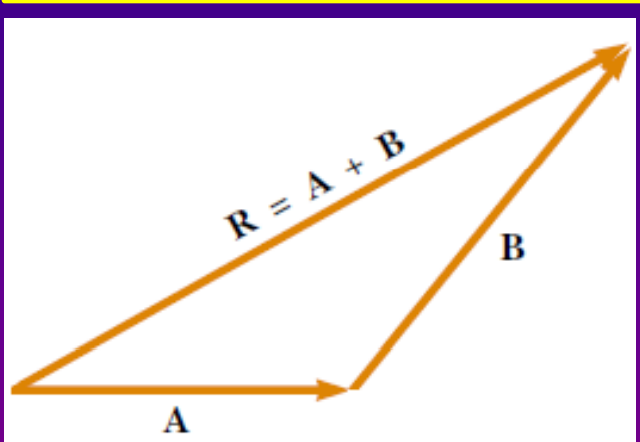
Vectors	Scalars
Displacement, Δx	Speed, u
Velocity, **V**	Distance, d
Acceleration, **a**	Temperature, T
Force, **F**	Density, ρ
Torque, τ	Time, t

- في الشكل المرفق: لاحظ الفرق الكبير بين الكميات المتجهة والقياسية. طول الخط الأحمر يمثل المسافة وهي كمية قياسية، في حين أن المسافة المباشرة بين نقطتي *A* و *B* مضافا لها الاتجاه تمثل الإزاحة.
- هناك فرق كبير بين أن يكون رأس السهم عند نقطة *B* أو عند نقطة *A* .

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.3 تساوي المتجهين وجمع المتجهات

- **تساوي متجهين Equality of Two Vectors :**
- هناك شرطان لتساوي المتجهين **A** و **B** أي لتحقق: **A = B** هما:
- 1- يجب أن يكون مقدار **A** = مقدار **B** أي: **|A|=|B|**
- 2- يجب أن يكون اتجاه **A** هو نفسه اتجاه **B** .

- **جمع متجهين أو أكثر Adding Vectors :**
- هناك ثلاث طرق على الأقل لجميع المتجهات، طريقتان هندسيتان وأخرى حسابية.
- الطريقتان الهندسيتان هما:
- **أولا: طريقة المثلث:**
- وفكرتها أن تقوم برسم المتجه الأول على رسم بياني ومن نهايته تقوم برسم المتجه الثاني، ثم تقوم بأقفال المثلث بمتجه يبدأ من ذيل المتجه الأول وينتهي عند رأس الثاني.



- حاصل جمع المتجهين هو ***R***
- وتسمى هذه الكمية: المحصلة
- إذن المحصلة كمية متجهة وهي تشبه الإزاحة تماما.

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.3 خاصية التبديل والمصاحبة في الجمع

- **جمع متجهين أو أكثر Adding Vectors :**
- **ثانيا: طريقة أكمال المتوازي:**
- وهي لا تختلف كثيرا عن الأولى حيث يتم رسم المتجه الأول على ورق رسم بياني، ومن ذيل هذا المتجه يتم رسم المتجه الثاني، ثم نقوم بإكمال المتوازي، وقطر هذا المتوازي الواصل بين ذيلي المتجهين والزاوية المقابلة يمثل المحصلة.

- **قانون التبديل في الجميع commutative law of addition:**
- **المقصود هو أن: A + B = B + A**

- **قانون المصاحبة في الجميع Associative law of addition:**
- **المقصود هو أن: A + (B+C) = (A+B) + C**

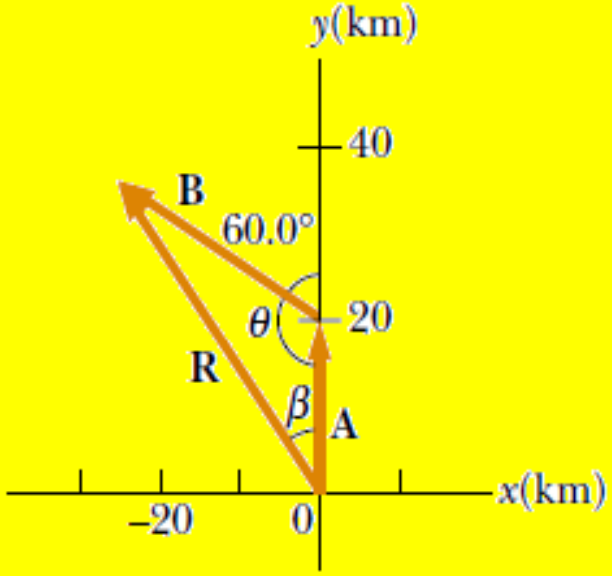
- **متجه أمامه أشارة سالب Negative of a Vector:**
- هو متجه يحمل نفس مواصفات المتجه الأصلي ولكن بالاتجاه المعاكس. لاحظ أن جمع متجه **A** ونفس المتجه بإشارة سالب يعطي صفرا: **A + (-A)= 0**

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.3 خاصية طرح المتجهات Subtracting Vectors

- **طرح متجهين أو أكثر Subtracting Vectors :**
- نفس طريقة الجمع ولكن أحد المتجهين يحمل أشارة سالب (معكوس)
- أي أن: **A – B = A + (-B)**

- **مثال:**
- تتحرك سيارة باتجاه الشمال لمسافة 20 km ، ثم 35 Km باتجاه الشمال الغربي وبزاوية 60º مع الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.

- **مثال:**
- تتحرك سيارة باتجاه الشمال لمسافة 20 km ، ثم 35 Km باتجاه الشمال الغربي وبزاوية 60º مع الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.



- **الحل:**
- يمكن القيام بالحل بطريقتين: الثانية سوف نؤجلها حتى نتحدث عن مركبات المتجه.

- بما أن المثلث الناتج هو مثلث منفرج الزاوية
- إذن نطبق العلاقة التالية:

$$\because R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20^2) + (35^2) - 2(20)(35)\cos 120} = 48.2\,km$$.

for direction of R, we use the rule of Sines :

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{R}$$

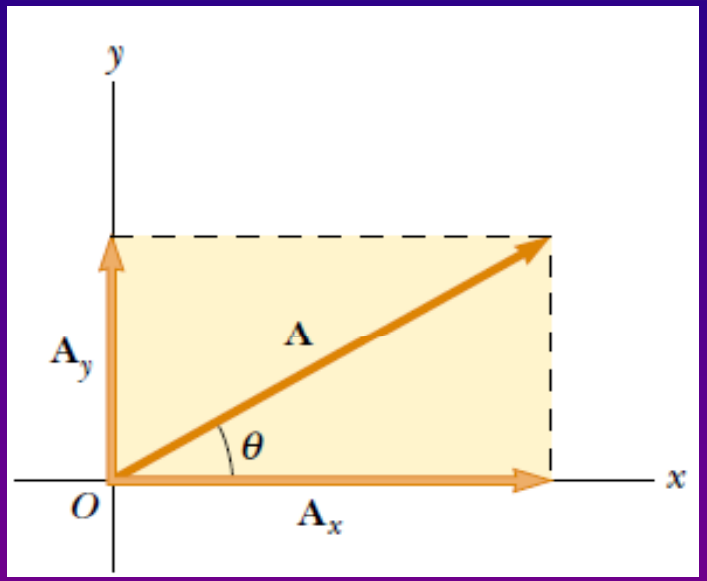
$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35\,km}{48.2\,km}\sin 120 = 0.629$$

$$\Rightarrow \beta = \sin^{-1}(0.629) = 38.9^o$$

- عندما نستعرض مركبات المتجه، سوف نقوم بإيجاد الزاوية بطريقة ثانية

الفصل الثالث: Chapter 3: Vectors المتجهات
3.4 مركبات المتجه Components of a Vector

• سوف تبدو الأمور أسهل كثيرا عندما نبدأ في استخدام مركبات المتجهات وكذلك وحدات المتجهات، لأنها سوف تمكننا من التعامل الحسابي مع المتجهات.



• في الشكل المجاور، هناك متجه هو ***A*** موجود في المستوى x-y ويعمل زاوية ϑ مع محور x .
• سبق وأن تحدثنا عن جمع المتجهات. ونلاحظ من الرسم ان المتجه ***A*** هو في الحقيقة مجموع المتجهين: A_x و A_y.
• ونفس ما قلناه عن العلاقة بين الأحداثيات الكارتزية والقطبية ينطبق هنا حيث:

$$\vec{A}_y = \vec{A}\sin\theta \qquad \vec{A}_x = \vec{A}\cos\theta$$

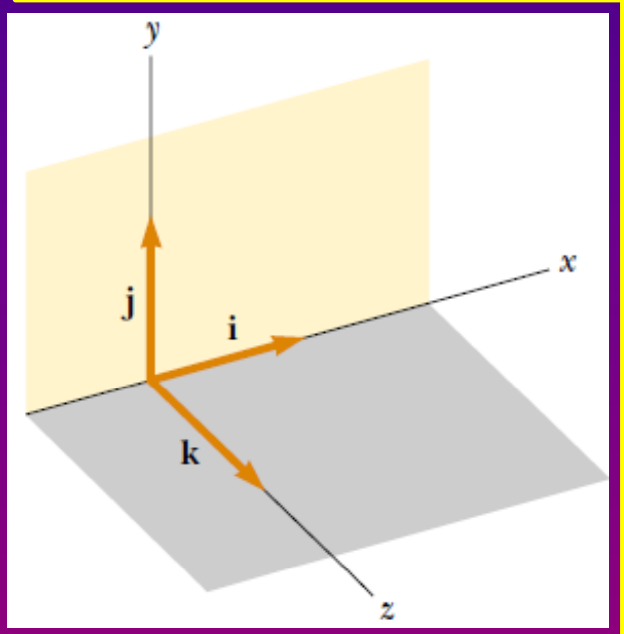
$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y}$

نسمي كلا من $\mathbf{A_x}$ و $\mathbf{A_y}$ مركبات المتجه **A**. لاحظ أن هذه المركبات متجهات بحد ذاته.

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.4 متجهات الوحدة Unit Vectors

- وحدة الكمية الفيزيائية شئ أساسي ومستخدم على نطاق واسع. مثلا وحدة المسافة هي m ووحدة الكلتة هي kg ووحدة الوقت هي s .
- كذلك بالنسبة للمتجه، فالمتجه يتكون من وحدات تشكله، مثلا متجه قميته 2 على اتجاه x الموجب يتكون من وحدتين. وهكذا.
- سوف نستخدم ثلاث وحدات متجهه (كل متجه مقداره وحده واحدة ويقع على طول أحد المحاور الكارتيزية).



- المتجه **i** يمثل متجه الوحدة على محور x
- المتجه **j** يمثل متجه الوحدة على محور y
- المتجه **k** يمثل متجه الوحدة على محور z
- مقدار كل متجه من هذه المتجهات 1 أي أن:
- $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$
- إذن صار يمكننا التعبير عن المركبات المتجهة بدلالة هذه المركبات حيث يلزم أخذ مقدار المركبة مضروبا في متجه الوحدة

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.4 التعبير عن المتجهات باستخدام متجهات الوحدة

$$\vec{A}_x = A_x\hat{i} \qquad \vec{A}_y = A_y\hat{j} \qquad \vec{A}_z = A_z\hat{k}$$

- أي أن المركبة المتجهة $\boldsymbol{A}_x$ عبارة عن مقدار هذه المركبة A_x مضروبا في وحدة المتجه **i**. فالوحدة حددت أولا أن المتجه على طول محور x وحددت ثانيا أنه متجه.
- إذن يمكن كتابة كامل المتجه ***A*** كما يلي:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (3.12)$$

- كذلك متجه الموقع لأي نقطة في الفراغ الكارتيزي يعبر عنها باستخدام نفس الأسلوب ولذلك فأن:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (3.13)$$

- ذكرنا في شريحة سابقة أن جميع المتجهات يمكن أن يتم بطريقة هندسية أو حسابية، وهنا نستعرض ما قصدنا بالطريقة الحسابية، وهي باستخدام متجهات الوحدة.
- لدينا متجهان ***A*** و ***B*** في المستوى الكارتيزي x-y ومطلوب أيجاد صيغة لجمع المتجهين وإيجاد المحصلة ***R*** . نقوم بذلك كما يلي

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.4 المحصلة باستخدام متجهات الوحدة

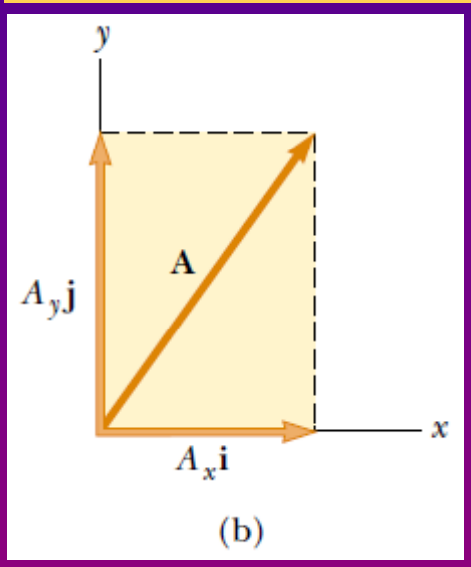
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\because \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \quad and \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\therefore \vec{R} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right)$$

$$= \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} \qquad (3.14)$$

$$with: R_x = A_x + B_x \quad R_y = A_y + B_y \qquad (3.15)$$



- R_x هي مركبة المحصلة على محور x و R_y هي مركبة المحصلة على محور y
- مقدار المحصلة يتم الحصول عليه من نظرية فيثاغورس:
- $$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$
- وكذلك اتجاه المحصلة يمكن حسابه من العلاقه:
- $$\theta = \tan^{-1}(R_y / R_x)$$

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors
3.4 مثال باستخدام متجهات الوحدة

- مثال: 3.3 إذا كان لدينا المتجهان **A** و **B** المعطيان كما يلي:
- **A** =(2.0**i** + 2.0**j**) m and **B** =(2.0**i**-4.0**j**) m
- احسب (مجموع المتجهين) (المحصلة)
- أحسب مقدار واتجاه المحصلة

$$\because \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (2.0 + 2.0)\hat{i} + (2.0 - 4.0)\,\hat{j}$$

$$= 4.0\hat{i} - 2.0\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow R_x = 4.0\,m \quad and \quad R_y = -2.0\,m$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 4.5\,m$$

$$\theta = \tan^{-1}(R_y / R_x) = \tan^{-1}(-2.0/4.0) = -27^o$$

$$\Rightarrow \theta = 360 - 27 = 333^o$$

- لاحظ أننا اتفقنا على حساب الزاوية ضد عقارب الساعة دائما ابتداء من محور x

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors

3.4 مثال آخر باستخدام متجهات الوحدة

- مثال: 3.4 يتحرك جسم ما كما يلي:
- $\mathbf{d_1} = (15\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ cm , $\mathbf{d_2} = (23\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$ cm, $\mathbf{d_3} = (-13\mathbf{i} + 15\mathbf{j})$ cm
- اوجد مركبات المحصلة ومقدارها

$$\because \vec{R} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3$$

$$= (15\hat{i} + 30\hat{j} + 12\hat{k}) + (23\hat{i} - 14\hat{j} - 5\hat{k}) + (-13\hat{i} + 15\hat{j})$$

$$= (15 + 23 - 13)\hat{i} + (30 - 14 + 15)\hat{j} + (12 - 5 + 0)\hat{k}$$

$$= (25\hat{i} + 31\hat{j} + 7\hat{k}) \ \text{cm}$$

$$\Rightarrow R_x = 25.0\,cm \quad and \quad R_y = 31\,cm \quad and \quad R_z = 7\ cm$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}} = \sqrt{25^2 + 31^2 + 7^2} = 40\,cm$$

الفصل الثالث: المتجهات Chapter 3: Vectors

3.4 الضرب القياسي للمتجهات Scalar Product (Dot Product)

- يعرف الضرب القياسي لمتجهين كما يلي: $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$
- حيث A يمثل مقدار المتجه ***A*** و B يمثل مقدار المتجه ***B***. و θ الزاوية بين المتجهين
- لو طبقنا هذا التعريف على متجهات الوحدة نحصل على: $i.i = j.j = k.k = 1$
- حيث أن الزاوية بين متجهات الوحدة ونفسها تساوي الصفر $i.j = j.k = i.k = 0$
- وبين متجهات الوحدة المختلفة تساوي 90°
- وبالتالي فيصبح الضرب القياسي لمتجهين كما يلي (بدلالة متجهات الوحدة):

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x i + A_y j).(B_x i + B_y j)$$
$$= A_x B_x i.i + A_x B_y i.j + A_y B_x j.i + A_y B_y j.j$$
$$= A_x B_x + 0 + 0 + A_y B_y = A_x B_x + A_y B_y$$

- الضرب الاتجاهي لمتجهين:
- يعرف كما يلي:
- $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\theta$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء و الفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 7

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.1 متجهات الإزاحة والسرعة والتسارع Displ., Velocity and Acc. Vectors

- سبق استعراض متجهات الإزاحة والسرعة والتسارع ولكن في بعد واحد فقط.
- عندما نتحدث عن نفس المتجهات ولكن في بعدين، فنحن نقوم بالاستفادة من المتجهات متعددة المركبات ونستخدم نفس خصائصها وصفاتها.

$$\vec{\Delta}x = x_f - x_i \quad \Rightarrow \vec{\Delta}r = r_f - r_i \tag{4.1}$$

$$\vec{v}_x = \frac{\vec{\Delta}x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{\Delta}r}{\Delta t} \tag{4.2}$$

$$\vec{v}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \tag{4.3}$$

$$\vec{a}_x = \frac{\vec{\Delta}v_x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{\Delta}v}{\Delta t} \tag{4.4}$$

$$\vec{a}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}v_x}{\Delta t} = \frac{dvx}{dt} \quad \Rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta}v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{4.5}$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.1 الحركة بتسارع ثابت في بعدين 2-D motion at const Acc.

- كل الكميات والمعادلات التي نكتبها تكون أجمالا في بعدين هما x,y
- بالنسبة للموضع: يعبر عنه في الفراغ الثنائي بالطريقة التالية: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (4.6)
- كذلك الحال مع السرعة التي يجب أن تكون في بعدين: $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ (4.7)
- عندما نريد كتابة معادلات الحركة المنتظمة في بعد واحد فأننا نطبق نفس المعادلات في بعدين ولكن كما لو كان كل بعد مستقلا عن الآخر.
- معادلة السرعة النهائية تصبح بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}\vec{v}_f &= (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j} \\ &= (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t \\ &= \vec{v}_i + \vec{a}t \qquad (4.8)\end{aligned}$$

- إذن السرعة الابتدائية لها مركبتان، والتسارع كذلك ، والسرعة النهائية أيضا لها مركبتان.
- كذلك الحال مع معادلة الموقع النهائي x_f فيعبر عنه في بعدين كما يلي:

$$\begin{aligned}\vec{r}_f &= (x_i + v_{xi}t + 1/2\,a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{yi}t + 1/2\,a_y t^2)\hat{j} \\ &= (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j})t + 1/2\,(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2 \\ &= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + 1/2\,\vec{a}t^2 \qquad (4.9)\end{aligned}$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.1 الحركة بتسارع ثابت في بعدين 2-D motion at const Acc.

• ملخص المعادلات:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t \qquad \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_x t \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t \end{cases} \qquad \textbf{(4.8a)}$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad \begin{cases} x_f = x_i + v_{xi} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \\ y_f = y_i + v_{yi} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \qquad \textbf{(4.9a)}$$

• **مثال**: بدأ جسيم حركته مبتدءا من نقطة الأصل عند اللحظة الزمنية **t = 0 s** وسرعة ابتدائية مركبتها في اتجاه x هي: **20 m/s** و مركبتها في اتجاه y هي: **-15 m/s** .

• إذا علمت بأن الجسيم يتحرك في المستوى x-y بحيث يتسارع فقط باتجاه x بتسارع مقداره: $a_x = 4\ m/s^2$.

• (أ) حدد مركبات متجه السرعة وكذلك متجه السرعة عند أية لحظة زمنية.

• (ب) احسب سرعة الجسم المتجهة وكذلك سرعته القياسية عند اللحظة الزمنية t = 5 s .

• (ج) قم بحساب قيم x و y للجسيم عند أية لحظة زمنية، وكذلك عبر عن متجه الموضع عند أي وقت t .

- **الحل**:
- (أ) معطيات هذه الفقرة: $v_{xi}=20\ m/s,\ v_{yi}=-15\ m/s,\ a_x=4\ m/s^2,\ a_y=0\ m/s^2$
- نقوم بالحل كل اتجاه على حده حتى نحصل على مركبات السرعة ثم نضعها في متجه:

$$x: v_{xf} = v_{xi} + a_x t = (20 + 4.0t)\ m/s$$

$$y: v_{yf} = v_{yi} + a_y t = (-15 + 0t)\ m/s$$

$$\therefore \vec{v}_f = v_{xf}\,\hat{i} + v_{yf}\,\hat{j} = \left[(20 + 4.0t)\hat{i} - 15\,\hat{j}\right] \qquad (1)$$

- **الحل**:
- (ب) نعوض في المعادلة (1) أعلاه عن الزمن بالقيمة t = 5 s :

$$\therefore \vec{v}_f(5) = \left[(20 + 4.0*5)\hat{i} - 15\,\hat{j}\right] = (40\hat{i} - 15\,\hat{j}) \qquad (1)$$

$$\theta = \tan^{-1}(-15/40) = -21^o\ (\therefore \theta = 360 - 21 = 339^o) \qquad (2)$$

$$u_f = \left|\vec{v}_f(5)\right| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} = 43\ m/s \qquad (3)$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.1 الحركة بتسارع ثابت في بعدين 2-D motion at const Acc.

- (1) السرعة المتجهة و (2) اتجاه السرعة المتجهة و (3) السرعة القياسية عند نفس الزمن.
- (ج) نريد حساب قيم x و كذلك y للموضع عند أية لحظة زمنية، كما نريد التعبير عن متجه الموضع:

$$x :\because\ x_f = x_i + v_{xi}t + 1/2\ at^2$$

$$but\ : x_i = 0, y_i = 0$$

$$\therefore\quad x_f = v_{xi}t + \frac{1}{2}at^2 = 20\,t + 2t^2 \qquad (1)$$

$$y : y_f = v_{yi}t + \frac{1}{2}at^2 = -15\,t \qquad (2)$$

$$\because\ \vec{r}_f = x_f\hat{i} + y_f\hat{j} = \left[(20\,t + 2t^2)\hat{i} - 15\,t\hat{j}\right] \qquad (3)$$

- معادلة رقم (3) ممكن كذلك أيجادها مباشرة من المعادلة السابقة (4.9) .
- لو أردنا حساب **مقدار الإزاحة** بالنسبة لنقطة الأصل والموقع بعد مرور 5 ثواني فهي:

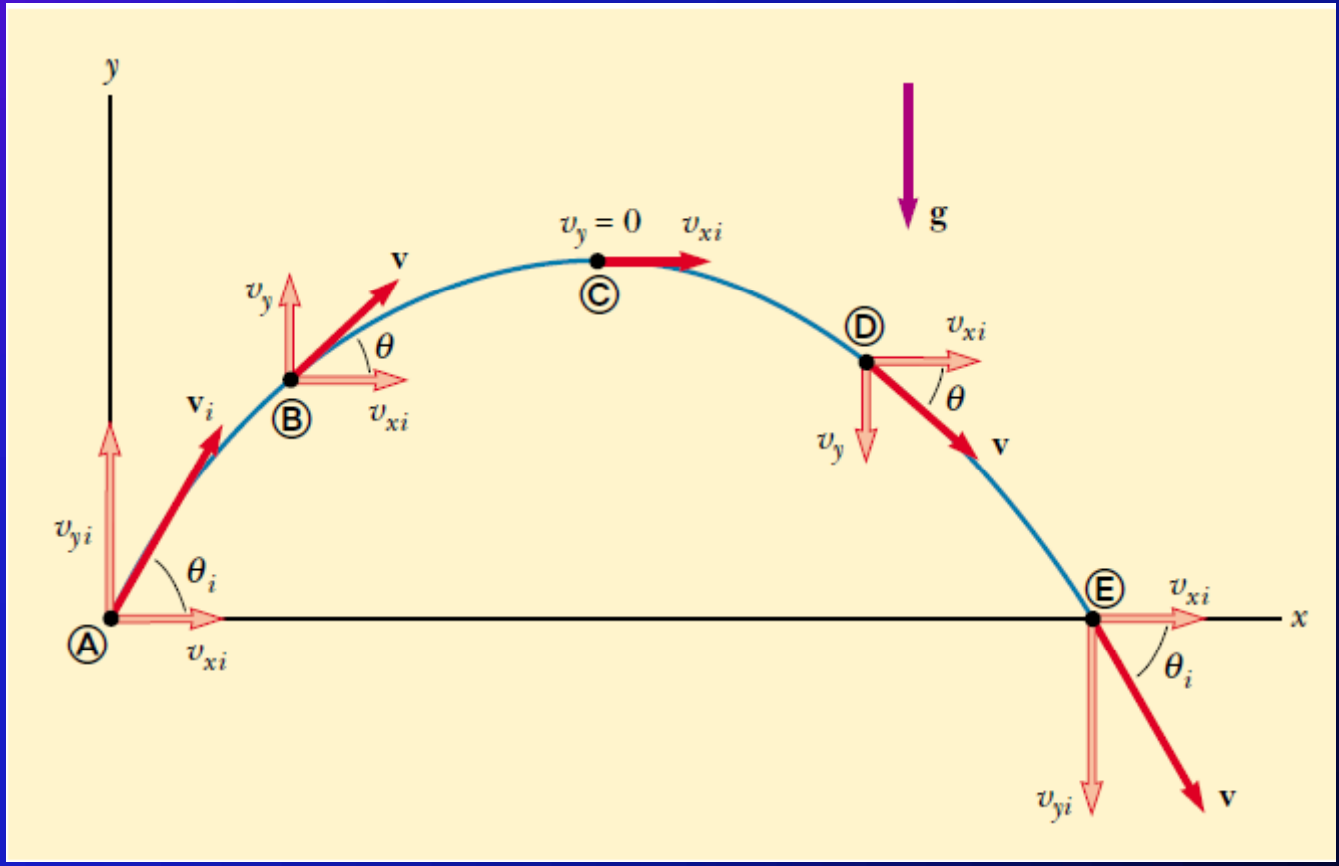
$$\because\ \vec{r}_f = \left[(20 * 5 + 2 * 25)\hat{i} - 15 * 5\,\hat{j}\right]$$

$$= 150\,i - 15\,j \Rightarrow r = \sqrt{150^2 + (-75)^2} = 170\ m$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.3 حركة المقذوفات Projectile Motion

- عندما يتم رمي جسم ما في الجو فأنه يتحرك بصورة حرة في مسار منحن تحت تأثير الجاذبية الأرضية. يتم عادة إهمال أثر الهواء من أجل تسهيل وكتابة معادلات الحركة.
- نقوم بدراسة الحركة وكأن هناك حركتين مستقلتين واحدة رأسية y والثانية أفقية x .



الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.3 حركة المقذوفات Projectile Motion

- المعطيات الابتدائية لحركة المقذوفات هي كما يلي:

$$a_x = 0\ , a_y = -9.8\, m/s^2\ ,\ x_i = 0\ ,\ y_i = 0$$

- كما في الشكل السابق: متجه السرعة الابتدائية v_i يعمل زاوية مقدارها θ_i مع محور x الموجب ولذلك فيمكن تحليل هذا المتجه إلى مركبتين، مركبة في كل اتجاه. إذن معادلات الحركة يمكن كتابتها في كل اتجاه كما يلي:

$$x:\ x_i = 0,\ a_x = 0$$

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = \text{constant}$$

$$x = v_{xi} t = (v_i \cos\theta) t \qquad (4.10)$$

$$y: y_i = 0, a_y = g\ (-9.8\ m/s^2)$$

$$v_{iy} = v_i \sin\theta_i$$

$$y = v_{iy} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_i \sin\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4.11)$$

$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t = v_i \sin\theta_i - 9.8t \qquad (4.11b)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2\times 9.8\, y = (v_i \sin\theta_i)^2 - 2\times 9.8\, y \qquad (4.11c)$$

• فنلاحظ من المعادلات (4.10) و (4.11) أن المسافة الأفقية المقطوعة هي عبارة عن سرعة ثابتة مضروبة في الزمن، في حين أن الحركة الرأسية هي عبارة عن حركة حرة تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

• اشتقاق معادلة منحنى المسار:

Eq. (4.10) for t :

$$t = \frac{x}{(v_i \cos \theta_i)}$$

put this in Eq. (4.11) we get :

$$y = (v_i \sin \theta_i)\left(\frac{x}{v_i \cos \theta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_i \cos \theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow y = x \tan \theta_i - \left(\frac{g}{2 v_i^2 \cos^2 \theta}\right) x^2$$

$$\Rightarrow y = a x_i - b x^2 \qquad (4.12)$$

• إذن معادلة المسار (4.12) هي معادلة قطاع مكافئ.

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

4.3 حركة المقذوفات Projectile Motion

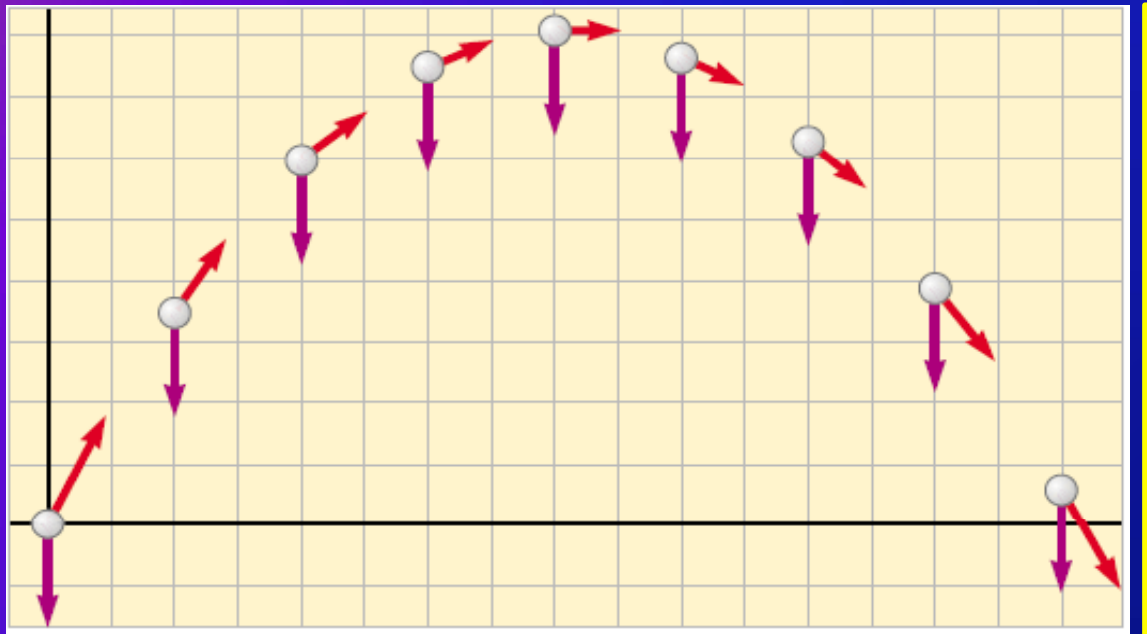


Figure 4.8 Motion diagram for a projectile.

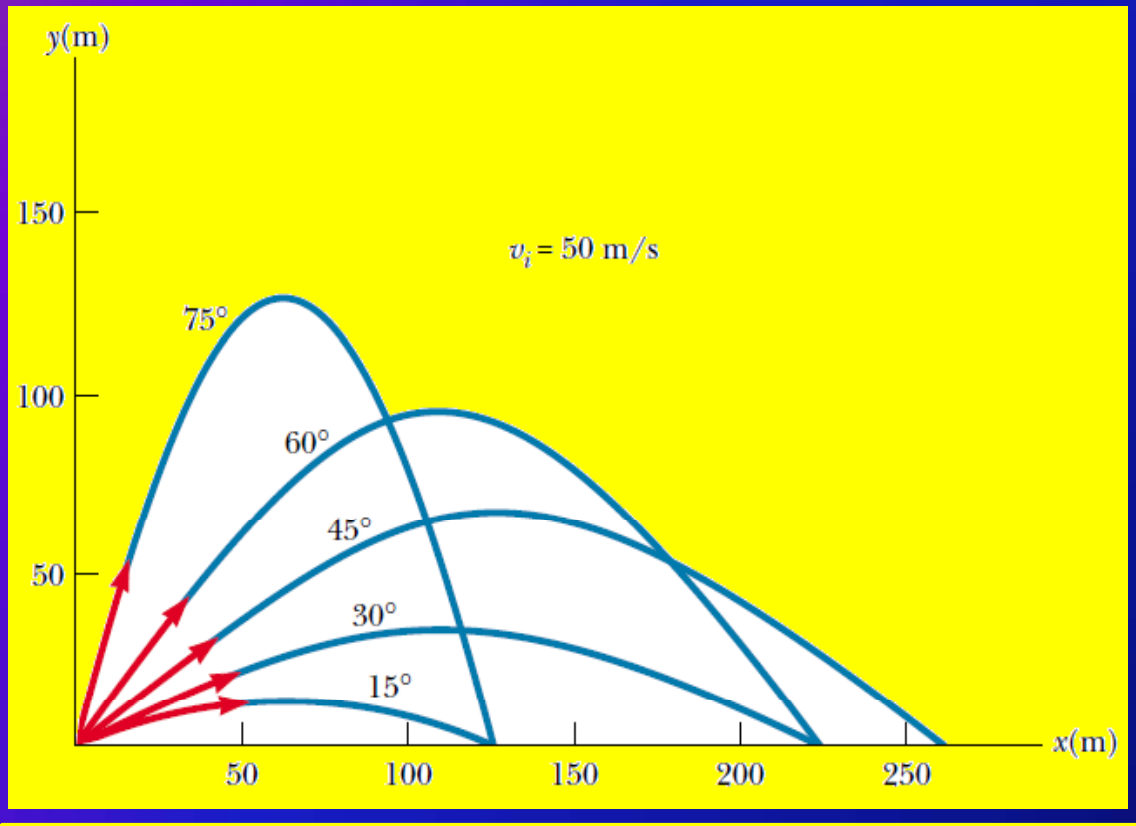
- على اليسار رسم توضيحي لحركة مقذوف. لاحظ أن التسارع إلى الأسفل ثابت اتجاها ومقدارا وهو يمثل تسارع الجاذبية الأرضية.
- في حين أن متجه السرعة بشكل عام يتغير مقدارا واتجاها (السهم الأحمر) وهو يحمل مركبة أفقية فقط عند أعلى نقطة. المركبة الرأسية يتغير اتجاهها من الأعلى للأسفل مرورا بالتوقف اللحظي عند القمة العظمى (أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف).

- **كويز**: تم ترك كرة من ارتفاع معين عن الأرض تسقط بشكل حر، وفي نفس الوقت تم رمي كرة أخرى ومن نفس الارتفاع ولكن بصورة أفقية. فأي الكرتين تصل إلى سطح الأرض أسرع من الأخرى؟

- **حل الكويز**: حيث أن الحركة الرأسية نفسها في الحالتين، والسرعة الأفقية للكرة الثانية لا تؤثر في الزمن اللازم للوصول إلى سطح الأرض.
- إذن تصل الكرتان في نفس الوقت ونفس السرعة إلى سطح الأرض.

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

حساب زمن الطيران الكلي Time of Flight



- كما هو واضح من الشكل على اليسار فأن زمن الطيران، والمدى (المسافة الأفقية الكلية) وأقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف، كل ذلك يعتمد على عنصرين رئيسيين:
- الأول: زاوية الإطلاق الابتدائية
- الثاني: سرعة الانطلاق الابتدائية.
- من المهم جدا أن نعرف المقصود بزمن الطيران. فهو الزمن اللازم لعودة المقذوف لنفس مستوى إطلاقه. إذن لا يشمل أي زمن أضافي للنزول لو حصل.

- كيفية حساب زمن الطيران:
- سوف نقوم باستخدام المعادلات السابقة (الرأسية). ونفترض أن السرعة الرأسية تساوي الصفر عندما يصل المقذوف ارتفاعه الأقصى.
- ومن ثم نحسب الزمن اللازم للوصول إلى هذه النقطة، ونضرب الناتج في 2 (زمن الصعود والنزول)

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين

Time of Flight حساب زمن الطيران الكلي

$$\because v_{yf} = v_i \sin\theta_i - 9.8t$$

$$\therefore if\ v_{yf} = 0 \quad (\text{at max. height})$$

$$\Rightarrow 0 = v_i \sin\theta_i - 9.8t$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}$$

$$\therefore \text{Time of Flight} : \boxed{t_F = \frac{2v_i \sin\theta_i}{9.8}}$$

- من الاشتقاق على اليسار نلاحظ أن:
- زمن الطيران يكون أطول ما يمكن عندما يكون جيب الزاوية أكبر ما يمكن.
- وهذا يحصل عندما يكون الإطلاق رأسيا تماما أي أن الزاوية = 90 درجة. عندما تكون الزاوية تساوي الصفر، لا توجد حركة رأسية أصلا.
- كذلك طبعا يعتمد هذا الزمن على السرعة الابتدائية للإطلاق.

- **حساب الارتفاع الأقصى *h* Maximum Height**

$$\because y = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{Using } t \text{ above and } h \text{ for } y):$$

$$h = (v_i \sin\theta_i)\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}\right)^2 = \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{9.8} - \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{2\times 9.8}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{v_i^2 \sin\theta_i^2}{2g}} \qquad (4.13)$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

حساب المدى Range R

• باستخدام معادلة الحركة الأفقية وزمن الطيران نحصل على المدى كما يلي:

$$\because\ x = v_{xi}t = (v_i \cos\theta_i)t$$

$$\therefore\ R = (v_i \cos\theta_i)\left(2 \times \frac{v_i \sin\theta_i}{9.8}\right) = \frac{2v_i^{\,2}}{g}\sin\theta_i \cos\theta_i$$

$$\because\ \sin 2\theta_i = 2\sin\theta_i \cos\theta_i$$

$$\therefore\ R = \frac{v_i^{\,2}}{g}\sin 2\theta_i \qquad (4.14)$$

• لاحظ أن المدى يأخذ قيمته القصوى عندما تكون زاوية الإطلاق = 30 درجة

• لاحظ كذلك أن المدى المقصود هو فقط المسافة الأفقية بين نقطة الإطلاق والنقطة المقابلة لها في طريق السقوط. ومعنى ذلك أنه لو سقط في بئر أو من فوق مستوى سطح مبنى فأن الجزء السفلي لا يدخل في حساب المدى.

• **كويز**: هل توجد أية نقطة على مسار المقذوف بحيث يتعامد عندها متجه التسارع ومتجه السرعة؟ وهل توجد نقطة يتوازى فيها هذان المتجهان؟

• يتعامدان فقط عندما يكون المقذوف في نقطة الارتفاع الأقصى. ويتوازيان فقط في حالة الحركة الرأسية.

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 8

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion

المقذوفات: مثال تطبيقي

• **مثال**: تمكن لاعب من القفز بزاوية مقدارها 20^o بالنسبة لسطح الأرض وبسرعة مقدارها 11.0 m/s .

• (أ) كم تبلغ المسافة الأفقية التي يقفزها؟

• (ب) ما هو أقصى ارتفاع يصل إليه؟

$$Given \ : \theta_i = 20^o, v_i = 11\ m/s$$

$$(a) \because x = v_{xi} t = (v_i \cos\ \theta_i) t \qquad (1)$$

t in this case is the time of flight :

$$\because t_F = \frac{2 v_i \sin\ \theta_i}{9.8} = \frac{2 \times 11 \times \sin(20)}{9.8} = 0.768\ s \qquad (2)$$

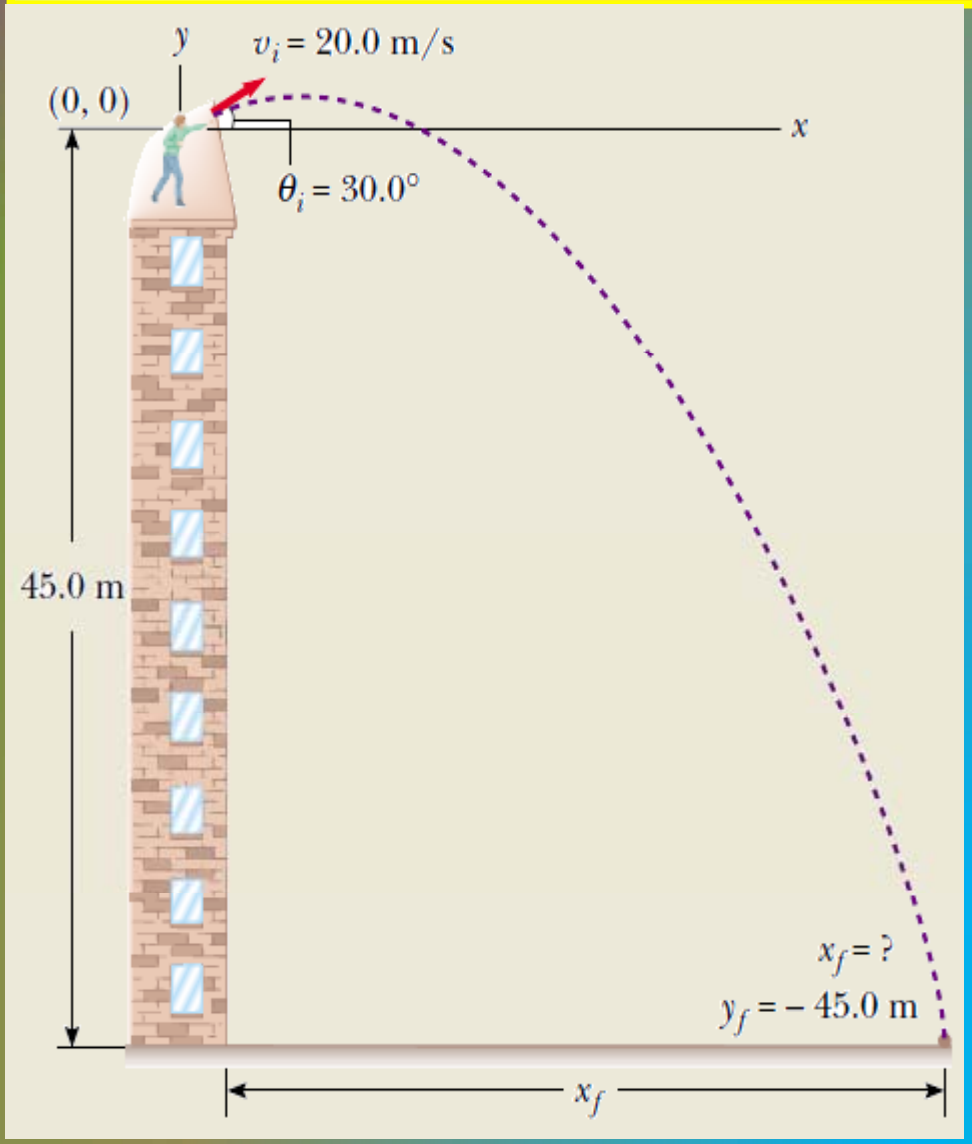
from (2) in (1) we get :

$$x = 11 \cos(20)(0.768) = 7.94\ \text{m} \qquad (3)$$

$$\text{or} : \ x = R = R = \frac{v_i^{\,2}}{g} \sin\ 2\theta_i = \frac{11^2}{9.8} \sin(2 \times 20) = 7.94\ \text{m} \qquad (4)$$

$$(b) \because h = \frac{v_i^{\,2} \sin\ \theta_i^{\,2}}{2g} = \frac{11^2 \sin(20)^2}{2 \times 9.8} = 0.722\ m \qquad (5)$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
المقذوفات: مثال 4.5



- **مثال 4.5** : في الشكل المجاور، تم رمي الحجر من قمة المبنى بزاوية ابتدائية مقدارها $\theta = 30^o$ بالنسبة للأفقي، وبسرعة ابتدائية مقدارها 20 m/s. إذا علمت بأن ارتفاع المبنى هو 45 m فاحسب:
  - (أ) كم هو الوقت اللازم لوصول الحجر إلى سطح الأرض؟
  - (ب) مقدار سرعة الحجر لحظة وصوله إلى سطح الأرض؟
  - (ج) بعد موقع سقوط الحجر عن قاعدة المبنى.

- **الحل** : من المهم أن نلاحظ أن x_f المبينة في الشكل ليست هي المدى.
  - كما يجب أن نلاحظ أن الوقت اللازم للحجر لكي يصل إلى سطح الأرض ليس هو زمن الطيران المعطى بالمعادلة سابقا، لأن الحجر نزل تحت مستوى إطلاقه.

Chapter 4: 2-D Motion الفصل الرابع: الحركة في بعدين
4.5 المقذوفات: مثال

$$Given \ : \theta_i = 30^o, v_i = 20 \ m/s$$

$$(a) \because \ y = v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_i \sin \theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \ -45 = (20 \sin 30)t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2 = 10t - 4.9t^2$$

$$\Rightarrow \ 4.9t^2 - 10t - 45 = 0$$

$$\text{Solving} \ : \ t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 882}}{9.8}$$

$$= \frac{10 \pm 31.33}{9.8} = \frac{41.33}{9.8} = 4.22 \ s \qquad (2)$$

$$(b) \ v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2}$$

$$\because \ v_{xf} = v_{xi} = 20 \cos 30 = 17.32 \ m/s$$

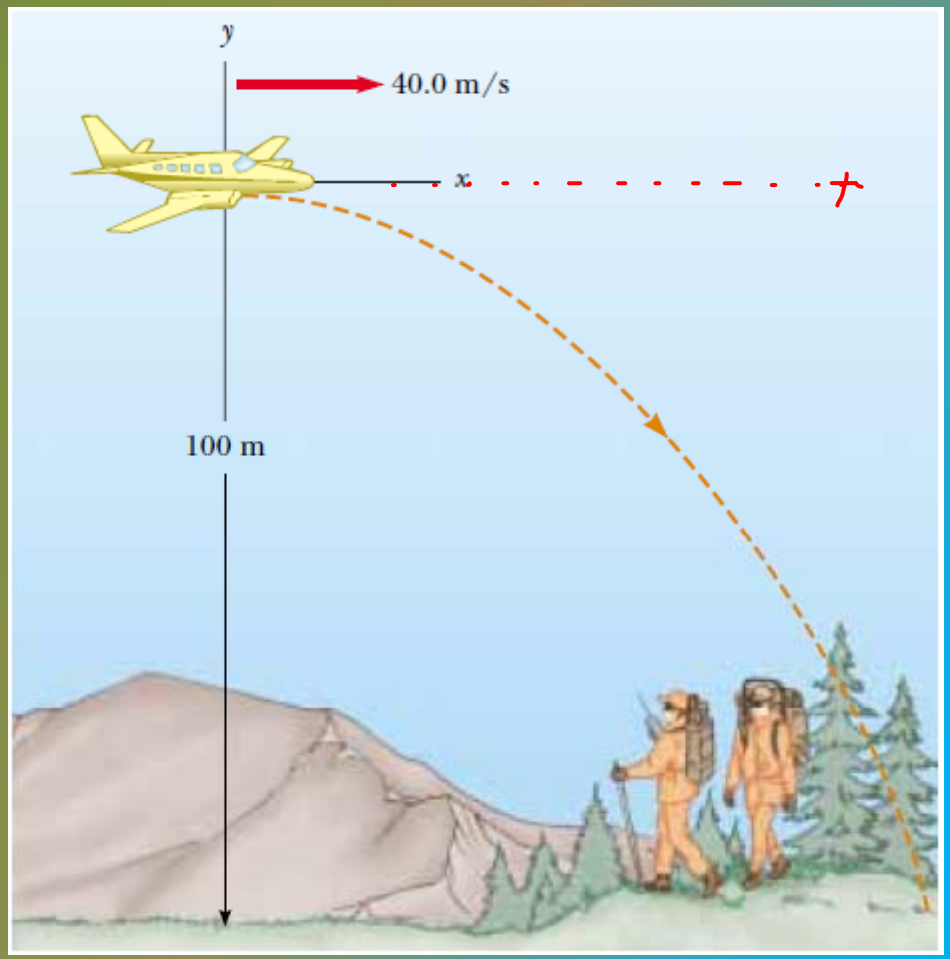
$$v_{yf} = v_{yi} - 9.8t = 20 \sin 30 - 9.8(4.22) = -31.36 \ m/s$$

$$\therefore \ v_f = \sqrt{17.32^2 + (-31.36)^2} = 35.9 \ m/s \qquad (3)$$

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
المقذوفات: مثال 4.6

(c) we need to find distance on x :

$$\because\ x_f = v_x t = v_i \cos\theta_i t = 20 \cos 30 \times 4.22 = 73\ m \qquad (4)$$



• **مثال 4.6** : في الشكل المجاور، قامت طائرة إنقاذ برمي كبسولة إنقاذ على فريق الاستكشاف عندما كانت الطائرة تحلق أفقيا بسرعة مقدارها 40 m/s وعلى ارتفاع مقداره 100 m عن سطح الأرض.

• (أ) أين سيكون موقع الكبسولة عند وصولها إلى الأرض بالنسبة لنقطة إطلاقها الأصلية؟

• (ب) احسب مركبات السرعة لحظة الوصول؟

• (ج) أين مكان الطائرة بالضبط لحظة وصول الكبسولة إلى الأرض؟

• **الحل** : من المهم أن نلاحظ أن سرعة الكبسولة لحظة ألقائها سوف تكون هي نفسها سرعة الطائرة وفي نفس اتجاه حركة الطائرة.

• لاحظ كذلك أن الحركة الرأسية هي حركة حرة

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
المقذوفات: مثال 4.6

• **استراتيجيه الحل**: حيث أننا نحتاج إلى حساب المسافة x_f التي تتحركها الكبسولة خلال رحلة السقوط، إذن لابد من البحث عن الزمن اللازم للوصول إلى سطح الأرض. وهذا يتم باستخدام معادلات الحركة الرأسية.

$$Given \quad : \theta_i = 0^o, v_i = 40\ m/s\ ,\ y_i = -100\ m$$

$$v_{xi} = v_i \cos\theta = 40 \cos 0 = 40\ m/s,$$

$$v_{yi} = v_i \sin\theta = 40 \sin 0 = 0\ m/s,$$

$$(a) \because\ y = v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 - \frac{1}{2}(9.8)t^2$$

$$\therefore\ -100 = 0 - 4.9t^2 \Rightarrow t = \sqrt{100/4.9} = 4.52\ s \qquad (1)$$

$$\because\ x_f = v_{xi}t = 40 \times 4.52 = 180.7\ m \qquad (2)$$

$$(b) v_{xf} = v_{xi} = 40\ m/s \quad (\text{This component is constant})$$

$$(4.11b) \Rightarrow v_{yf} = v_{yi} - 9.8t = v_i \sin\theta_i - 9.8t$$

$$\therefore\ v_{yf} = 0 - 9.8(4.52) = -44.3\ m/s$$

$$\therefore\ \vec{v} = 40\,\hat{i} - 44.3\,\hat{j}$$

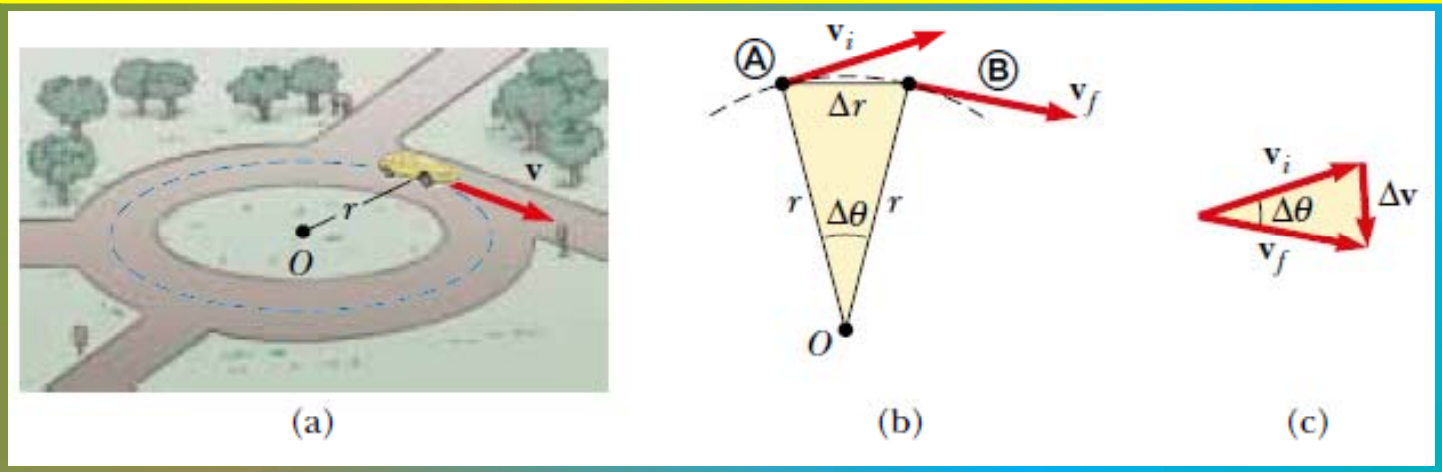
(c) exactly above the capsule

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion

- تعرف الحركة الدائرية المنتظمة بأنها حركة جسم على مسار دائري بسرعة ثابتة.
- يعطى التسارع المركزي للجسيم كما يلي:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

- حيث اتجاه التسارع على نفس اتجاه نصف القطر
- السرعة v هي السرعة المماسية (السرعة متعامدة على نصف القطر)



- التسارع المماسي والتسارع المركزي:
- حيث أن الحركة الدائرية تتم في بعدين فأن لها مركبتان: أحدى هاتين المركبتين تقع على طول نصف القطر وتسمى التسارع المركزي كما في الأعلى. والثانية تقع على طول اتجاه السرعة المماسية وبالتالي فهو متعامد مع اتجاه التسارع المركزي.
- التسارع الكلي هو المتجه الذي يجمع هاتين المركبتين.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \qquad (4.16)$$

$$a_t = \frac{dv_t}{dt}$$

$$\therefore a = \sqrt{a_r^{\,2} + a_t^{\,2}}$$

- لاحظ أننا ذكرنا سابقا أن السرعة المماسية (سرعة الدوران) هي سرعة ثابتة، ومع ذلك نفاضلها بالنسبة للزمن للحصول على التسارع المماسي.
- إذن يمكن تفاضل المتجه حتى لو كان مقداره ثابتا للحصول على التسارع.

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء و الفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

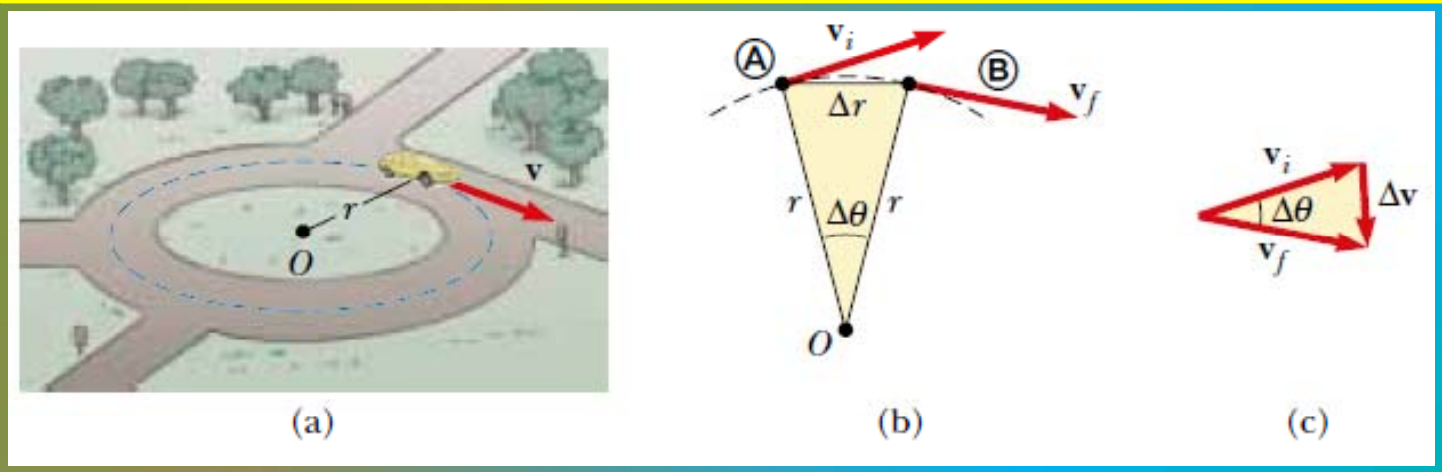
المحاضرة رقم: 9

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion

- تعرف الحركة الدائرية المنتظمة بأنها حركة جسم على مسار دائري بسرعة ثابتة.
- يعطى التسارع المركزي للجسيم كما يلي:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

- حيث اتجاه التسارع على نفس اتجاه نصف القطر
- السرعة v هي السرعة المماسية (السرعة متعامدة على نصف القطر)



- التسارع المماسي والتسارع المركزي:
- حيث أن الحركة الدائرية تتم في بعدين فأن لها مركبتان: أحدى هاتين المركبتين تقع على طول نصف القطر وتسمى التسارع المركزي كما في الأعلى. والثانية تقع على طول اتجاه السرعة المماسية وبالتالي فهي متعامد مع اتجاه التسارع المركزي.
- التسارع الكلي هو المتجه الذي يجمع هاتين المركبتين.

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

From Comparing part (b) and (c) in the figure :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \Delta v = \frac{v \Delta r}{r}$$

$$\therefore \bar{a} = \frac{v \Delta r}{r \Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

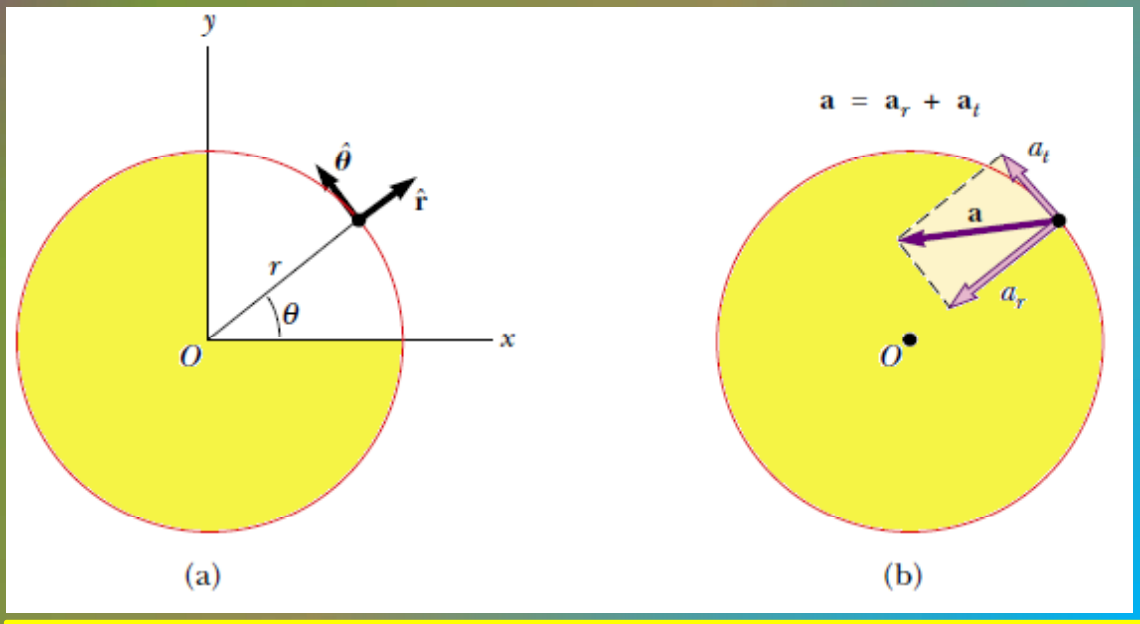
$$\therefore a_r = \frac{v^2}{r} \qquad (4.15)$$

- ويسمى التسارع في (4.15) بالتسارع المركزي واتجاهه يقع على طول نصف القطر باتجاه المركز.
- وهناك تسارع آخر يقع على نفس اتجاه السرعة المماسية يمكن الحصول عليه من اشتقاق السرعة المماسية بالنسبة للزمن كما هي العادة مع التسارع. $a_t = \frac{dv_t}{dt}$ (4.17)
- التسارع الكلي للجسيم في حركة دائرية:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$\therefore a = \sqrt{a_r^{\,2} + a_t^{\,2}} \qquad (4.16)$$

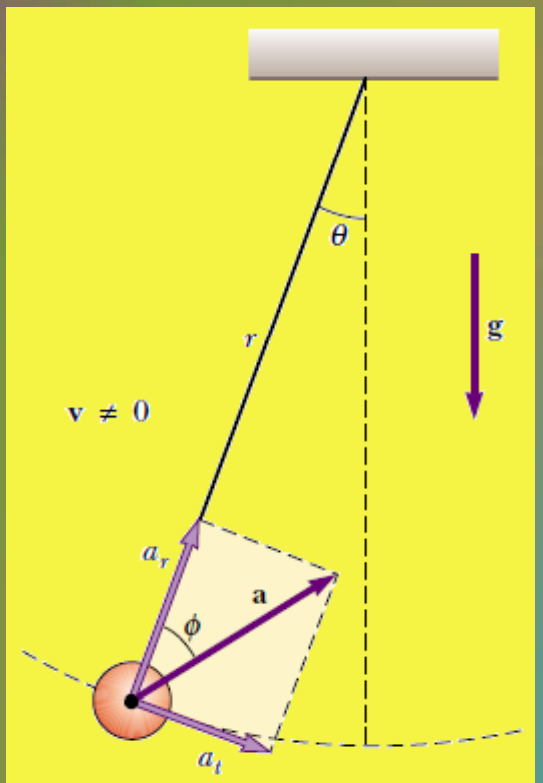
الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion



- في الرسم المبين على اليسار:
- لاحظ اتجاه التسارع المماسي a_t على طول المماس (نفس اتجاه السرعة المماسية). في حين أن اتجاه التسارع المركزي a_r يقع على طول نصف القطر وباتجاه المركز.
- التسارع الكلي هو المجموع ألاتجاهي لهذين التسارعين، ومقداره يحسب من نظرية فيثاغورس.

- **مثال 4.8** :
- تم ربط كرة في حبل طوله 0.5 m بحيث تدور في دائرة رأسية كما في الشكل المبين تحت تأثير الجاذبية الأرضية. عندما يعمل الحبل زاوية مقداره 20^o مع الرأسي تكون سرعة الكرة 1.5 m/s .
- (أ) احسب مقدار مركبة التسارع القطرية عند هذه اللحظة.
- (ب) احسب مقدار مركبة التسارع المماسية عند نفس الزاوية.
- (ج) احسب مقدار واتجاه التسارع الكلي للكرة عند نفس اللحظة.
- (ملحوظة: لاحظ أن كلا من a_t و a_r دائما متعامدين.)

الفصل الرابع: الحركة في بعدين Chapter 4: 2-D Motion
الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion



$$given \quad : r = 0.5\ m, v_t = 1.5\ m/s, \theta = 20^o$$

$$(a) \therefore a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.5)^2}{1.5} = 4.5\ m/s^2 \qquad (1)$$

$$(b)\ a_t = g \sin\theta = 9.8 \sin 20 = 3.4\ m/s^2 \qquad (2)$$

$$(c) \because a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{4.5^2 + 3.4^2} = 5.6\ m/s^2 \qquad (3)$$

$$\because \varphi = \tan^{-1}\frac{a_t}{a_r} = \tan^{-1}\frac{3.4}{4.5} = 37^o \qquad (4)$$

- إذن في هذا المثال كل الكميات متغيرة مقدارا واتجاها بحسب الموقع.
- التسارع المماسي يساوي الصفر في أسفل الحركة ويساوي g عندما يكون الحبل أفقيا تماما.

- سوف نعود أن شاء الله لمناقشة الحركة الدائرية بتحليل أفضل عندما نناقش في الفصل الخامس قوانين نيوتن للحركة ونتعرف على القوة وتحليل القوى.
- ونكتفي هنا بمعرفة الكميات السابقة مثل التسارع الخطي (المماسي) والتسارع القطري والعلاقة بينهما وبين السرعة الخطية (المماسية).

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

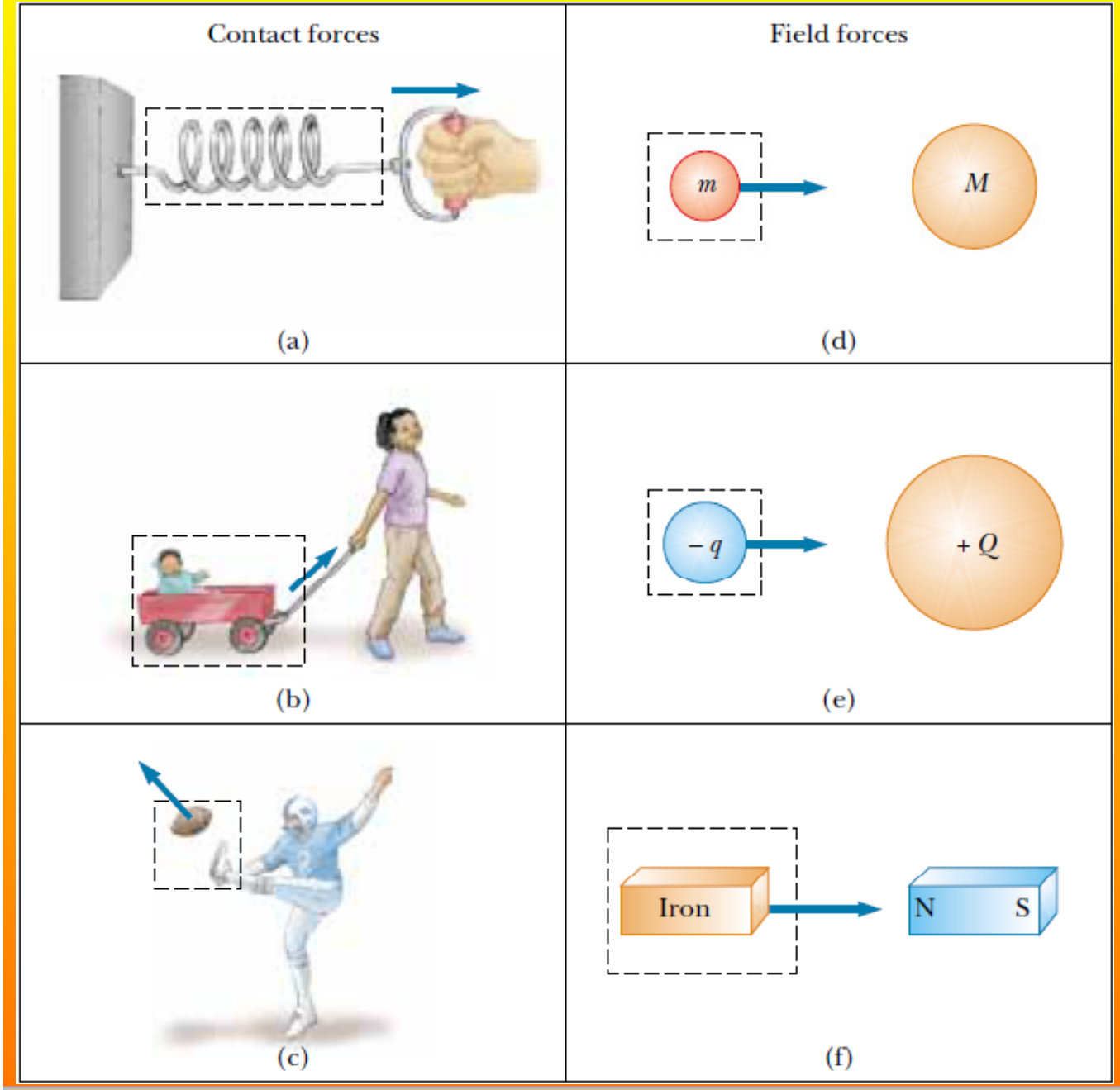
nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 10

الفصل الخامس: قوانين الحركة Chapter 5: Laws of Motion

مفهوم القوة THE CONCEPT OF FORCE

• تمر بنا قوى مختلفة يوميا، بعضها قد يؤدي إلى حصول حركة (مثل ضرب الكرة بالقدم) وبعضها الآخر قد لا يؤدي إلى حصول حركة مثل قوة جذب الأرض للأجسام المستقرة على سطحها.
• نيوتن – مثل غيره – لاحظ حركة الأجسام من حوله مثل حركة القمر حول الأرض، وخلص من ملاحظاته إلى أنه لا توجد حركة من دون وجود قوة سببتها بل أن التغير في سرعة الجسم لا يحصل إلا بسبب وجود قوى مؤثرة.
• أذن عندما تتغير سرعة جسم (يتسارع) فهذا بسبب وجود قوة خارجية ولذلك فيمكن أن ننظر إلى مفهوم القوة بأنه (ذلك الشئ الذي يجعل الأجسام تتسارع).
• ماذا لو أثرت مجموعة من القوى على جسم؟ في هذه الحالة محصلة القوى هي المسئولة عن التسارع.
• أن المجموع الاتجاهي لمجموعة قوى مؤثر يعطي (محصلة القوة) فإذا كان المحصلة لا تساوي الصفر فأنها تقود إلى إحداث التسارع، وإذا كان تساوي الصفر فأن السرعة تظل ثابتة (بما في ذلك الصفر).
• من هذا المفهوم: الجسم الذي لا يتسارع يقال عنه أنه (في حالة توازن Equilibrium).
• هنا نوعان من القوى: قوى ثابتة (يحصل هناك اتصال بين القوى والجسم) وقو حقلية Field Force لا يحصل تلامس ولكن يتم التأثير من خلال الحقل field الذي وضعه فارادي لحل معضلة التفاعل من غير تلامس مثل قوى الجذب الكوني والقوى المغناطيسية.
• لقد كان مفهوم الحقل Field الذي وضعه فارادي في عام 1845 حلا رائعا لتأثير القوى من دون اتصال حقيقي، والذي كان يمثل مشكلة حتى لدى كبار العلماء مثل نيوتن نفسه.



• **مايكل فارادي** أحد العلماء الكبار في التاريخ ويتميز بأنه علم نفسه بنفسه حيث ترك المدرسة وعمره 14 سنة وهو مكتشف التيار الكهربائي لأول مرة ومخترع المحرك الكهربائي (الدينامو) واشتهر بشغفه بالتجربة العلمية.

• في الرسم: يسار قوى متصلة ويمين غير متصلة

Chapter 5: Laws of Motion الفصل الخامس: قوانين الحركة

NEWTON'S FIRST LAW قانون نيوتن الأول للحركة

In the absence of external forces, an object at rest remains at rest and an object in motion continues in motion with a constant velocity (that is, with a constant speed in a straight line).

•يبقى الجسم الساكن ساكنا ويبقى الجسم المتحرك على نفس حركته وبنفس السرعة ما لم تؤثر عليها محصلة قوى خارجية.

• أن المعنى المباشر لهذا القانون أنه لو وجد جسم ما في وسط معزول، أي لا تؤثر عليه قوى خارجية، فأنه سوف يكون في أحد حالتين لا ثالث لهما: أما ساكنا، أو يتحرك بسرعة ثابتة.
• أن ممانعة الجسم لتغيير وضعه يطلق عليها: القصور الذاتي Inertia .
• في الشكل على اليسار عربة القطار كانت تتحرك وحيث أنها تميل للاستمرار في الحركة ولم تكن القوة التي سببها الحائط كافية لتغيير الحركة فقد دمر القطار الحائط وخرج خارج المحطة.

•قم بتشغيل مقطع الفيديو المصاحب (قطار يصطدم بشاحنة)

الفصل الخامس: قوانين الحركة Chapter 5: Laws of Motion

مفهوم الكتلة Mass

• **الكتلة Mass** :

• يلاحظ في الحياة اليومية أن بعض الأجسام تميل إلى المحافظة على الحركة، أي أنه من الصعب إيقافها إذا كانت تتحرك ومن الصعب تحريكها إذا كانت ساكنة.

• إن الفرق الذي يحدد ما إذا كان الجسم ميالا أكثر من غيره إلى المحافظة على الحالة هو في كتلة الجسم. إذن الكتلة هي خاصية تجعل من الجسم ميالا إلى القصور الذاتي. والجسم ذو الكتلة الأكبر يميل أكثر من الجسم ذي الكتلة الأقل إلى القصور ذاتيا.

• يرجى ملاحظة أن الكتلة خاصية للجسم لا علاقة لها بموقع الجسم في الكون. إذن الكتلة والوزن كميتان مختلفتان تماما ولا يجوز الخلط بينهما كما هو دارج في الحياة اليومية.

قانون نيوتن الثاني للحركة Newton's 2nd law of Motion

• ينص قانون نيوتن الثاني على:

• يتسارع الجسم تحت تاثير القوى الخارجية بصورة تتناسب طرديا مع هذه القوة. وربما نكون أكثر دقة لو قلنا (تتناسب محصلة القوى الخارجية عندما تؤثر على جسم طرديا مع كتلة الجسم).

• والسبب في تحديد محصلة القوى لأنه ليس العبرة بقوة ما بل بالمحصلة الكلية.

• رياضيا نعبر عن القانون كما يلي:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (5.2)$$

الفصل الخامس: قوانين الحركة Chapter 5: Laws of Motion

قانون نيوتن الثاني للحركة Newton's 2nd law of Motion

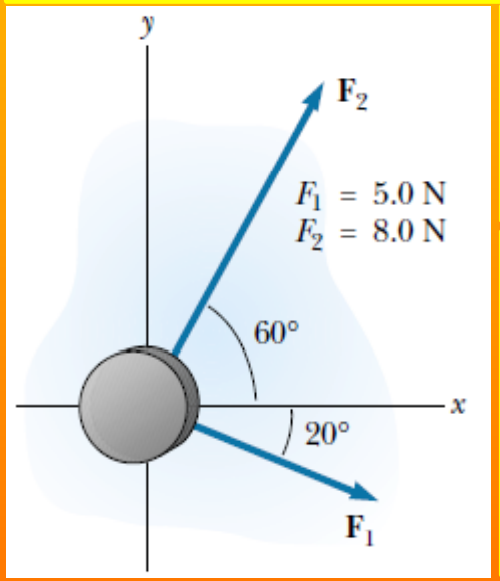
- وحتى تكون الصورة أفضل نفكك هذه القوى بحسب الاتجاه:

$$\sum F_x = ma_x \qquad (5.3)$$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_x = ma_x$$

- كويز: هل توجد علاقة بين محصلة القوى المؤثرة على جسم وبين اتجاه حركة الجسم؟
- الإجابة: نعم، يتحرك الجسم في النهاية في نفس اتجاه المحصلة المؤثرة.



- **مثال**: في الشكل المبين يتعرض القرص إلى تأثير قوتين مبينة مقاديرها واتجاهاتها في الشكل. إذا علمت بأن كتلة القرص هي 0.3 kg وأنه يتحرك على السطح بدون احتكاك، فحدد مقدار واتجاه تسارع القرص.

- **الحل**: لحل هذا المثال وغيره نقوم بالتالي:
- أولا: نقوم بتحليل القوة الأولى إلى مركبتين F_{1x} و F_{1y}
- ثانيا: نقوم بتحليل القوة الثانية إلى مركبتين F_{2x} و F_{2y}
- ثالثا: نجمع المركبات في كل اتجاه على حدة ونسميها F_x و F_y
- رابعا: نحسب التسارع في كل اتجاه بسبب مركبة القوة في ذلك الاتجاه.

Chapter 5: Laws of Motion الفصل الخامس: قوانين الحركة

Newton's 2nd law of Motion قانون نيوتن الثاني للحركة

Given $: \vec{F}_1 = 5.0\,N \ at: 340^o,\ \vec{F}_2 = 8\,N \ at: 60^o$

$$F_{1x} = F_1\cos(340) = +4.70\ N,\ F_{2x} = F_2\cos 60 = +4.0\ N$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 4.7 + 4.0 = +8.7\ N \qquad (1)$$

$$F_{1y} = F_1\sin(340) = -1.71\ N,\ F_{2y} = F_2\sin 60 = +6.93\ N$$

$$\Rightarrow \sum F_y = -1.71 + 6.93 = +5.22\ N \qquad (2)$$

$$\because \sum F_x = ma_x \ \therefore a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{+8.7}{0.3} = 29\ m/s^2 \qquad (3)$$

$$\because \sum Fy = ma_y \ \therefore a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{+5.22}{0.3} = 17\ m/s^2 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{29^2 + 17^2} = 34\ m/s^2 \qquad (5)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 30^o \qquad (6)$$

- يتم اتباع نفس الخطوات في كل مرة تكون فيها أكثر من قوة مؤثرة ونريد حساب التسارع مقدارا واتجاها.
- لاحظ أنه تم التعامل مع كل مركبة مستقلة عن الأخرى ثم تم دمج النتائج.

الفصل الخامس: قوانين الحركة Chapter 5: Laws of Motion

قانون نيوتن الثالث للحركة Newton's 3rd law of Motion

- نص القانون: *لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار مضاد له في الاتجاه*

- مثال توضيحي: كان هناك رجل وصبي يقفان على سطح ثلجي لا احتكاكي وباستخدام اليدين لكل منهما تم دفع كل منهما الأخر بقوة، فتحكا في اتجاهين متضادين. *أي منهما يتحرك بسرعة أكبر ؟*

- الحل:
- من قانون نيوتن الثالث (الفعل ورد الفعل) بما أن كلا من الشخصين دفع الآخر، فالنتيجة أنهما سوف يتعرضان لنفس القوة ولكن في اتجاهين متضادين.
- وحيث أن كتلة الصبي اصغر فسوف يتسارع أكثر من الرجل وبالتالي سوف تكون سرعته في النهاية أكبر.

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

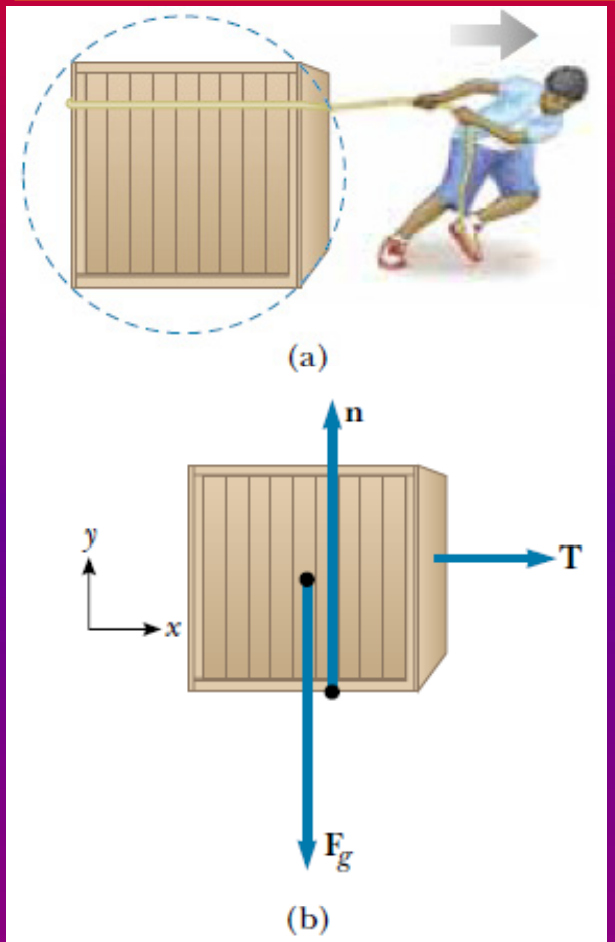
nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 11

تطبيقات على قوانين نيوتن SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS

مفهوم الشد Tension

- عندما نحاول حل مسائل تتعلق بقوانين نيوتن فأننا نركز على القوى الخارجية فقط
- تحليل القوى المؤثرة على جسم عندما يتم شده بحبل والجسم على سطح لا احتكاكي (أملس):



- يتم التاثير على الصندوق فقط بقوة الشد T باتجاه اليمين.
- نقوم بتطبيق قانون نيوتن الثاني في اتجاه واحد فقط ولنقل x :

$$\sum F_x = T = ma_x \qquad (1)$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{T}{m}$$

- حالة جسم كتلته m مدلى بحبل من السقف :
- هناك قوتان تؤثران: الأولى إلى اعلى ومقدارها T والثانية إلى اسفل ومقدارها mg. لاحظ أن التسارع = صفر (حيث لا توجد حركة)
- نقوم بكتابة قانون نيوتن الثاني كما يلي:
- المجموع الجبري للقوى باتجاه y = الكتلة X التسارع

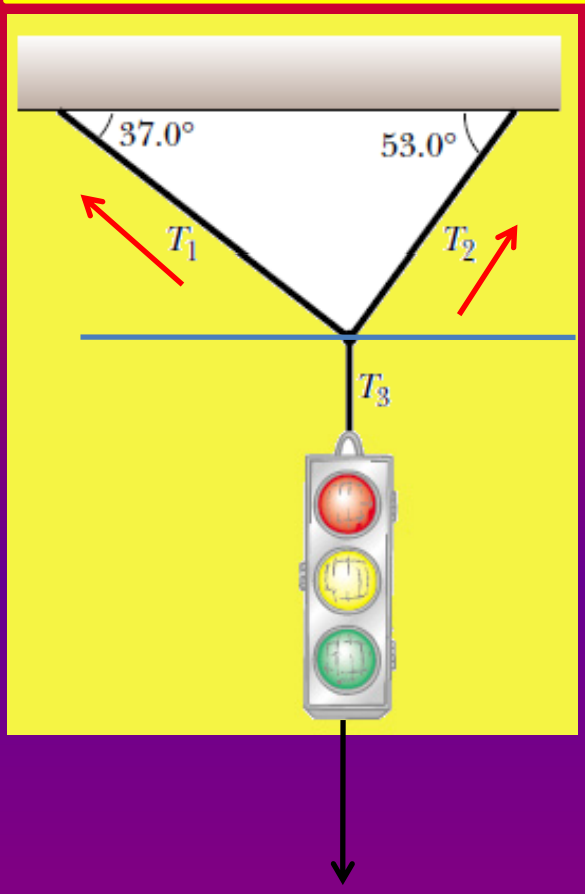
$$\sum F_y = T - mg = ma_y = 0$$

$$\Rightarrow T = mg$$

SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

Tension مفهوم الشد

- مثال: 5.4: إذا علمت بأن وزن الأشارة الضوئية هو 125 N فاحسب الشد في الحبال الثلاثة.



$$x: -T_1 \cos 37 + T_2 \cos 53 + T_3 \cos 90 = 0$$

$$\Rightarrow -0.799\,T_1 + 0.602\,T_2 + 0 = 0 \qquad (1)$$

$$y: T_1 \sin 37 + T_2 \sin 53 - T_3 = 0$$

$$\Rightarrow 0.602\,T_1 + 0.799\,T_2 - T_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\because T_3 = 125\ N \qquad (3)$$

solving 3 Equations for 3 unknowns :

$$(3)\ \text{in}\ (2) \Rightarrow 0.602\,T_1 + 0.799\,T_2 = 125 \qquad (4)$$

$$(1) \Rightarrow T_2 = \frac{0.799}{0.602} T_1 \qquad (5)$$

$$(5)\ \text{in}\ (4) \Rightarrow 0.602\,T_1 + 0.799 \times \frac{0.799}{0.602} T_1 = 125$$

$$\Rightarrow 0.602\,T_1 + 1.06\,T_1 = 1.66\,T_1 = 125 \Rightarrow T_1 = 75.1\ N$$

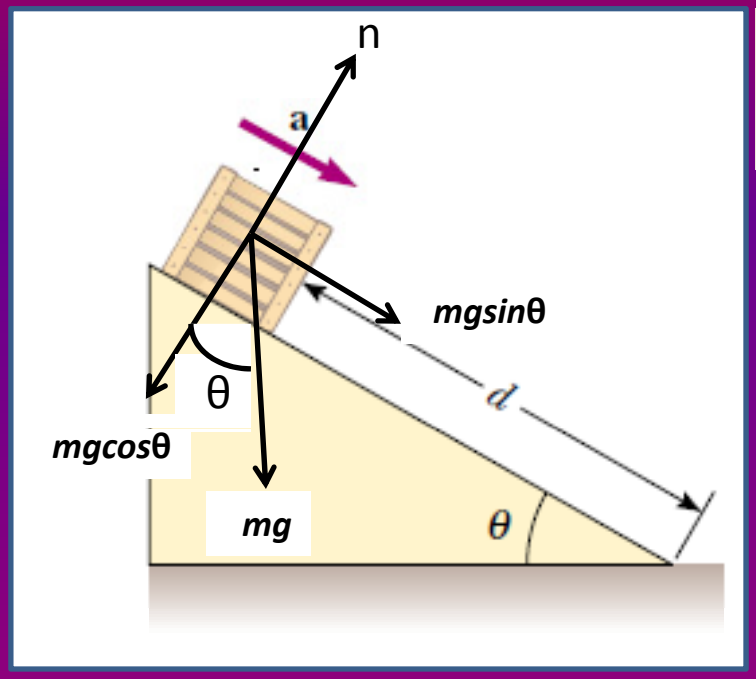
$$(5) \Rightarrow T_2 = \frac{0.799}{0.602}(75.1) = 99.9\ N$$

SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

Objects on an Incline frictionless planes أجسام على مستويات مائلة بدون احتكاك

- مثال: 5.6: الصندوق المبين في الشكل كتلته m موجود على سطح مائل لا احتكاكي زاوية ميله مبينة في الشكل.
- (أ) احسب تسارع الصندوق عندما يتحرك. (ب) احسب الزمن اللازم للوصول إلى اسفل المستوى (ج) كم السرعة سوف تكون في اسفل المستوى؟

- الحل: تم تحليل القوى كما هو مبين في الشكل. المركبة $mg\sin\vartheta$ هي التي تؤدي إلى الحركة لاسفل، المركبة $mg\cos\vartheta$ لا قيمة لها في غياب الاحتكاك. سوف نطبق قانون نيوتن الثاني على طول المستوى:



$$(a)\ \sum F_x = mg\ \sin\theta = ma_x \qquad (1)$$

$$\Rightarrow a_x = g\ \sin\theta$$

- التسارع ثابت، فيمكن تطبيق قوانين الحركة المنتظمة:

$$(b)\ \because\ x_f - x_i = v_{xi}t + 1/2\,a_x t^2$$

$$\Rightarrow d = 0 + 1/2\,a_x t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g\ \sin\theta}} \qquad (2)$$

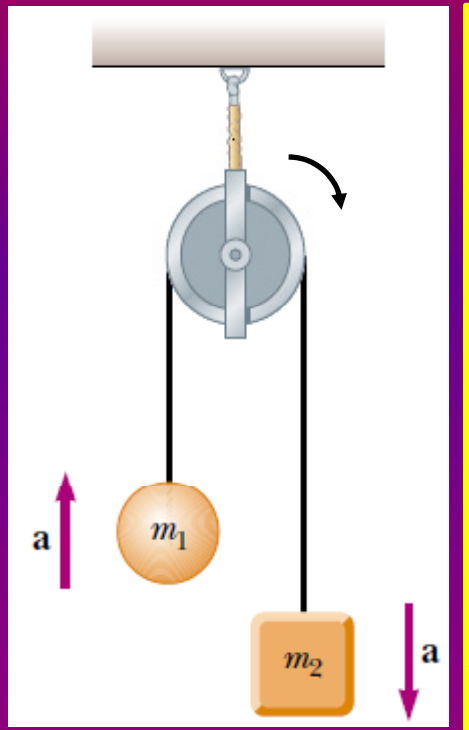
- (ج) يرجى الرجوع للكتاب لاستكمال الحل، حيث يلزم استخدام معادلة حركة منتظمة أخرى لهذا الغرض.

تطبيقات على قوانين نيوتن SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS

آلة أتوود Atwood's Machine

- **مثال: 5.9:** عندما يتم ربط كتلتين مختلفتين m_1 و m_2 بحبل معدوم الوزن بحيث يمر على بكرة ملساء لا احتكاكية ومعدومة الوزن، فأن هذا الوضع يطلق عليه: آلة أتوود. والمطلوب عادة هو: (أ) حساب التسارع. (ب) حساب الشد في الحبل. (ج) أوجد القيم عندما: m_1- 2kg and m_2=4 kg

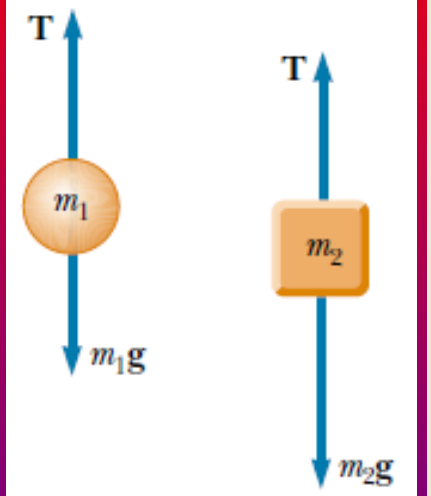
- **الحل**: يتوجب ملاحظة أن التسارع هو نفسه للجسمين من حيث المقدار ولكنه يختلف في الاتجاه فقط. كذلك يجدر ملاحظة أن الشد هو نفسه في الحبل، وهكذا في أي حبل مادام متصلا.



- **استراتيجية الحل:**
- (1) نفترض اتجاه الحركة (عادة يفضل اختيارها لصالح الجسم الأثقل)
- (2) نقوم بكتابة معادلة حركة واحدة لكل جسم (قانون نيوتن الثاني)
- (3) سوف نحصل على عدد من المعادلات يساوي عدد الأجسام
- (4) نقوم بحل المعادلات ونوجد المطلوب
- (5) يتم كتابة معادلة الحركة بناء على اتجاه حركة الجسم:
  - الجسم الساقط تكون mg أكبر من الشد T وبالتالي تصبح محصلة القوة هي: $mg - T$
  - الجسم الصاعد تكون T أكبر من mg وبالتالي تصبح محصلة القوة المؤثرة هي: $T - mg$.
- (6) في حالة كون فرضية الاتجاه صحيحة يصبح a موجبا.

SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

Atwood's Machine آلة أوتوود



رسم يوضح القوى المؤثرة على كل جسم بناء على قيمة الكتلة وفرضية الاتجاه.

equations of motion for m_1 and m_2 :

$$\sum F_1 = T - m_1 g = m_1 a \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = m_2 g - T = m_2 a \qquad (2)$$

$$(1) + (2) :\Rightarrow m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \qquad (3)$$

$$(3) \text{ in } (1) :\Rightarrow T - m_1 g = m_1 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) g$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m} \right) g \qquad (4)$$

$$(c)\ T = \frac{2 \times 2 \times 4}{2 + 4} \times 9.8 = 26.1\ N \qquad (5)$$

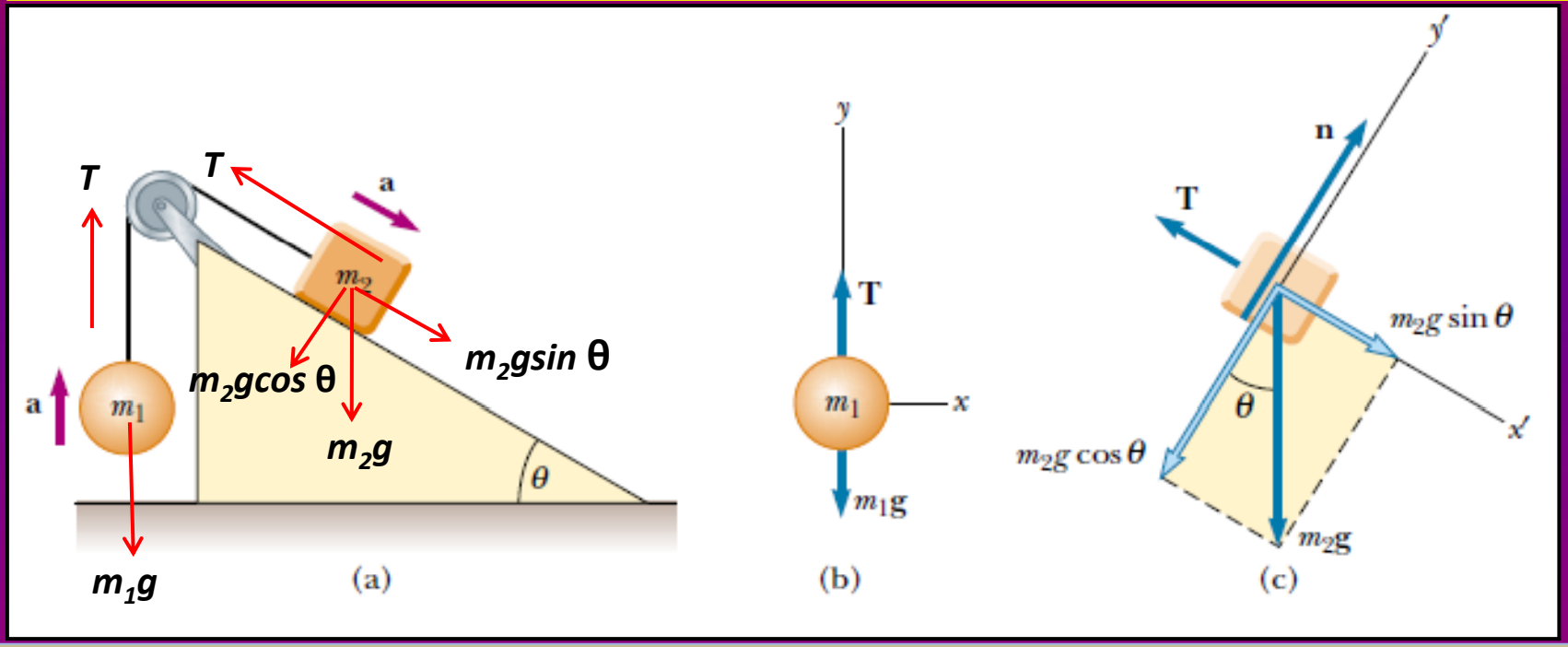
$$a = \frac{4 - 2}{4 + 2} \times 9.8 = 3.27\ m/s^2 \qquad (6)$$

SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

Acceleration of Two Objects Connected by a Cord تسارع جسمين مربوطين بحبل

- **مثال: 5.10:** عندما يتم ربط كتلتين مختلفتين m_1 و m_2 بحبل معدوم الوزن بحيث يمر على بكرة ملساء لا احتكاكية ومعدومة الوزن، ويكون الجسم الثاني مستقرا على سطح مائل بزاوية θ ولا احتكاكي. ثم يترك النظام يتحرك بحرية. فالمطلوب عادة هو: (أ) حساب التسارع. (ب) حساب الشد في الحبل. (ج) أوجد التسارع عندما: $m_1 = 10\ kg$ and $m_2 = 5\ kg$ and $\theta = 45^o$

- **الحل:** سوف نقوم باتباع نفس الخطوات في المثال السابق. وقد قمنا بتحليل القوى في الشكل نفسه.
- أذن نتوقع أن يكون لدينا 2 من المعادلات (معادلات الحركة) = عدد الأجسام الداخلة في النظام



SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

Atwood's Machine آلة أوتوود

$$m_2 : m_2 g \sin\theta - T = m_2 a \quad (1)$$

$$m_1 : T - m_1 g = m_1 a \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow m_2 g \sin\theta - m_1 g = (m_1 + m_2) a \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow a = \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2} \right) g \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (2) : \rightarrow T - m_1 g = m_1 \times \frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$\rightarrow T = m_1 \left[1 + \frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2} \right] g = m_1 \left[\frac{m_1 + m_2 + m_2 \sin\theta - m_1}{m_1 + m_2} \right] g$$

$$\rightarrow T = \left[\frac{1 + \sin\theta}{m_1 + m_2} \right] m_1 m_2 g \quad (5)$$

$$(c)\ a = \left(\frac{5 \sin 45 - 10}{10 + 5} \right) \times 9.8 = -4.22\ m/s^2 \quad (6)$$

• **ملاحظة مهمة:** من النتيجة في (6) يتبين أن التسارع سالب. أن هذا يدل على أن الفرضية التي افترضناها لعملية الدوران كانت غير صحيحة. ولكن هذا لا يؤثر في النتائج حيث أن الاتجاه الصحيح هو إلى اليسار (عكس عقارب الساعة) وقيمة التسارع لا تتغير.

تطبيقات على قوانين نيوتن SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS

قوى الاحتكاك FORCES OF FRICTION

- خلال الفقرات السابقة قلنا أكثر من مرة: سطح لا احتكاكي، فهل هذا الكلام دقيق؟
- في الحقيقة أنه غير دقيق تماما، أو على الأقل يصعب توفير سطوح لا احتكاكية. فإذن يوجد عادة احتكاك بين الأجسام المتحركة والسطوح.
- هناك نوعان من الاحتكاك، يسمى الأول: الاحتكاك السكوني Statick Friction والثاني يسمى: الاحتكاك الحركي Kinetic Friction .
- قوة الاحتكاك قوة مضادة للحركه دائما، وهي غير معروفة القيمة حتى تبدأ الحركة. ولكن يمكن معرفة القيمة القصوى للاحتكاك كما سوف نبين.
- يعرف الاحتكاك السكوني كما يلي: $f_s = \mu_s N$
- أما الاحتكاك الحركي فيعرف كما يلي: $f_k = \mu_k N$
- نضع في بالنا أن قوة الاحتكاك الحركي μ_k دائما أقل من قوة الاحتكاك السكوني. وبالتالي فإن معامل الاحتكاك الحركي أقل من معامل الاحتكاك السكوني μ_s
- الكمية N هي القوة ا لعمودية التي تحصل عادة بسبب جذب الأرض للجسم.
- لاحظ أن القيمة القصوى لمعاملات الاحتكاك هي 1 يرجى الاطلاع على جدول 5.2 لمعرفة بعض القيم.

- **كويز:** هناك صندوق يستقر على ظهر شاحنة. تسارعت الشاحنة إلى اليمين، ولكن الصندوق ظل متحركا معها ولم ينزلق. فأين اتجاه قوة الاحتكاك المؤثرة على الصندوق؟ إلى اليمين؟ أم إلى اليسار؟

- **الحل:** بما أن حركة الصندوق هي نفسها حركة السيارة، إذن بالتأكيد اتجاه قوة الاحتكاك إلى اليمين.

تطبيقات على قوانين نيوتن SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS

تسارع جسمين مربوطين بحبل عند وجود الاحتكاك

• **مثال: 5.10: بالاحتكاك:** عندما يتم ربط كتلتين مختلفتين m_1 و m_2 بحبل معدوم الوزن بحيث يمر على بكرة ملساء لا احتكاكية ومعدومة الوزن، ويكون الجسم الثاني مستقرا على سطح مائل بزاوية θ ومعامل احتكاكه الحركي هو 0.4 ، ثم يترك النظام يتحرك بحرية. فالمطلوب هو: (أ) معادلة حركة الجسم الأول. (ب) معادلة حركة الجسم الثاني. (ج) أوجد التسارع عندما: $m_1 = 10\ kg$ and $m_2 = 5\ kg$ and $\theta = 45^o$

• **الحل:** نفس الحل السابق ولكن نقوم بأضافة قوة الاحتكاك (كقوة سالبة) في معادلة حركة الجسم m_2 . كما يرجى ملاحظة استخدام فرضية اتجاه الدوران الصحيحة وليس الاتجاه السابق الخاطئ حيث أن هذا سوف يعطي قوة الاحتكاك الأشارة الخاطئة.

$$m_2 : T - m_2 g \sin\theta - m_2 g \mu_k \cos\theta = m_2 a \qquad (1)$$

$$m_1 : m_1 g - T = m_1 a \qquad (2)$$

for $m_1 = 10\ kg$ and $m_2 = 5\ kg$ and $\mu_k = 0.4$ and $\theta = 45^o$:

$$\rightarrow T - 5(9.8)\sin 45 - 5(9.8)(0.4)\cos 45 = 5a$$

$$\rightarrow T - 34.65 - 13.86 = 5a \rightarrow T - 48.51 = 5a \qquad (3)$$

$$10(9.8) - T = 10a \rightarrow 98 - T = 10a \qquad (4)$$

$$(3) + (4) : 49.49 = 15a \rightarrow a = 3.3\ m/s^2$$

• **ملاحظة:** لاحظ أن الاحتكاك سبب تناقصا في مقدار التسارع كما هو متوقع.

تطبيقات على قوانين نيوتن SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS

قوى الاحتكاك FORCES OF FRICTION

- خلال الفقرات السابقة قلنا أكثر من مرة: سطح لا احتكاكي، فهل هذا الكلام دقيق؟
- في الحقيقة أنه غير دقيق تماما، أو على الأقل يصعب توفير سطوح لا احتكاكية. فإذن يوجد عادة احتكاك بين الأجسام المتحركة والسطوح.
- هناك نوعان من الاحتكاك، يسمى الأول: الاحتكاك السكوني Static Friction والثاني يسمى: الاحتكاك الحركي Kinetic Friction .
- قوة الاحتكاك قوة مضادة للحركة دائما، وهي غير معروفة القيمة حتى تبدأ الحركة. ولكن يمكن معرفة القيمة القصوى للاحتكاك كما سوف نبين.
- يعرف الاحتكاك السكوني كما يلي: $f_s = \mu_s N$
- أما الاحتكاك الحركي فيعرف كما يلي: $f_k = \mu_k N$
- نضع في بالنا أن قوة الاحتكاك الحركي μ_k دائما أقل من قوة الاحتكاك السكوني. وبالتالي فإن معامل الاحتكاك الحركي أقل من معامل الاحتكاك السكوني μ_s
- الكمية N هي القوة ا لعمودية التي تحصل عادة بسبب جذب الأرض للجسم.
- لاحظ أن القيمة القصوى لمعاملات الاحتكاك هي 1 يرجى الاطلاع على جدول 5.2 لمعرفة بعض القيم.

- **كويز:** هناك صندوق على ظهر شاحنة، تحركت الشاحنة بتسارع إلى اليمين ولكن الصندوق لم ينزلق. أين اتجاه قوة الاحتكاك بالنسبة للصندوق؟ إلى اليمين مع الشاحنة؟ أم إلى اليسار ضد الشاحنة؟

- **الإجابة:** حيث أن الصندوق لم ينزلق، إذن اتجاه قوة الاحتكاك إلى اليمين.

SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

FORCES OF FRICTION قوى الاحتكاك

• **مثال: 5.13:** هناك قرص يتحرك على مستوى ثلجي، تم إعطاؤه سرعة ابتدائية مقدارها 20 m/s . إذا تحرك القرص مسافة 115 m قبل أن يتوقف تماما، فاحسب معامل الاحتكاك الحركي.

given : $v_{xi} = 20 \text{ m/s}, \quad v_{xf} = 0, \quad x_f = 115 \text{ m}, \quad x_i = 0 \text{ m}$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\rightarrow -f_k = ma_x \rightarrow -mg\,\mu_k = ma_x \qquad (1)$$

$$\because v_{xf}^2 = v_{xi}^2 - 2a_x(x_f - x_i)$$

$$\therefore 0 = 400 + 2(a_x)(115) \rightarrow a_x = -\frac{400}{2 \times 115} = -1.74 \ m/s^2 \qquad (2)$$

(2) in (1) for a_x :

$$\rightarrow \mu_k = -\frac{m}{mg}(-1.74) = 0.177$$

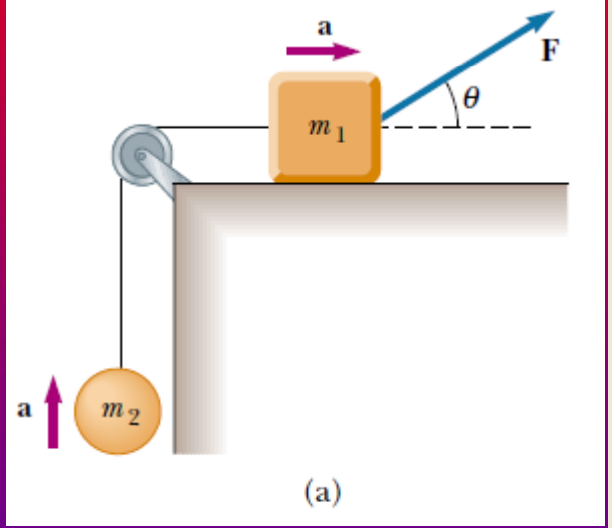
• إذن معامل الاحتكاك دائما أقل أو يساوي الواحد، ودائما موجب الإشارة، وبدون وحدات. لاحظ أن f_k عندما تكتب مجهولة فأننا نعطيها إشارة (-) لأن الأصل أنها ضد الحركة.

• لاحظ أن معادلة (1) تعطي التسارع a_x قيمة قصوى هي g وذلك عندما يكون معامل الاحتكاك يساوي 1. فهل تتذكر عندما ذكرنا سابقا أن تسارع السيارة يفترض أن لا يزيد عن g ؟ وكذلك تباطؤها.

SOME APPLICATIONS OF NEWTON'S LAWS تطبيقات على قوانين نيوتن

FORCES OF FRICTION قوى الاحتكاك

- **مثال: 5.14:** كما هو موضح في الشكل. مطلوب حساب تسارع المجموعة.



(a)

أثر الاحتكاك يظهر على الجسم الثاني من خلال الشد فقط.

equations of motion for m_1 and m_2 :

$$m_1 : \sum f_x = F\cos\theta - T - N\mu_k = m_1 a \qquad (1)$$

$$N = m_1 g - F\sin\theta$$

$$(1) \rightarrow F\cos\theta - T - (m_1 g - F\sin\theta)\mu_k = m_1 a \qquad (2)$$

$$m_2 : \sum f_y = T - m_2 g = m_2 a \qquad (3)$$

$$(2) + (3) : \rightarrow$$

$$F\cos\theta - (m_1 g - F\sin\theta)\mu_k - m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

$$\therefore a = \frac{F(\cos\theta + \sin\theta\mu_k) - g(m_1\mu_k + m_2)}{m_1 + m_2}$$

- **ملاحظات:** تأمل كيف حسبنا القوة العمودية المؤثرة على الجسم الأول. فحيث أن مركبة F إلى أعلى تؤدي إلى نقصان في القوة العمودية فقد قمنا بطرحها. لو كانت F مائلة للأسفل لقمنا بإضافة المركبة بدل طرحها.
- الجسم الأول هو فقط من تأثر مباشرة بقوة الاحتكاك، أم الجسم الثاني فهو لا يتأثر بها ولا تظهر في معادلة الحركة التابعة لهذا الجسم.

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

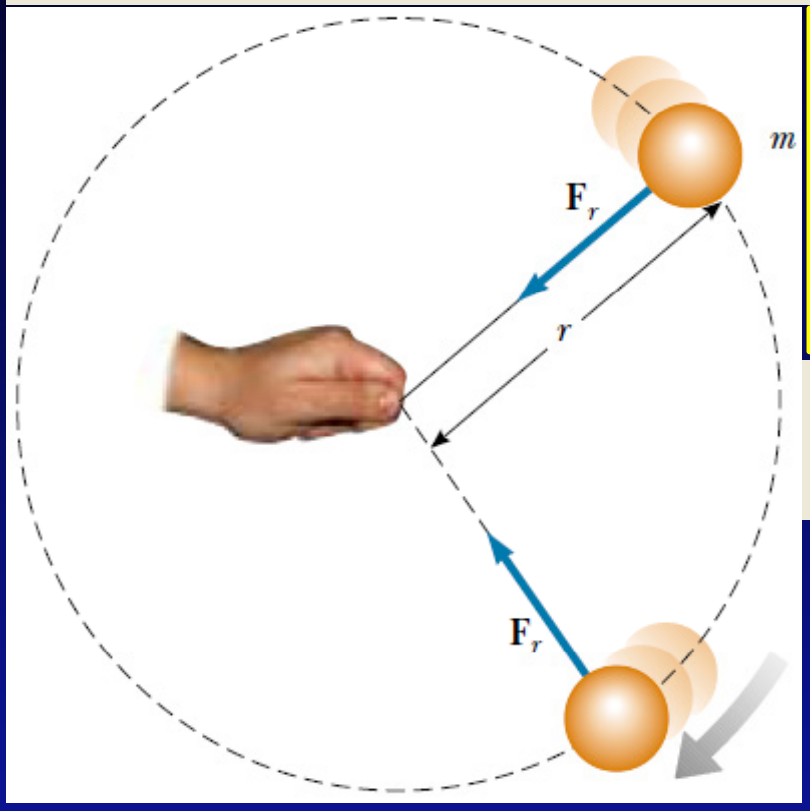
المحاضرة رقم: 12

الحركة الدائرية وتطبيقات أخرى على قوانين نيوتن Circular Motion

6.1 تطبيق قانون نيوتن الثاني على الحركة الدائرية

- سبق في فصل آخر أن ناقشنا التسارع المركزي للحركة الدائري وقمنا باشتقاق هذا التسارع كما يلي:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$



- حيث سبق الحديث عن قانون نيوتن الثاني والذي فحواه أن القوة عبارة عن الكتلة مضروبة في التسارع.
- إذن الجسم الذي كتلته m على اليسار في الشكل يتعرض لقوة جذب مركزي نعبر عنها باستخدام قانون نيوتن كما يلي:

$$\sum F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r} \qquad (6.1)$$

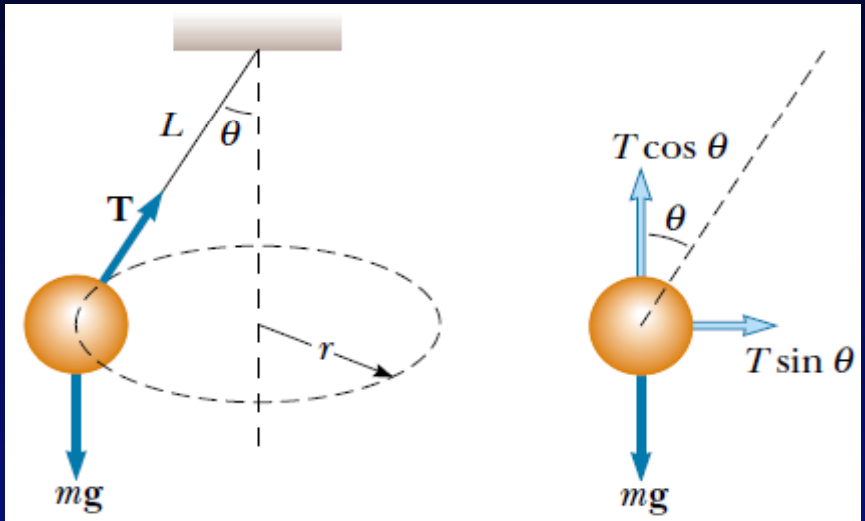
- هذه القوة هي باتجاه المركز، والتسارع كذلك باتجاه المركز، والتسارع دائما متعامدا مع السرعة v .
- عندما ينقطع الحبل الذي يمسك الكتلة فأنها تتحرك باتجاه المماس.

- في الشكل التالي رسم توضيحي لما يمكن أن يحصل للكتلة لو انقطع الحبل.

الحركة الدائرية وتطبيقات أخرى على قوانين نيوتن Circular Motion

6.1 تطبيق قانون نيوتن الثاني على الحركة الدائرية

- مثال 6.3 : البندول القمعي Conical Pendulum:
- توصف الكتلة m المدلات بحبل بحيث تدور في حلقة أفقية بسرعة ثابتة بأنها البندول القمعي لأن الشكل المرسوم بواسطة الحبل يشبه القمع. المطلوب هو حساب سرعة الدوران.



- الحل: نقوم بتحليل القوى المؤثرة على الكتلة:
- (1) هناك قوة جذب الأرض رأسيا إلى أسفل mg
- (2) هناك قوة الشد T وتحلل إلى مركبتين:
- Tcosa إلى اعلى
- Tsina إلى الداخل باتجاه مركز الدوران
- (3) وهناك القوة المركزية: mv^2/r
- نقوم بالاستفادة من هذه القوى الثلاث لأيجاد المطلوب.

$$T\cos\vartheta = mg \quad \rightarrow T = \frac{mg}{\cos\vartheta} \quad , \sum F_r = T\sin\vartheta = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$

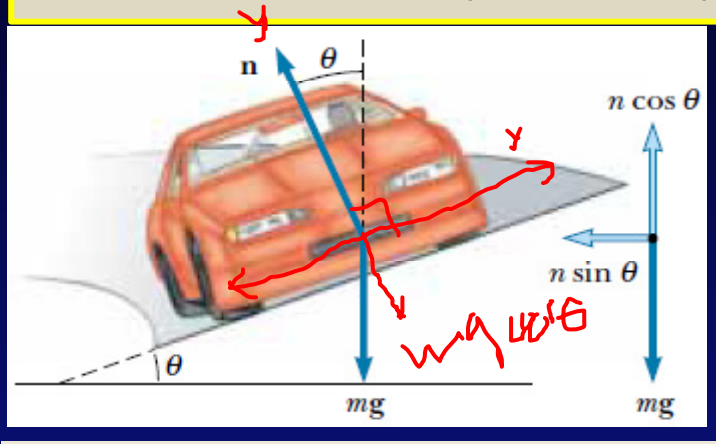
$$\rightarrow \frac{mg}{\cos\vartheta}\sin\vartheta = mg\tan\vartheta = \frac{mv^2}{r}, \rightarrow v = \sqrt{gr\tan\vartheta}$$

$$\because r = L\sin\vartheta \rightarrow v = \sqrt{gLin\ \vartheta\tan\vartheta}$$

الحركة الدائرية وتطبيقات أخرى على قوانين نيوتن Circular Motion

6.5 تطبيق قانون نيوتن الثاني على الحركة الدائرية في مسار مائل

• مثال 6.5 : يرغب مهندس طرق أن يصمم أحد المخارج على الطريق السريع بحيث يسمح للسيارات بالمرور بسرعات معينة حتى في ظروف وجود صقيع أو ثلوج على الطريق. فقام بجعل الطريق مائلا بزاوية معينة ومنحنيا بنصف قطر معين. فإذا كان يستهدف سرعات قصوى للسيارات تعادل 13.4 m/s وكان نصف قطر انحناء الطريق هو 50 m فكم يتوجب أن تكون زاوية ميل الطريق؟



• الحل: في الظروف الطبيعية عندما تدور السيارة في مسار منحن فأن ما يمنعها من الانزلاق هو قوى الاحتكاك بين عجلات السيارة والأرض.

• ولكن عندما يكون الطريق مغطى بالثلوج فهذه القوة غير متوفرة، مما يجعل السيارة تنزلق مباشرة.

• ولكن يمكن هندسيا أن نجعل الطريق مائلا فيمنع السيارة.

$$n\cos\vartheta = mg \quad \rightarrow n = \frac{mg}{\cos\vartheta} \quad , \sum F_r = n\sin\vartheta = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$

$$\rightarrow \frac{mg}{\cos\vartheta}\sin\vartheta = mg\tan\vartheta = \frac{mv^2}{r}$$

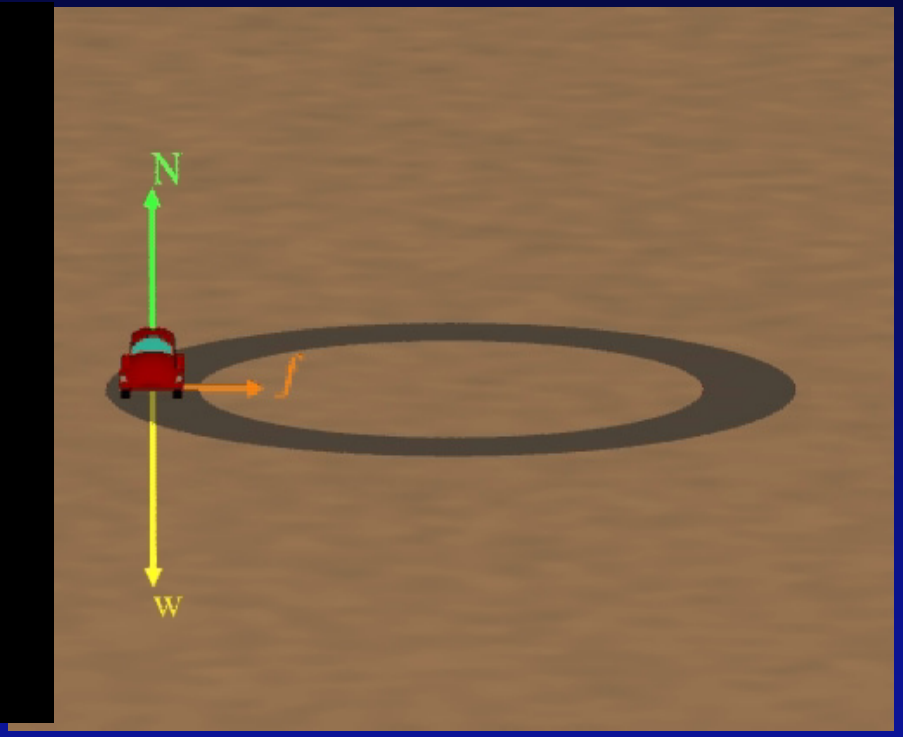
$$\therefore \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{gr}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{13.4^2}{9.8\times 50}\right) = 20.1^o$$

الحركة الدائرية وتطبيقات أخرى على قوانين نيوتن Circular Motion

تطبيق قانون نيوتن الثاني على الحركة الدائرية في مسار مائل

- لاحظ في المثال السابق أن درجة الميل مستقلة عن كتلة السيارة، بمعنى أن الطريق مناسب للسيارات جميعها بغض النظر عن كتلها واحجامها. كذلك نلاحظ أنه لو وجد احتكاك بجانب ميل الطريق فأن القوى التي تمنع السيارات من الانزلاق سوف تصبح أقوى ونعبر عنها بحسب قانون نيوتن الثاني كما يلي:

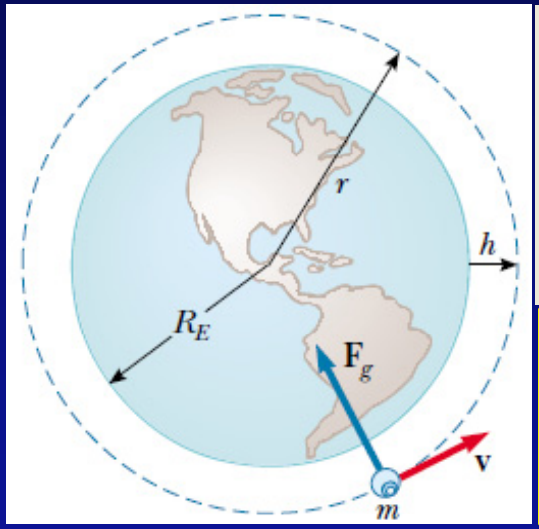
$$\sum F_r = n \sin \vartheta + f_s \cos \vartheta = ma_r = \frac{mv^2}{r}$$



الحركة الدائرية وتطبيقات أخرى على قوانين نيوتن Circular Motion

6.6 حركة الأقمار الصناعية

- القمر الصناعي عبارة عن جسم له كتلة معينة يتم أطلاقه لكي يوجد بصفة دائمة أو مؤقتة فوق سطح الأرض. والأقمار الصناعية تنقسم من حيث موقعها إلى قسمين: الأول: قمر صناعي مثبت في مكان ما بحيث يظل في مكانه من حيث الارتفاع ومن حيث الموقع من سطح الأرض مثل تلك الأقمار المستخدمة في البث التلفزيوني. والنوع الأخر هو تلك الأقمار التي تدور حول الكرة الأرضية بسرعة ما بحسب الأرتفاع وبحسب الأهداف المطلوبة من هذا القمر.
- في هذه الفقرة سوف نقوم بدراسة القوى المؤثرة على القمر والتي تتحكم في حركته.
- مثل ما فعلنا مع البندول سابقا، هناك قوتان الأولى قوة جذب الأرض للقمر، والثانية القوة الناتجة من الطرد المركزي بسبب الدوران. وعندما تتساوى القوتان فأن القمر يكون على ارتفاع ثابت.



$$F_r = F_g = G\frac{mM_E v^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

- R_E تمثل نصف قطر الأرض، و h ارتفاع القمر عن سطح الأرض.
- إذن سرعة الدوران تعتمد فقط على ارتفاع القمر عن سطح الأرض. كلما زاد الأرتفاع قلت السرعة المطلوبة

الحركة الدائرية وتطبيقات أخرى على قوانين نيوتن Circular Motion

6.6 حركة الأقمار الصناعية

- مثال حسابي: إذا كان ارتفاع القمر الصناعي 1000 km عن سطح الأرض، وكان نصف قطر الأرض هو: $R_E = 6.37\times10^6$ m وكتلة الأرض هي: $M_E=5.98\times10^{24}$ kg فاحسب سرعة دوران القمر حول الأرض واحسب كذلك زمنه الدوري (زمن دوره كاملة).

$$v=\sqrt{\frac{GM_E}{R_E+h}}=\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{6.37\times10^6+1\times10^6}}=7\times10^3\ m/s$$

$$period=\frac{\text{totaldistance}}{v}=\frac{2\pi(6.37\times10^6+1\times10^6)}{7\times10^3}=110\text{minutes}$$

- هناك حالات يكون فيها القمر الصناعي مثبتا حول موقع معين بالنسبة لسطح الأرض.
- في هذه الحالة نعرف زمنه الدوري وهو 24 ساعة بالضبط.
- وبالتالي فيمكن حساب السرعة كذلك بدقة من المعادلات السابقة.
- ومن هذه المعلومات يمكن حساب الارتفاع بشكل دقيق.
- طبعا لا يمكن تثبيت القمر الصناعي بشكل دقيق ودائم، حيث ان المؤثرات عليه ليست محددة بشكل كامل وتحت السيطرة. لذا قد يلزم تصحيح الوضع من وقت إلى آخر بطرق آليه مرتبطة بالقمر بشكل مباشر.

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

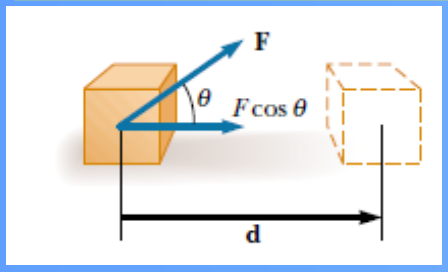
nalzayed@ksu.edu.sa

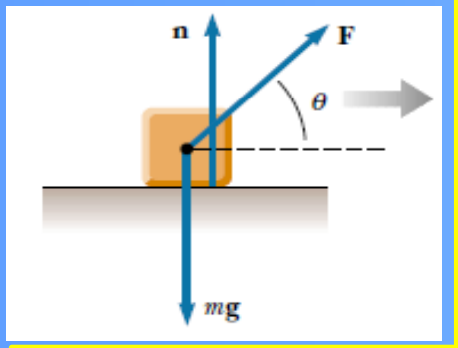
المحاضرة رقم: 13

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

7.1 الشغل الذي تقوم به قوة ثابتة Work Done by a const. force

• عندما تؤثر قوة مستمرة (ثابتة) ***F*** على جسم ما، ويتحرك الجسم تحت تأثير هذه القوة مسافة ***d*** بحيث تكون الزاوية بين هذه المسافة واتجاه القوة هي θ فأن الشغل يعرف كما يلي: $W = Fd\cos\theta$





• من المهم أن نفهم المعادلة التي تعرف الشغل. فكما هو ملاحظ فأن الشغل يعتمد على الزاوية، ولذلك فعندما تكون الزاوية 90° ومعنى ذلك أن القوة المؤثرة متعامدة مع اتجاه حركة الجسم، فأن الشغل الناتج يساوي الصفر.

• مثال ذلك: عندما نقوم بتحريك جسم ما تحت تأثير الجاذبية الأرضية بصورة أفقية، فأن الشغل الذي تبذله الجاذبية يساوي الصفر.

• يرجى الانتباه لإشارة الشغل W: عندما تكون الطاقة مفيدة للنظام فأن الشغل الذي بذلها موجبا، وعندما تكون في غير صالح النظام (ضده) فالشغل عند ذلك يعطى إشارة سالب. بمعنى آخر عندما يكون الجسم هو الذي يبذل طاقة الشغل فالشغل ساعتها يعتبر سالبا.

• مثال: 7.1 يقوم عامل النظافة بجذب المكنسة بزاوية 30° ولمسافة 3 أمتار بقوة مقدارها 50 N .

• (أ) احسب الشغل الذي يبذله العامل على المكنسة.

•(ب) احسب الشغل لو كانت القوة 32 N ولكن بصورة أفقية تماما.

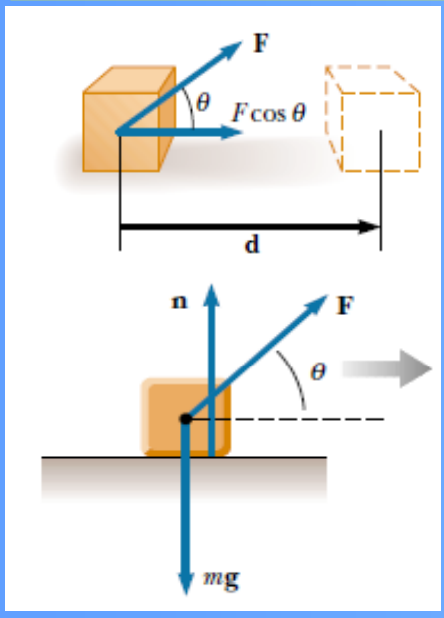
$$(a)\ W = Fd\cos\vartheta = 50\times 3\times\cos 30 = 130\ J$$

$$(b)\ W = Fd\cos\vartheta = 32\times 3\times\cos 0 = 96\ J$$

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

7.1 الشغل الذي تقوم به قوة ثابتة Work Done by a const. force

• عندما تؤثر قوة مستمرة (ثابتة) ***F*** على جسم ما، ويتحرك الجسم تحت تأثير هذه القوة مسافة ***d*** بحيث تكون الزاوية بين هذه المسافة واتجاه القوة هي θ فأن الشغل يعرف كما يلي: $W = Fd\cos\theta$

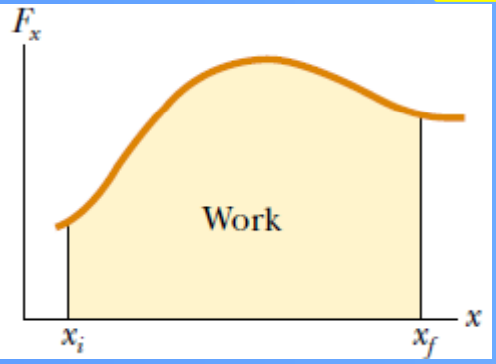


• من المهم أن نفهم المعادلة التي تعرف الشغل. فكما هو ملاحظ فأن الشغل يعتمد على الزاوية، ولذلك فعندما تكون الزاوية 90º ومعنى ذلك أن القوة المؤثرة متعامدة مع اتجاه حركة الجسم، فأن الشغل الناتج يساوي الصفر.

• مثال ذلك: عندما نقوم بتحريك جسم ما تحت تأثير الجاذبية الأرضية بصورة أفقية، فأن الشغل الذي تبذله الجاذبية يساوي الصفر.

• وحدة الشغل بحسب نظام SI هو: N.m (نيوتن . متر)، ولكن جرت العادة باستخدام وحدة الجول Joule (J) نسبة إلى العالم جول الذي له مساهمات في هذا الجانب.

• عندما يكون اتجاه القوة هو نفسه اتجاه الحركة فأن الشغل: $W = Fd$.

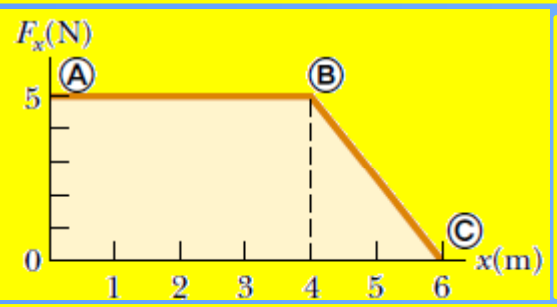


• الشغل الذي تبذله قوة متغيرة: عندما تكون القوة F متغيرة فأن الشغل يعطى بطريقة التكامل كما يلي:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \qquad (7.7)$$

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

مثال محلول على حساب الشغل من الر سم البياني



• **مثال: 7.4** في بعض الأحيان يطلب حساب الشغل من الرسم البياني. على اليسار رسم بياني يوضح تغير القوة مع الموقع. والمطلوب هو حساب الشغل الكلية الذي تقوم به هذه القوة ابتداء من x = 0 m وحتى x = 6 m أي حساب الشغل الكلي خلال المراحل المبينة من A وحتى C

• **الحل**: بحسب ما أخذناه في الفقرة السابقة، فأن الشغل الذي تقوم به قوة متغيره، هو عبارة عن التكامل. والتكامل معناه: حساب المساحة تحت المنحنى. طبعا حساب المساحة تحت المنحنى يصلح مع القوة الثابتة والقوة المتغيرة، والقوة التي تتغير في مناطق معينة كما في المثال.

• إذن نحتاج فقط لحساب المساحة الكلية تحت المنطقة المطلوبة.

• إذن الشغل = المساحة الأولى (المستطيل) + المساحة الثانية (المثلث)

• = 4 x 5 + 0.5 x 2 x 5 = 20 + 5 = 25 جول

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

الشغل الذي يقوم به زنبرك Work Done by a Spring

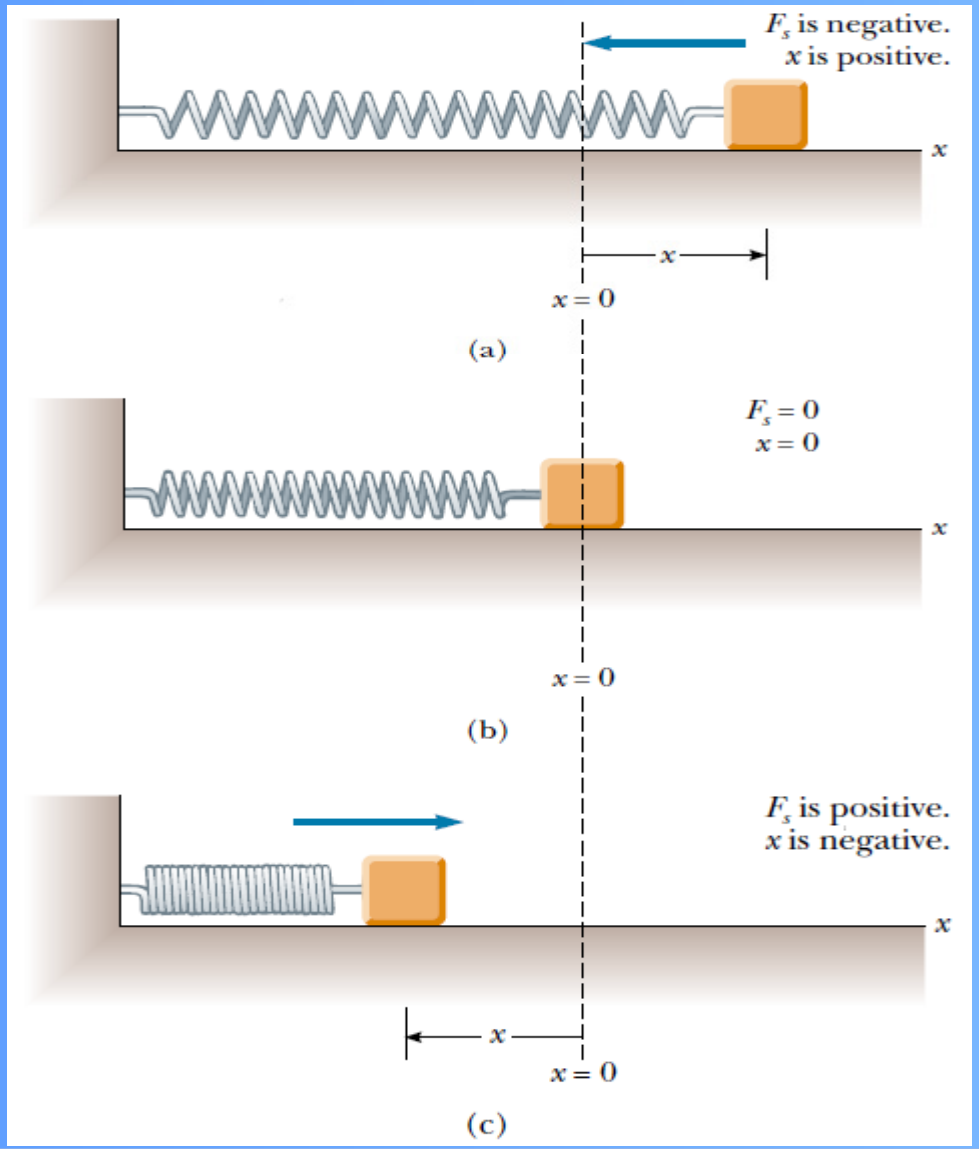
• تعطى قوة الزنبرك بالعلاقة: $F = -kx$ حيث k هو ثابت الزنبرك (وهذا يسمى قانون هوك)

• إذن قوة الزنبرك تعتبر قوة متغيرة حيث تعتمد على قيمة تمدد الزنبرك x

• إذن يلزم أن نستخدم علاقة التكامل لحساب شغل هذه القوة.

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

الشغل الذي يقوم به زنبرك Work Done by a Spring



• يمكن كتابة الشغل الناتج من قوة زنبركية كما يلي:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x}^{0} (-kx) dx$$

$$= \frac{1}{2} kx^2 \qquad (7.10)$$

• لاحظ من الرسم: عندما تؤدي القوة إلى:
سحب الزنبرك: تصبح القوة + و x سالبة (-)
ضغط الزنبرك: تصبح القوة – و x موجبة (+)
• النتيجة: الشغل الذي يقوم به الزنبرك دائما موجب ويعبر عنه بالعلاقة (7.10)
• دائما بداية الإزاحة عند x = 0 بحيث يكون السحب إلى اليمين + والضغط إلى اليسار –
• عادة يتم إهمال الاحتكاك مع الوسط المحيط، ولكن يجوز أن تكون الكتلة على سطح احتكاكي

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

7.4 الطاقة الحركية و نظرية الشغل – الطاقة K.E. and the work – k.e. theorem

- الشغل يمكن أن يتحول إلى طاقة حركة وطاقة الحركة يمكن أن تتحول إلى شغل.
- تعرف الطاقة الحركية لجسم كتلته m وسرعته v كما يلي: (7.14) $K = \frac{1}{2} mv^2$
- نظرية الطاقة الحركية – الشغل تنص على أن الشغل يغير من الطاقة الحركية:

$$\sum W = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - \frac{1}{2} m v_i^{\,2} = \Delta K \rightarrow \sum W + K_i = K_f \qquad (7.15)$$

- **مثال 7.7**: قالب كتلته 6.0 kg كان في البداية في حالة سكون. تم جذبه أفقيا بقوة مقدارها 12 N على سطح لا احتكاكي. احسب سرعة القالب بعدما يتحرك مسافة 3 m.

- **الحل**: الشغل المبذول بواسطة القوة خلال 3 أمتار تحول بالكامل إلى طاقة حركية (لا يوجد احتكاك).

$$W = Fd\cos\vartheta = 12 \times 3 \times \cos 0 = 36\,J \qquad (1)$$

$$\because W = K_f - K_i \rightarrow 36 = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - 0 = \frac{1}{2}(6) v_f^{\,2} \rightarrow v_f = 3.5\,m/s \qquad (2)$$

- **كويز**: تأكد من صحة الحل (2) بطريقة ثانية.

$$\because F = ma \rightarrow 12 = 6a \rightarrow a = 2\ m/s^2 \qquad (1)$$

$$\because v_f^{\,2} = v_i^{\,2} + 2ax \rightarrow v_f^{\,2} = 0 + 2(2)(3) = 12 \rightarrow v_f = 3.5\,m/s \qquad (2)$$

• **مثال 7.8**: قالب كتلته 6.0 kg كان في البداية في حالة سكون. تم جذبه أفقيا بقوة مقدارها 12 N على سطح لا احتكاكي. احسب سرعة القالب بعدما يتحرك مسافة 3 m. مع وجود احتكاك معامله μ_k=0.15.

• **الحل**: الشغل المبذول بواسطة القوة خلال 3 أمتار تحول جزئيا إلى طاقة حركية (بسبب الاحتكاك). الجزء الآخر تبدد بسبب الاحتكاك (لذا يتم طرحه). نتوقع أن تكون السرعة النهائية أقل.

$$\because \sum W = W_F - W_f = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow (Fd\cos\vartheta) - (f_k\mu_k d) = (Fd\cos\vartheta) - (mg\mu_k d) = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - 0$$

$$\rightarrow (12\times 3\times 1) - (6\times 9.8\times 0.15\times 3) = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - 0$$

$$\rightarrow 36 - 26.5 = 9.5 = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} \rightarrow v_f = 1.8\,m/s \qquad (2)$$

• لو قمنا بحساب التسارع وكذلك السرعة باستخدام قوانين الحركة المنتظمة وقوانين نيوتن كما في المثال السابق فنتوقع أن يكون التسارع أقل. إذن نقوم دائما بإعطاء الشغل الإيجابي (لصالح الجسم) أشارة + والشغل السلبي (مثل شغل الاحتكاك ومقاومة الهواء ونحو ذلك) أشارة – لأنه يقلل من الطاقة الكلية الناتجة.

- **مثال 7.11**: قالب كتلته 16.0 kg مربوط بزنبرك بحيث يتحرك بصورة أفقية على سطح لا احتكاكي. إذا علمت بأن ثابت الزنبرك هو: $k = 1\times10^3$ N/m وتم ضغط الزنبرك لمسافة 2 cm ثم ترك.
- (أ) احسب سرعة القالب لحظة مرورة بنقطة الاتزان $x = 0$.
- (ب) احسب السرعة مرة أخرى عند نفس الموقع ولكن عندما يكون هناك قوة احتكاك مقدارها 4 N .

- **الحل**: نلاحظ أن القالب بدأ الحركة من نقطة $x = -2$ cm وكانت السرعة عند هذه النقطة $v_i = 0$ m/s ونريد حساب السرعة v_f عند النقطة $x = 0$ cm . سوف نستخدم نفس العلاقات السابقة كما يلي:

$$(a)\because \sum W = W_{spring} = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_i^{\,2} \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(1\times10^3)(-2\times10^{-2})^2 = \frac{1}{2}(1.6)v_f^{\,2} - 0$$

$$\rightarrow v_f^{\,2} = \frac{(1\times10^3)(-2\times10^{-2})^2}{1.6} = 0.25 \rightarrow v_f = 0.5\,m/s \qquad (2)$$

$$(b)\sum W = W_{spring} - W_f = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_i^{\,2} \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - fx = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - 0 \qquad (3)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(1\times10^3)(-2\times10^{-2})^2 - 4\times2\times10^{-2} = \frac{1}{2}(1.6)v_f^{\,2}$$

$$\rightarrow v^2_f = \frac{(0.5)(1\times10^3)(-2\times10^{-2})^2 - 4\times2\times10^{-2}}{(0.5)(1.6)} = 0.15 \rightarrow v_f = 0.39\,m/s \qquad (4)$$

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

7.5 القدرة Power P

- عندما يتقدم طالبان لتأدية الامتحان ويتمكن أحدهما من الانتهاء من الامتحان بدرجة كاملة خلال 1 ساعة فقط، في حين يحتاج الطالب الآخر إلى 3 ساعات ولكنه يحصل في النهاية على نفس الدرجة. في هذه الحالة مع أن كلا الطالبين أجاب على جميع الأسئلة، إلا أن الطالب الأول يبدو أقدر وأفضل وأذكى من الطالب الثاني.
- إذن معيار الزمن (سرعة الإنجاز) لها اعتبار خاص ودلالة لا يمكن إغفالها.
- فلو كان لدينا قوتان تنجزان نفس الشغل ولكن تقوم الأولى بإنجازه في 10 دقائق والثانية في خلال 30 دقيقة فأن القوة الأولى أفضل من الثانية.
- نسمى المصطلح الذي يفرق بين القوى في سرعة الإنجاز بالقدرة Power فالجهاز الذي يعطى طاقة مماثلة ولكن في زمن أقل هو أكثر (قدرة) من الجهاز الآخر. إذن القدرة هي الشغل مقسوما على الزمن:
- نحسب فيما يلي متوسط القدرة ثم القدرة اللحظية، أو بشكل عام (القدرة):

$$\overline{P} \equiv \frac{W}{\Delta t}$$

Instantano us Power P :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F}.\vec{S})}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \qquad (7.18)$$

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

7.5 القدرة Power P

- الوحدة الرسمية للقدرة تشتق من نفس المعادلة J/s ولكن يطلق على هذه الوحدة كذلك: الواط watt. رمز الواط هو W وهو نفس رمز الشغل ولكن من دون ميلان (الشغل *W*).
- هناك وحدة أخرى للقدرة منتشرة فيما يتعلق بالآلات تسمى الحصان *hp* حيث: $1\ hp = 746\ W$
- هناك مصطلح آخر يستخدم خاصة في الطاقة سواء كهربائية أو غيرها، ويسمى كيلواط-ساعة kWh وهو عبارة عن الطاقة الكلية المستهلكة في ساعة واحده بمعدل كيلواط kW
- إذن $1kWh = 1000\ W \times 3600 = 3.6 \times 10^6\ J$ (kWh وحدة طاقة وليست وحدة قدرة)

- **مثال للتوضيح**: مصباح كهربائي قدرته 28 W يعطي نفس إضاءة مصباح آخر قدرته 100 W ولكن قيمته 17 ريالا في حين يكلف المصباح الآخر نصف ريال فقط. العمر الافتراضي للمصباح الغالي 10,000 ساعة في حين أن العمر الافتراضي للثاني هو فقط 750 ساعة عمل. ما هو مقدار التوفير في المصباح الغالي عندما يتم استعماله لعمر افتراضي واحد؟ قيمة كيلواط-ساعة يعادل 8 هللات.

- **الحل**: كلفة المصباح الغالي الكهربائية $28 \times 10{,}000 \times 0.08/1000 = 22.4$ SR
- الكلفة الكلية (قيمة المصباح + كلفة الكهرباء): $22.4 + 17 = 39.4$ SR
- كلفة المصباح الثاني (الرخيص) الكهربائية: $100 \times 10{,}000 \times 0.08/1000 = 80$ SR
- عدد المصابيح اللازمة (بسبب قصر العمر): $10{,}000 / 750 = 13.3$
- الكلفة الكلية للمصباح الرخيص: $13.3 \times 0.5 + 80 = 87$ SR
- إذن هناك حوالي 47 ريالا توفير في مصباح واحد فقط

الباب السابع: الشغل والطاقة الحركية Work & Kinetic Energy

7.5 القدرة Power P

• **مثال 7.12** (القدرة التي يقدمها محرك المصعد): تبلغ كتلة مصعد 1000 kg مضافا لها كتلة الركاب 800 kg وتؤثر عليه قوة احتكاك بصورة مستمرة مقدارها 4000 N .

(أ) ما هو الحد الأدنى لقدرة محرك المصعد حتى يضمن له سرعة صعود مستمرة مقدارها 3 m/s ؟

(ب) ما هو الحد الأدنى للقدرة إذا كان مطلوبا من المحرك أن يعطي تسارعا مقداره 1 m/s² ؟

• **الحل: (أ)** نلاحظ أن سرعة الصعود ثابتة مما يدل على أن التسارع a = 0 m/s² . نقوم بكتابة معادلة الحركة أولا للنظام باستخدام قانون نيوتن الثاني كما يلي:

$$(a)\ \sum F_y = T - f - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow T = f + mg = 4\times10^3 + (1800)\times 9.8 = 2.16\times10^4\ N$$

$$\because P = \vec{T}.\vec{v} = Tv = 2.16\times10^4 \times 3 = 6.48\times10^4\ \text{W} \qquad (2)$$

• **الحل: (ب)** لا تختلف هذه الفقرة عن سابقتها إلا بكون a ≠ 0 :

$$(b)\ \sum F_y = T - f - mg = ma \qquad (3)$$

$$\rightarrow T = f + mg + ma = 4\times10^3 + (1800)\times 9.8 + (1800)\times 1 = 2.34\times10^4\ N$$

$$\because P = \vec{T}.\vec{v} = Tv = 2.34\times10^4 \times 3 = 7.02\times10^4\ \text{W} \qquad (4)$$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 14

الفصل الثامن: طاقة الوضع وحفظ الطاقة Pot. Energy & Cons. of Energy

8.1 طاقة الوضع Potential Energy

- تحدثنا سابقا عن الطاقة الحركية كنوع من أنواع الطاقة. ولكن هناك نوع آخر من أنواع الطاقة هو: طاقة الوضع potential energy ورمزها U . وهناك عدة أمثلة أو صور من هذه الطاقة. منها:
- طاقة وضع الأرض Gravitational Pot. Energy :
- ببساطة عندما يكون هناك جسم كتلته m يرتفع عن الأرض مسافة y فأن طاقة وضعه هي: $U_g = mgy$
- طاقة وضع الزنبرك: سبق ذكر هذه الطاقة التي نعبر عنها بالصورة: $U_s = ½\ kx^2$.
- تنقسم القوى التي نعرفها إلى قسمين: قوى محافظة Conservative وقوى غير محافظة Nonconservative .
- تعريف القوى المحافظة: هناك صفتان تتصف بهما القوى المحافظة:

(1) الشغل المبذول على جسم ما لتحريكه من موقع إلى آخر لا يعتمد على المسار.

(2) عندما يتم نقل جسم ما من مكان إلى آخر ثم يعاد إلى مكانه الأصلي فإن الشغل المبذول عليه = صفر

- من أمثلة هذه القوى (المحافظة) قوى الجذب الكوني (الجذب الأرضي مثلا)
- تعريف القوى غير المحافظة: كل القوى التي لا تنطبق عليها مواصفات القوى المحافظة فهي قوى غير محافظة.
- من أمثلة تلك القوى (قوة الاحتكاك). نلاحظ أن هذه القوى تؤدي إلى تغيير الطاقة الميكانيكية للجسم المتحرك.
- وهكذا كل القوى التي تغير من الطاقة الميكانيكية هي قوى غير محافظة.

الفصل الثامن: طاقة الوضع وحفظ الطاقة Pot. Energy & Cons. of Energy

8.1 طاقة الوضع Potential Energy

- التغير في طاقة الوضع تحت تأثير القوى المحافظة:
- عندما تؤثر قوة محافظة F_x على جسم ما لنقله من موقع x_i إلى موقع x_f فأن الشغل الذي تقوم به هو:

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U \qquad (8.6)$$

- إذن: الشغل المبذول بواسطة قوة محافظ على جسم ما هي عبارة سالب التغير في طاقة الوضع للجسم.

8.4 حفظ الطاقة الحركية Conservation of Mechanical Energy

- الطاقة الكلية لأي جسم هي عبارة عن مجموع طاقة الحركة + طاقة الوضع ورمزها E .

$$E = K + U \qquad (8.9)$$

أو:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \qquad (8.10)$$

- أي أن طاقة الحركة الابتدائية مضافا لها طاقة الوضع الابتدائية يجب أن تساوي طاقة الوضع النهائية مضافا لها طاقة الحركة النهائية. ومعنى ذلك أن أحدهما تتغير على حساب الأخرى.
- ربما أفضل ما يمثل ذلك كرة تنزل من فوق منحدر. في أعلى المنحدر كل ما لديها هو طاقة وضع، وفي أسفل المنحدر كل ما لديها هو طاقة حركة. في الوسط هناك طاقة حركة + وضع.
- إذن طاقة الوضع في قمة المنحدر تتقلص لحساب طاقة الحركة حتى تتحول بالكامل في الأسفل.

الفصل الثامن: طاقة الوضع وحفظ الطاقة Pot. Energy & Cons. of Energy

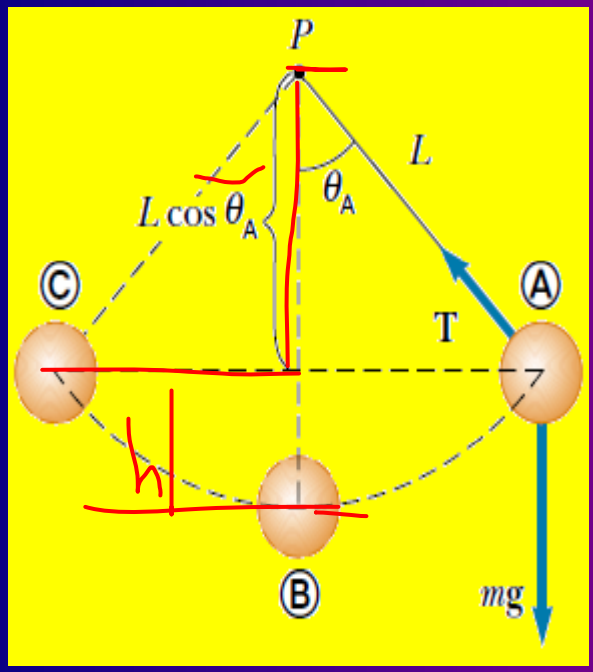
مثال للتوضيح كرة تسقط سقوطا حرا ومثال البندول

• **مثال 8.2** : كرة كتلها m تسقط بصورة حرة من ارتفاع h عن سطح الأرض. احسب سرعتها لحظة وصولها إلى سطح الأرض.

given: $K_i = 0,\ U_i = mgh,\ K_f = 1/2\, mv_f^2, U_f = 0$

$\because K_i + U_i = K_f + U_f$

$\therefore 0 + mgh = \frac{1}{2} mv_f^2 + 0. \qquad \therefore v_f = \sqrt{2gh}$ (1)



• **مثال 8.3** : بندول طول حبله $L = 2\ m$ والكتلة المربوطة في أسفله: $m = 0.5\ kg$ تم أطلاق الكرة عندما كان الحبل يصنع زاوية مقدارها 30^0. أوجد كلا من: سرعة الكتلة والشد في الحبل في النقطة السفلى.

• **الحل** : عند النقطة c فقط طاقة وضع، عند النقطة B فقط طاقة حركة.

• إذن طاقة الوضع تحولت بالكامل إلى حركة:

$\therefore (mgh)_C = (1/2mv^2)_B \qquad \rightarrow mg(L - L\cos\vartheta) = 1/2mv^2$

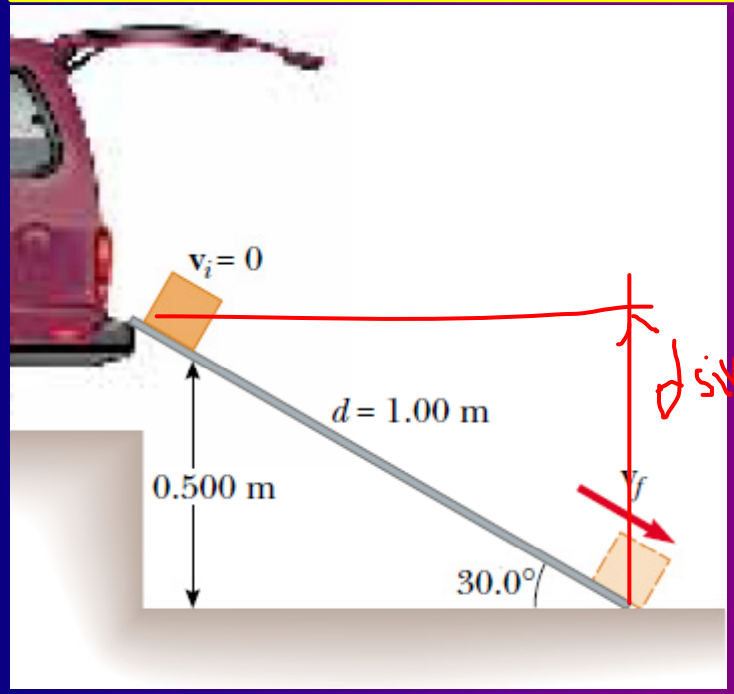
$\therefore (0.5)(9.8)(2 - 2\cos 30) = 1/2(0.5)(v^2) \qquad \therefore v = \sqrt{5.25} = 2.29\, m/s$

$T = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{L} = 0.5\frac{5.25}{2} = 6.21N$

الفصل الثامن: طاقة الوضع وحفظ الطاقة Pot. Energy & Cons. of Energy

مثال صندوق ينزلق على لوح مائل

• **مثال 8.4** : اللوح المائل طوله 1 m ويميل بزاوية 30° ويتم تنزيل صندوق كتلته 3 kg. بدأ الصندوق من السكون وكانت المقاومة تعادل 5 N . احسب سرعة الصندوق لحظة وصوله إلى الأرض.



$$\text{Given: } K_i = 0,\ U_i = mgh,\ U_f = 0,\ K_f = 1/2mv_f^2$$

$$\because K_i + U_i - W_f = K_f + U_f \quad (W_f = \text{Work on Friction})$$

$$\therefore 0 + mgh - 5\times 1 = 1/2mv_f^2 + 0$$

$$\rightarrow (3)(9.8)(1\sin 30) - 5 = 1/2(3)v_f^2$$

$$\therefore v_f = \sqrt{\frac{3\times 9.8\times 0.5 - 5}{0.5\times 3}} = 2.54 m/s$$

• لاحظ أن $h = d\sin\theta$ ، ولاحظ كيف طرحنا الشغل المهدر بسبب قوة الاحتكاك من اليسار لأنه يؤدي إلى نقص الطاقة الكلية المتوفرة. (خسارة في الطاقة).

• **تدريب**: استخدم قوانين نيوتن وكذلك قوانين الحركة المنتظمة لإيجاد التسارع والسرعة النهائية بطريقة مختلفة.

• سوف تحصل على نفس النتيجة للسرعة وأما التسارع = $a = 3.23\ m/s^2$

الفصل الثامن: طاقة الوضع وحفظ الطاقة Pot. Energy & Cons. of Energy

مثال البندقية الزنبركية

- **مثال 8.7** : بعض بندقيات ألعاب الأطفال تحتوي على زنبرك قوي يتم الضغط عليه ثم يطلق الطلقة بناء على الطاقة المخزنة في الزنبرك. إذا تم ضغط الزنبرك مسافة *12 cm* ثم تم أطلاق طلقته التي كتلتها *35 g* رأسيا إلى أعلى فأنها تتمكن من الوصول إلى ارتفاع *20 m* . استخدم هذه المعلومات لحساب ثابت الزنبرك.

- **الحل** : هناك وضعان الوضع الابتدائي قبل أطلاق الطلقة، والوضع عندما تصل الطلقة أقصى ارتفاع.
- بالنسبة للوضع الأول: هناك طاقة وضع فقط هي طاقة وضع الزنبرك *½ kx²* وأما في الوضع الثاني فهناك فقط طاقة وضع الأرض *mgh* .لاحظ كذلك انه لحظة انطلاق الطلقة تكون طاقتها الحركية *½ mv²* تساوي تماما إلى طاقة وضع الزنبرك.

$$\text{given: } K_i = 0,\ U_i = 1/2kx^2,\ K_f = 0, U_f = mgh$$

$$\because K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\therefore 0 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 + mgh \qquad \therefore k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2(35\times10^{-3})(9.8)(20)}{(12\times10^{-2})^2} = 953 N/m \qquad (1)$$

- **(ب)** احسب سرعة الطلقة لحظة مغادرتها للزنبرك.

$$\because K_i + U_i = K_f + U_f \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}\cancel{kx^2} = \frac{1}{2}mv^2 + 0. \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{952(0.12)^2}{35\times10^{-3}}} = 19.8 \text{m/s} \quad (2)$$


جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك
مقرر 210 فيز
د. ناصر بن صالح الزايد
nalzayed@ksu.edu.sa
المحاضرة رقم: 15

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.1 حفظ الاندفاع الخطي Conservation of Linear Momentum

- يعرف الاندفاع الخطي لجسم كتلته m يتحرك بسرعة متجهة **v** كما يلي:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \qquad (9.1)$$

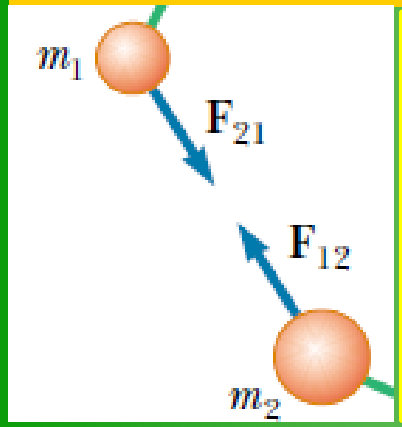
- وبالتالي فالاندفاع الخطي **P** هو كمية متجهة. ولها مركبات بحسب الإحداثيات المستخدمة. في الإحداثيات الكارتيزية: المركبات هي:

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z \qquad (9.2)$$

- هناك علاقة بين القوة **F** والاندفاع تعرف كما يلي:

$$\because F = ma$$

$$\therefore F = m\frac{dv}{dt} = \frac{dmv}{dt} = \frac{dP}{dt} \equiv \dot{P} \qquad (9.3)$$



- من أجل أن نشتق ونثبت بأن الاندفاع الكلي لنظام معزول هو كمية محفوظة (أي ثابتة لا تتغير مع الزمن) فسوف نفترض وجود جسمين m_1 و m_2 ويحصل بينهما تصادم. ثم نطبق قانون نيوتن للفعل ورد الفعل حيث أن القوة التي يتعرض لها الجسم الأول هي نفسها القوة التي يتعرض لها الجسم الثاني ولكن تختلف عنها بالإشارة فقط.
- ثم نستخدم المعادلة (9.3) للعلاقة بين القوة والاندفاع الخطي.

9.1 حفظ الاندفاع الخطي Conservation of Linear Momentum

$$\because F_{21} = -F_{12}$$

$$\therefore F_{21} + F_{12} = 0 \therefore$$

$$\because F_{21} = \frac{dp_1}{dt} \quad \text{and} \quad F_{12} = \frac{dp_2}{dt}$$

$$\therefore \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

$$\therefore p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{constant}$$

$$\therefore \text{Total Momentum Before} = \text{Total Momentum After}$$

$$\therefore m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (9.5)$$

• **كويز**: قام شخص برمي كرة ما إليك بسرعة معينة فأمسكت بها. ماذا لوقام نفس الشخص برمي كرة كتلتها 10 أضعاف كتلة هذه الكرة؟ أيها أسهل بالنسبة لك: (أ) أن يرميها بنفس سرعتها؟ (ب) أو بنفس اندفاع الكرة الأولى؟ (ج) أو بنفس طاقتها الحركية؟ رتب هذه الخيارات الأسهل فالأصعب.

• **الحل**: الترتيب هو: (ب)، (ج)، (أ). والسبب في ذلك أنه عندما يكون لهما نفس الاندفاع فإن سرعة الكرة الأثقل سوف تكون عشر سرعة الكرة الأخف. وعندما يكون لهما نفس الطاقة الحركية، فأن سرعة الكرة الأثقل سوف يكون جذر 10، وفي الحالة الأولى تكون لها نفس السرعة وهي الأصعب.

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

مثال لتوضيح مبدأ حفظ الاندفاع الخطي

• **مثال (9.1):** كان هناك رائد فضاء في الفراغ حيث ابتعد قليلا عن المحطة الفضائية، وأراد العودة سريعا إلى المحطة ولم يكن معه إلا مفتاح كتلته 1 kg فقرر رمي المفتاح بسرعة ما معاكسة للاتجاه الذي يريد. إذا علمت بأن كتله رائد الفضاء هي 75 kg وأنه رمى المفتاح بسرعة مقدارها 20 m/s فكم سوف تصبح سرعة رائد الفضاء؟

• **الحل:** سوف نستخدم مبدأ حفظ الاندفاع لحل هذه المسألة. نلاحظ أن هناك حالتين: الأولى الحالة الابتدائية حيث كان كل من رائد الفضاء والمفتاح في حالة سكون. والحال الثانية عندما تم رمي المفتاح.

• مبدأ حفظ الاندفاع الخطي يعني أن الاندفاع الكلي في الحالتين متساو. نفترض بأن كتلة الرجل M وكتلة المفتاح m . وسرعة الرجل V وسرعة المفتاح v .

$$M = 75\ kg, m = 1\ kg, V_i = 0, v_i = 0, v_f = 20\ m/s, V_f = ?$$

$$\because MV_i + mv_i = MV_f + mv_f$$

$$\therefore 0 + 0 = (75)V_f + (1)(+20)$$

$$\therefore V_f = -\frac{20}{75} = -0.3\ m/s \qquad (1)$$

• أشارة سالب تدل على أن اتجاه سرعة رائد الفضاء بعكس اتجاه سرعة المفتاح كما هو متوقع.

• لاحظ كذلك أن سرعة رائد الفضاء صغيرة جدا من حيث المقدار بسبب كبر كتلته. إذن لو كان هناك جسمان لهما نفس الاندفاع فأن الجسم الأخف يتحرك بسرعة أكبر.

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

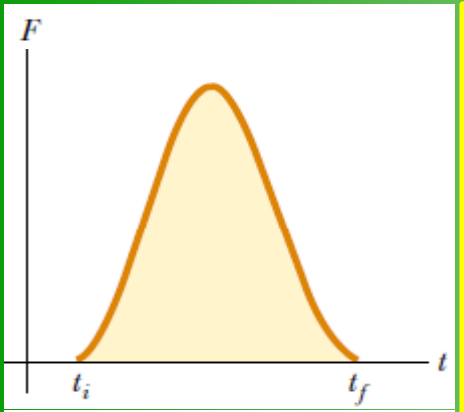
9.2 الدفع والاندفاع Impulse and Momentum

- ذكرنا سابقا أن هناك علاقة بين الاندفاع والقوة حيث: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{P}/dt$
- نقوم بترتيب الحدود لنحصل على:

$$d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}dt \qquad (9.7)$$

- نقوم بتكامل الطرفين:

$$\int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}dt = \Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_f - \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{I} \qquad (9.9)$$



- تسمى الكمية **I** الدفع. إذن الدفع يعبر عنه بأحد الصور:
- (1) التغير في الاندفاع $d\boldsymbol{P}$
- (2) التكامل على القوة خلال فترة زمنية محددة
- (3) التغير في السرعة عند ثبات الكتلة $m\boldsymbol{v}_f - m\boldsymbol{v}_i$
- والدفع معناه تغير في القوة المسلطة بشكل حاد خلال فترة زمنية قصيرة، انظر الشكل على اليسار. وبحسب الشكل فأن الدفع = المساحة تحت المنحنى

- نظرية (الدفع – الاندفاع) (*impulse–momentum theorem*): ما ذكر في معادلة (9.9) يطلق عليه نظرية الدفع – الاندفاع وفحوى النظرية: *إن الدفع الناتج من القوة* **F** *والتي تؤثر على جسم ما يعادل التغير في اندفاع ذلك الجسم.*

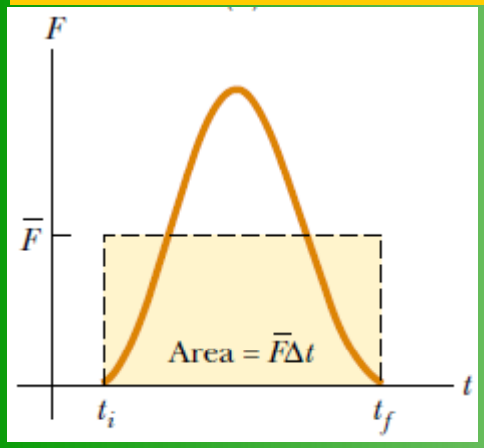
9.2 الدفع باستخدام متوسط القوة Impulse by an average force

• قد يكون من الصعب معرفة قوة مؤثرة لحظيا عندما تكون متغيرة بشكل حاد مع الزمن. ومن هنا صار يتم استخدام متوسط القوة خلال الفترة الزمنية المطلوبة. وهذا المتوسط هو عبارة عن التكامل المعطى سابقا مقسوما على التغير في الزمن.

$$\overline{F} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} F dt = \Delta P \qquad (9.10)$$

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\therefore I \equiv \overline{F}\Delta t \qquad (9.11)$$



• طبعا واضح أن المعادلة (9.11) عندما تستخدم مع قوة ثابتة متوسطها يساويها فأننا نعيد نفس المعادلة ولكن بدون علامة المتوسط على القوة.

• إذن الدفع في هذه الحالة يساوي: القوة المؤثرة مضروبا في الفترة الزمنية التي تم عندها التأثير.

• مثال ذلك: الدفع عندما تضرب كرة حائطا خلال فترة زمنية قصيرة يساوي متوسط القوة المؤثرة مضروبا في زمن الالتصاق.

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.5 مثال تطبيقي على استخدام حفظ الاندفاع

• **مثال 9.5**: تقف سيارة كتلتها 1800 kg عند أشارة المرور عندما اصطدمت بها من الخلف سيارة كتلتها 900 kg تتحرك بسرعة مقدارها 20 m/s فالتصقت السيارتان معا. احسب سرعة السيارتين الملتصقتين بعد التصادم مباشرة.

• **الحل:** لأن الاندفاع محفوظ قبل وبعد التصادم مهما كان نوع التصادم، فأننا سوف نعتمد في الحل على حقيقة أن الاندفاع الكلي قبل التصادم = الاندفاع الكلي بعد التصادم. سوف نعطي السيارات الكتل m_1 و m_2 وسرعاتها الابتدائية v_{1i} و v_{2i} وسرعتهما مع بعض بعد التصادم v_f :

given : $v_{1i} = 20\ m/s,\ v_{2i} = 0, m_1 = 900\ kg, m_2 = 1800\ kg$

$$\because p_i = p_f \qquad (1)$$

$$\therefore m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$\rightarrow (900)(20) + (1800)(0) = (900 + 1800) vf$$

$$\rightarrow vf = \frac{18000}{2700} = 6.67\ m/s \qquad (1)$$

• يلاحظ أن سرعة السيارتين بعد الالتصاق أقل من سرعة السيارة الصغيرة قبل التصادم وهو أمر متوقع.

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

مثال تطبيقي على مسائل الدفع (مسألة رقم 11 من مسائل الكتاب)

- **مثال (مسألة رقم 11):** كرة فولاذ كتلتها 3 kg تتحرك بسرعة مقدارها 10 m/s وبزاوية مقدارها 60^o ضربت حائطا وارتدت منه بنفس السرعة والزاوية (الزاوية بالنسبة لسطح الحائط). احسب متوسط القوة التي تعرضت لها الكرة، إذا علمت بأن زمن التلامس يقدر بـ 0.2 s .

- **الحل:** حيث أن الكرة تصنع زاوية مقدارها 60^o مع الحائط، فهناك مركبتان للاندفاع،
- الأولى: باتجاه الحائط بشكل مباشر وتأتي من حساب جيب الزاوية sinθ
- والثانية: موازية للحائط وتأتي من حساب جيب التمام cosθ
- وكما هو واضح فإن المركبة الثانية لا قيمة لها في حساب القوة.
- إذن سوف نحسب فقط المركبة العمودية على الحائط

$$\because I \equiv \overline{F}\Delta t = \Delta P = mv_f - mv_i \qquad (1)$$

$$\therefore \overline{F}_x \Delta t = mv_{xf} - mv_{xi} \quad \text{and} \quad \overline{F}_y \Delta t = mv_{yf} - mv_{yi} \qquad (2)$$

$$x :\rightarrow \overline{F}_x(0.2) = (3)(-10\sin 60) - (3)(10\sin 60) = -52$$

$$\therefore \overline{F}_x = -52 / 0.2 = -256\ N \qquad (3)$$

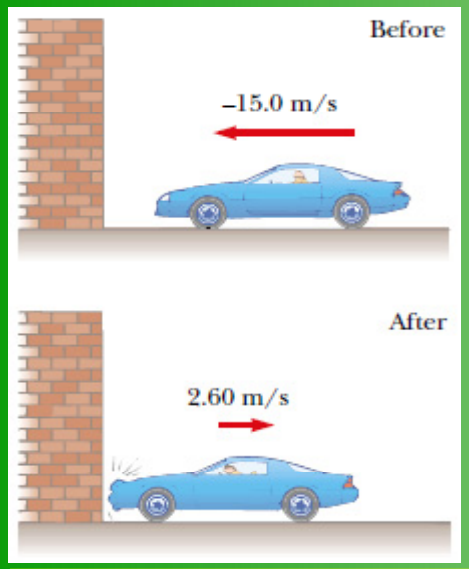
$$y :\rightarrow \overline{F}_y(0.2) = (3)(10\cos 60) - (3)(10\cos 60) = 0 \qquad \therefore \overline{F}_y = 0 \qquad (4)$$

$$\therefore F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{256^{\,2} + 0^2} = 256\ N \qquad (5)$$

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

مثال تطبيقي على مسائل الدفع (اختبارات السيارات)

• **مثال (9.4):** يتم عمل اختبارات على السيارات بأن تتجه السيارة إلى حائط أسمنتي وتصطدم به مباشرة. فإذا اعتبرنا سيارة كتلتها 1500 kg تتجه إلى الحائط بسرعة ابتدائية موضحة في الشكل وترتد بالسرعة الموضحة كذلك. احسب الدفع ومتوسط القوة التي تتعرض لها السيارة.



• **الحل:** كما في المثال السابق تماما. ولكن في هذا المثال هناك مركبة واحدة فقط وهي باتجاه x كما في الرسم على اليسار.

$$\text{given}: v_i = -15\ m/s,\ v_f = 2.6\,m/s,\ m = 1500\ kg,\ \Delta t = 0.15\,s$$

$$\because \bar{F}\Delta t = mv_f - mv_i \rightarrow (\bar{F})(0.15) = (1500)(2.6) - (1500)(-15)$$

$$\rightarrow \bar{F} = \frac{2.64\times10^4}{0.15} = 1.76\times10^5\ \text{N} \qquad (2)$$

$$\because I = \bar{F}\Delta t = 1.76\times10^5 \times 0.15 = 2.64\times10^4\ kg.m/s \qquad (3)$$

• لاحظ كيف أن متوسط القوة يعتمد على الزمن بصورة كبيرة. فكلما كان زمن التلامس (أو الارتطام) أقل كلما كانت القوة أكبر. أن هذا هو السبب الجوهري وراء أهمية ارتداء حزام الأمان في السيارات، حيث إن الحزام يبطئ من حركة السائق إلى الأمام أثناء الارتطام، مما يمدد في زمن ارتطامه، وهو يقلل من القوة التي يتعرض لها السائق بشكل كبير جدا.

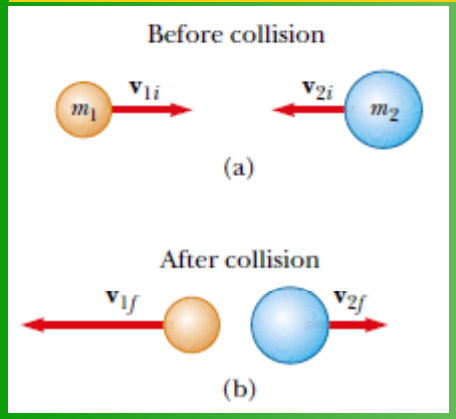
الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.4 التصادمات المرنة وغير المرنة Elastic and Inelastic Collisions

- بكل بساطة التصادم المرن هو التصادم الذي يحفظ كلا من الاندفاع وطاقة الحركة، في حين أن التصادم عندما يكون غير مرن فهو لا يحفظ الطاقة الحركية، حيث يضيع جزء منها بسبب التشوهات أو الاحتكاك أو غير ذلك.
- لو تصورنا جسمين m_1 وm_2 يتحركان ضد بعضهما وحصل بينهما تصادم مرن فأن حفظ قوانين الاندفاع والطاقة الحركية تكتب كما يلي:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (9.15)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^{\,2} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^{\,2} \qquad (9.16)$$



جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 16

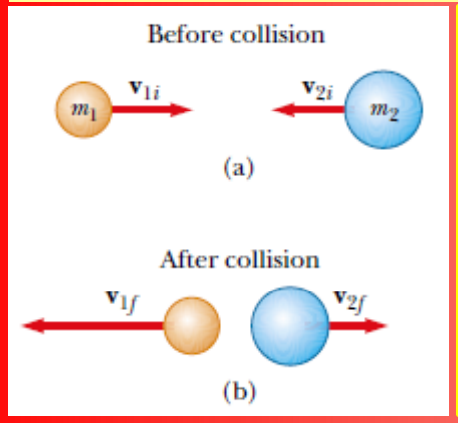
الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.4 التصادمات المرنة وغير المرنة Elastic and Inelastic Collisions

- بكل بساطة التصادم المرن هو التصادم الذي يحفظ كلا من الاندفاع وطاقة الحركة، في حين أن التصادم عندما يكون غير مرن فهو لا يحفظ الطاقة الحركية، حيث يضيع جزء منها بسبب التشوهات أو الاحتكاك أو غير ذلك.
- لو تصورنا جسمان m_1 وm_2 يتحركان ضد بعضهما وحصل بينهما تصادم مرن فأن حفظ قوانين الاندفاع والطاقة الحركية تكتب كما يلي:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (9.15)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^{\,2} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^{\,2} \qquad (9.16)$$

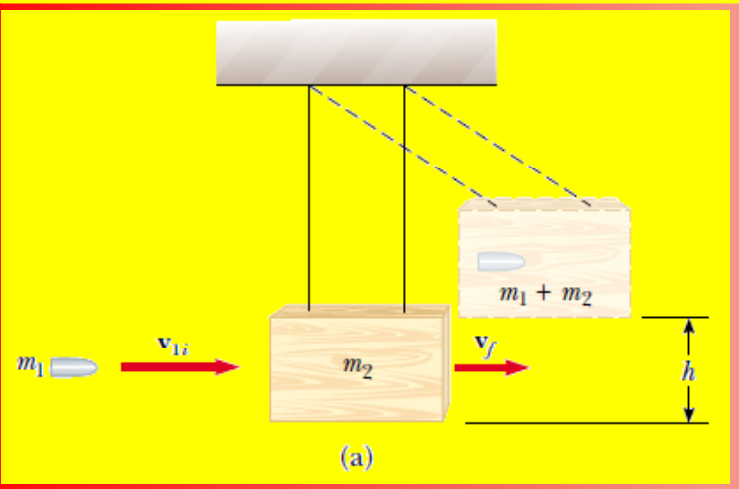


- في حالة التصادم المرن كلا من المعادلتين (9.15) و (9.16) صحيحة وقابلة للتطبيق.
- أما في حالة كون التصادم غير مرن فأننا نستخدم فقط المعادلة (9.15).
- يتم تحديد نوعية التصادم وكونه مرنا أو غير مرن من السؤال أو من طبيعة التصادم. مثلا جميع تصادمات السيارات غير مرنة. في حين أن تصادمات كرات البلياردو تعد تصادمات مرنة.

- عندما يلتصق الجسمان بعد التصادم نعامل الجسمين كجسم واحد كتلته مجموع الكتلتين

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.6 مثال البندول البالستي The Ballistic Pendulum



• مثال 9.6 البندول البالستي: يستخدم هذا البندول عادة لقياس سرعة الأجسام السريعة جدا مثل طلقة البندقية. يم أطلاق الجسم باتجاه خشبة كبيرة معلقة بحبال خيفة حيث تستقر الطلقة في اللوح الخشبي الذي يتأرجح مع الطلقة ويرتفع مسافة h . إذا علمت بأن m_1= 5 g, m_2= 1 kg, h =5 cm احسب:

•(أ) سرعة الطلقة الأصلية؟ (ب) الفقد في الطاقة الحركية نتيجة لهذا التصادم

• الحل: استراتيجيه الحل: كما هو واضح فأن هذا التصادم غير مرن، لذلك نستخدم فقط معادلة حفظ الاندفاع (كمية الحركة). إذن الاندفاع قبل الطلقة = الاندفاع بعد الطلقة

• أولا: سوف نستخدم مبدأ حفظ الطاقة حيث أن الطاقة الحركية للخشب + الطلقة مباشرة بعد دخول الطلقة في الخشب = طاقة الوضع عند الارتفاع المعطى . ومنه نحسب سرعة اللوح والطلقة مباشرة بعد دخول الطلقة في اللوح

• ثانيا: نستخدم هذه النتيجة في قانون حفظ الاندفاع ونعوض عن السرعة التي حصلنا عليها ومنها نحصل على سرعة الطلقة.

• ثالثا: من معرفة سرعة الطلقة نحسب الطاقة الكلية للنظام قبل التصادم، ومن أولا نحسب طاقة النظام بعد التصادم مباشرة. والفرق بين الطاقتين هو الطاقة الضائعة (مفقودة)

$$given: m_1 = 1\ g,\ m_2 = 1\ kg,\ h = 5\times10^{-2}\ m$$

$$(a) \because m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2) v_f \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^{\,2} = (m_1 + m_2) gh$$

$$= (m_1 + m_2)(9.8)(5\times10^{-2})$$

$$\rightarrow v_f = 0.99\ m/s \qquad (2)$$

$$(2) \text{ in } (1): (0.005)\, v_{1i} + 0 = (1 + 0.005)0.99$$

$$\rightarrow v_{1i} = 1.005 \times 0.99 / 0.005 = 199\ m/s \qquad (3)$$

$$(b)\ k_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^{\,2} = \frac{1}{2}(0.005)199^2 = 99\ J \qquad (4)$$

$$k_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^{\,2} = \frac{1}{2}(1.005)0.99^2 = 0.5\ J \qquad (5)$$

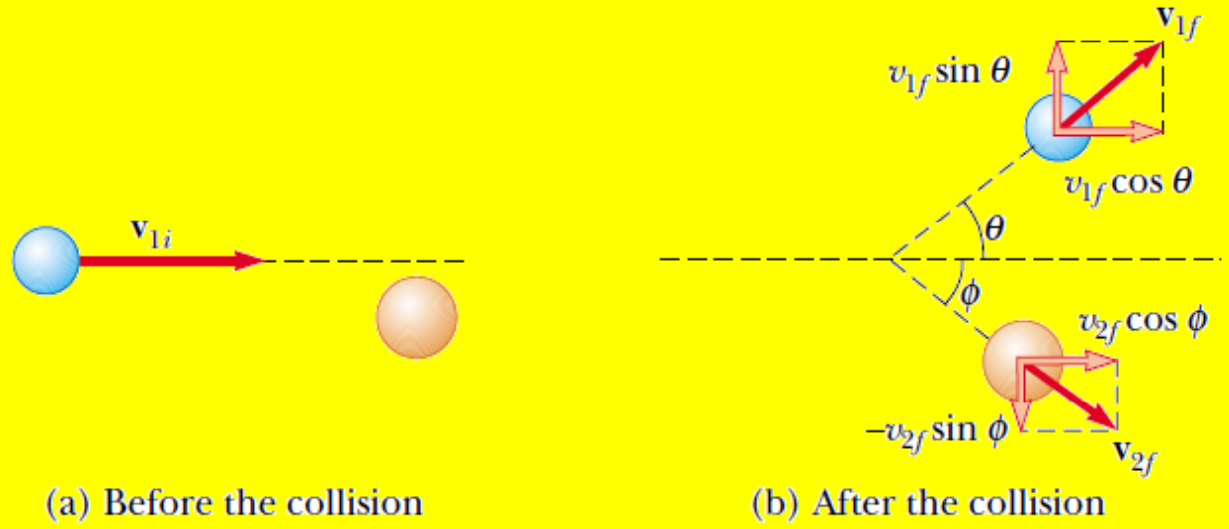
$$\Delta k = k_i - k_f = 99 - 0.5 = 98.5\ J \qquad (6)$$

9.5 التصادمات في بعدين TWO-DIMENSIONAL COLLISIONS

• بالنسبة لقانون حفظ الاندفاع: نعيد نفس القانون السابق ولكن في كل اتجاه (مركبة) على حده.

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \qquad (9.15)$$

• بالنسبة لقانون حفظ الطاقة الحركية، لا يتغير لأن السرعة مربعة وبالتالي فلا قيمة للاتجاه.



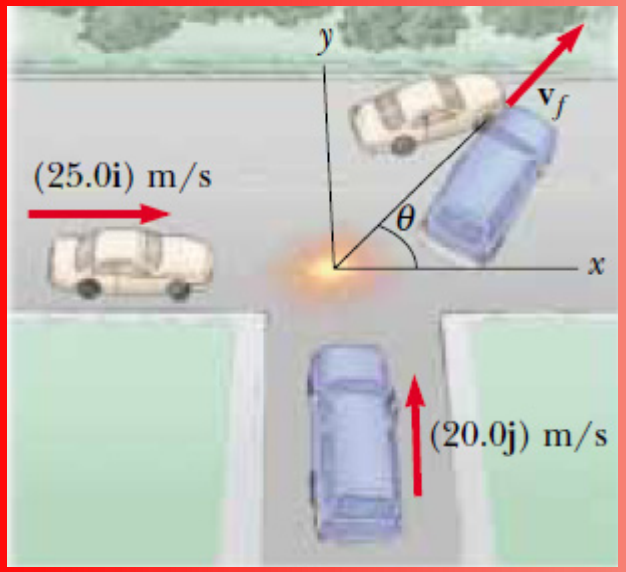
• لاحظ من الشكل على اليسار كيف نحلل المركبات كما سبق أكثر من مرة. المركبات في نفس الاتجاه تحقق حفظ الاندفاع. لاحظ أشارة سالب في المركبة الرأسية عندما تكون إلى أسفل.

• عندما نحتاج إلى حل مسائل في بعدين، فيجب أن نعامل كل اتجاه (مثلا x) على حده. أي نقوم بتطبيق قانون حفظ الاندفاع في ذلك الاتجاه فقط. ثم نكرر نفس العمل في الاتجاه الآخر. ثم نقوم بحساب الكميات المطلوبة، مثلا الاندفاع الكلي باستخدام نظرية فيثاغورس، الاتجاه باستخدام قانون الظل وهكذا.

• الشكل أعلاه، الجسم الأول لديه فقط مركبة في اتجاه x ولكن بعد التصادم صارت هناك مركبتان.

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.9 مثال على التصادم في بعدين Collision at an Intersection



• مثال 9.9: تتحرك سيارة كتلتها 1500 kg باتجاه الشرق بسرعة مقدارها 25 m/s تتصادم عند التقاطع مع سيارة كتلتها 2500 kg تتحرك باتجاه الشمال بسرعة مقدارها 20 m/s . احسب مقدار واتجاه سرعة السيارتين بعد التصادم إذا علمت بأنهما التصقتا ببعضهما.

• الحل : لاحظ كيف نعامل الاندفاع أولا في اتجاه x ثم في اتجاه y ثم نحصل على النتيجة النهائية من هاتين النتيجتين. تماما كما كنا نفعل مع جميع الكميات المتجهة في مستوى x-y .

•لاحظ كذلك كيف كتبنا المعطيات في الحل أدناه.

$$v_{1ix} = 25\ m/s,\ v_{1iy} = 0,\ v_{2ix} = 0,\ v_{2iy} = 20\ m/s,\ m_1 = 1500\ kg,\ m_2 = 2500\ kg$$

$$x:\ m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \qquad (1)$$

$$\rightarrow (1500)(25) + 0 = (1500 + 2500)\, v_{fx} \rightarrow v_{fx} = 9.38\ m/s \qquad (2)$$

$$y: 0 + (2500)(20) = (1500 + 2500)\, v_{fy} \rightarrow v_{fy} = 12.5\, m/s \qquad (3)$$

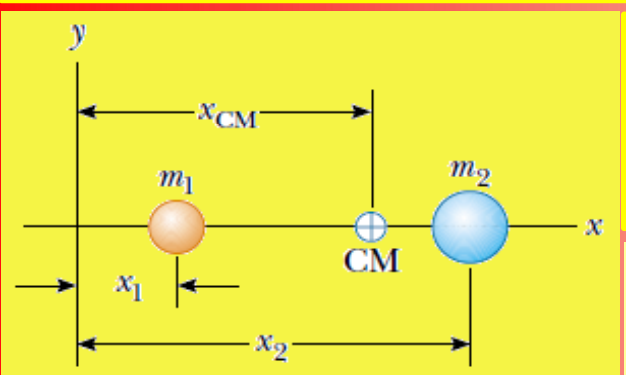
$$\therefore vf = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{9.38^2 + 12.5^2} = 15.63\, m/s$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12.5}{9.38}\right) = 53.1^o \qquad (4)$$

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.6 مركز الكتلة The Center of Mass (CM)

• مركز الكتلة ويسمى أيضا مركز الثقل، هو النقطة التي تتوزع حولها الكتلة بشكل متساو. وليست بالضرورة نقطة تقع دائما في وسط الجسم. إذا كان لدينا عدة أجسام، فان مركز كتلة تلك الأجسام هي نقطة تقع بينها بحيث تتوزع كتلة الأجسام بالتساوي حول تلك النقطة.



• في الشكل المجاور، لدينا جسمان يقعان على محور x تماما، يبعد الأول عن نقطة الأصل مسافة x_1 في حين يبعد الثاني x_2 و مركز الكتلة CM يجب أن يقع في مكان ما بين الجسمين.

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (9.27)$$

• عندما يكون لدينا عدد كبير من الأجسام، وكذلك عندما تكون تلك الأجسام تقع في ثلاثة أبعاد فأن

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad (9.28)$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \qquad (9.29)$$

9.6 مركز الكتلة The Center of Mass (CM)

• بشكل عام، وعندما نتحدث عن فراغ ثلاثي متغير الموقع فيه هو **r** فأن مركز الكتلة يعبر عنه كما يلي:

$$r_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$$

$$= \frac{\sum_i m_i x_i \hat{i} + \sum_i m_i y_i \hat{j} + \sum_i m_i z_i \hat{k}}{M}$$

$$r_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i r_i}{M} \qquad (9.30)$$

where $r_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

• وهذا عندما تكون الأجسام قابلة للعد. أما عندما يكون هناك توزيع للكتلة في الفراغ فنستخدم التكامل:

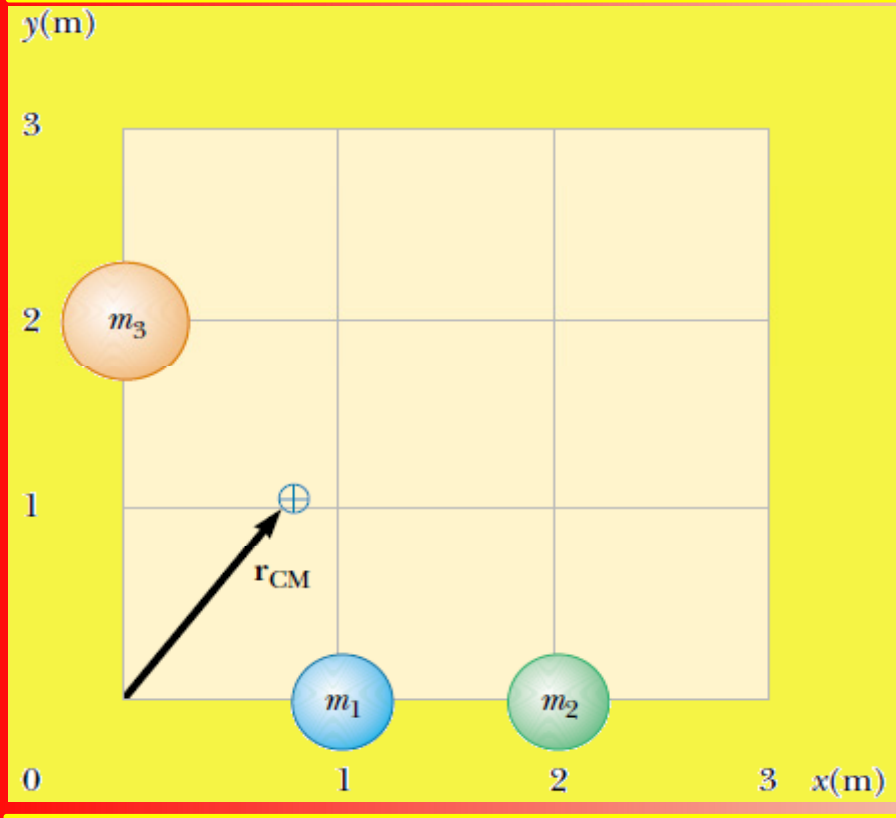
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad (9.32)$$

$$\text{in 3 - D}: \quad r_{CM} = \frac{1}{M}\int r\,dm \qquad (9.33)$$

• نسمي *dm* بعنصر الكتلة، وهو أهم شئ نبحث عنه حتى يصبح التكامل ممكنا.

9.12 حساب مركز كتلة 3 أجسام مختلفة The Center of Mass of Three Particles

• **مثال 9.12**: الشكل يبين ثلاثة أجسام عند مواقع مختلفة في المستوى x-y ونريد حساب مركز الكتلة على المحورين. $m_1 = m_2 = 1\ kg,\ m_3 = 2kg$



$$\because\ x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{1\times 1 + 1\times 2 + 2\times 0}{1+1+2} = \frac{3}{4} = 0.75\ m \qquad (1)$$

$$\because\ y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{1\times 0 + 1\times 0 + 2\times 2}{1+1+2} = \frac{4}{4} = 1\ m \qquad (2)$$

$$\because\ r_{CM} = x_{CM}\,\hat{i} + y_{CM}\,\hat{j}$$

$$\therefore\ r_{CM} = 0.75\,\hat{i} + 1\,\hat{j}$$

• لاحظ الصيغة المتجهة الأخيرة التي كتبنا بها مركز الكتلة. هذه الصيغة هي المطلوبة دائما عندما نتحدث عن بعدين أو أكثر.

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.13 حساب مركز كتلة عمود The Center of Mass of a Rod

•**مثال 9.13**: أثبت أن مركز كتل عمود كتلته M وطوله L منتظم يقع عند منتصفه.

•**الحل**: كما ذكرنا سابقا، في الأجسام التي كتلتها متوزعة في الفراغ، أهم شئ أن نحدد عنصر الكتلة dm .

• في حالة العمود المنتظم، نفترض بأن كتلة وحدة الأطوال منه هي $\lambda = M/L$ وعلى ذلك فأن: $dm = \lambda\, dx$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{L}{M}\right)L = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)L = \frac{L}{2}$$

•**ملاحظة**: لاحظ أن التكامل الأصلي غير محدود.

• قمنا بعد ذلك بوضع حدود التكامل وذلك بحسب الجسم المدروس.

• بالنسبة للعمود، حيث نحتاج إلى التكامل على سائر العمود، فتكون حدود التكامل أحد خيارين:

(1) أما أن يكون طرف العمود عند نقطة الأصل وبالتالي فالحدود هي: 0 to L

(2) أو أن يكون منتصف العمود عند نقطة الأصل وبالتالي فالحدود هي: $-L/2$ to $L/2$

• إن النتيجة التي نحصل عليها في الحالتين سوف تكون نفسها.

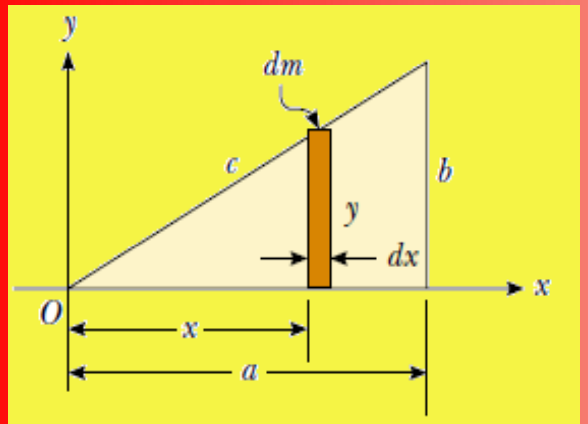
• كذلك لاحظ أن عنصر الكتلة dm يجب أن يحتوي على نفس عنصر التكامل. مثلا إذا كان التكامل على x فلابد أن يحتوي عنصر الكتلة على dx ولو كان التكامل على r فنتوقع أن يحتوي عنصر الكتلة على dr

• باختصار: الخطأ في تحديد عنصر الكتلة dm سوف يقود حتما إلى خطأ في حساب موقع مركز الكتلة

الفصل التاسع: الاندفاع الخطي والتصادمات Linear Momentum & Collisions

9.14 حساب مركز كتلة مثلث قائم الزاوية CM of a Right Triangle

•**مثال 9.14**: لدينا المثلث المنتظم المبين الذي كتلته M والمطلوب حساب مركز ثقله



•**الحل**: حيث أن المثلث واقع في بعدين *x* و *y* فلابد من أجراء التكامل مرتين.

• من أجل اختيار عنصر الكتلة، نختار الشريحة المبينة في الرسم باللون البرتقالي، سمكها *dx* وارتفاعها *y* وبالتالي فمساحتها *ydx* . إذا اعتبرنا بأن كتلة وحدة المساحات من المثلث هي ρ فأن $dm = \rho y dx$

• **ونكرر نفس الطريقة مع التكامل الآخر على *y*** . $y_{CM}=1/3\ b$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\,\rho y\,dx \qquad (1)$$

$$\because \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \rightarrow y = x\,\frac{b}{a} \qquad (2)$$

$$\therefore x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^a x\,\rho y\,dx = \frac{\rho}{M}\frac{b}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{\rho}{M}\frac{b}{a}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{\rho}{M}\frac{b}{a}\frac{a^3}{3} \qquad (3)$$

$$\because \frac{1}{2}ab\,\rho = M \rightarrow x_{CM} = \frac{1}{2}\rho b a\,\frac{1}{Ma}\frac{2}{3}a^2 = \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}\cancel{a}}\frac{2}{3}\cancel{a^2} = \frac{2}{3}a \qquad (4)$$

9.7 حركة نظام مكون من عدة أجسام MOTION OFA SYSTEM OFP ARTICLES

• أخذنا سابقا تعريف موقع مركز الكتلة في ثلاثة أبعاد r_{CM} كما أخذنا تعريف السرعة أيضا وهو أنها مشتقة الموقع بالنسبة للزمن. سوف نطبق نفس المعلومات على حركة نظام مكون من عدة أجسام، حيث أن تلك الحركة تختزل في حركة مركز الثقل.

$$V_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} \quad \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} \tag{9.34}$$

$$\rightarrow M V_{CM} = \sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} = \sum_i m_i v_i = \sum_i p_i = P_{tot} \tag{9.35}$$

$$a_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt} \quad \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \quad \frac{1}{M}\sum_i m_i a_i \tag{9.36}$$

$$\rightarrow M a_{CM} = \sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_i m_i a_i = \sum_i F_i \tag{9.37}$$

$$\sum F_{ext} = M a_{CM} = \frac{dP_{tot}}{dt} \tag{9.38}$$

•المعادلات أعلاه تحوي جميع المعلومات الضرورية للحل. لاحظ أن الكتلة الكلية للنظام (كتل جميع الأجسام) مضروبة في سرعة النظام = الاندفاع الكلي. كذلك نلاحظ أن مجموع القوى المؤثرة خارجيا تقود إلى تسارع مركز كتلة النظام.

• **مثال 9.13**: صاروخ أرسل راسيا إلى أعلى وعندما كان على ارتفاع 1000 m وسرعة 300 m/s انفجر إلى ثلاث قطع متساوية. أحد تلك القطع استمرت في الحركة راسيا وبسرعة مقدارها 450 m/s ، القطعة الثانية تحرت إلى الشرق بسرعة مقدارها 240 m/s . أحسب سرعة القطعة الثالثة.

• **الحل**: فقط قوانين حفظ الاندفاع تصلح للتطبيق هنا بسبب كون الانفجار (غير مرن).
• الاندفاع في كل اتجاه محفوظ قبل وبعد الانفجار.

$$y: MV_i = \frac{1}{3}Mv_{1f} + \frac{1}{3}Mv_{3fy} \qquad (9.34)$$

$$\therefore 300 = \frac{1}{3}(450) + \frac{1}{3}v_{3fy} \rightarrow v_{3fy} = 450\, m/s \qquad (9.34)$$

$$x: Mv_{ix} + Mv_{3ix} = Mv_f + Mv_{3fx} \qquad (9.34)$$

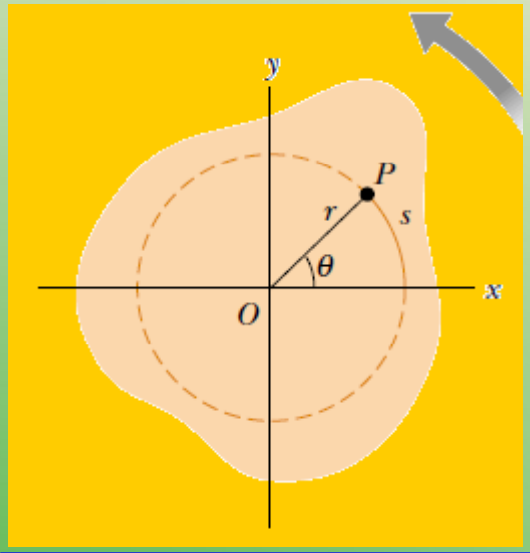
$$\rightarrow 0 + 0 = 240 + v_{3fx} \rightarrow v_{3fx} = -240\, m/s$$

$$\therefore v_{3f} = -240\hat{i} + 450\hat{j}\ m/s \qquad (9.34)$$


جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك
مقرر 210 فيز
د. ناصر بن صالح الزايد
nalzayed@ksu.edu.sa
المحاضرة رقم: 17

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.1 الأزاحة، السرعة، والتسارع الزاوية Anduglar Disp., Veloc. And Accel.



- في الشكل المبين، جسم يدور حول محور ثابت يقع في نقطة الأصل.
- النقطة *P* كانت على محور *x* ثم تغير موقعها بسبب الدوران فانتقلت إلى موقع يبعد مسافة s على طور المحيط بالنسبة للموقع الأصلي.
- بحسب الشكل نفسه، فأن متجه الموقع r صار يصنع زاوية مقدارها t .
- لدينا العلاقات التالية:

$$s = r\theta \qquad (10.1a)$$

$$\theta = s/r \qquad (10.1b)$$

- نقوم الآن بتعريف الكميات الدورانية كما يلي:

Angular Displaceme nt : $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ (10.2)

Average Ang. Speed : $\overline{\omega} = \dfrac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (10.3)

Instantano us Ang. Speed : $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$ (10.4)

Average Ang. Acceler. : $\overline{\alpha} = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (10.5)

Instantano us Ang. Acc. : $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ (10.6)

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.2 الحركة الدورانية المنتظمة Uniform Rotational Motion

- فيما سبق قمنا بتعريف الأزاحة الزاوية، ومتوسط السرعة الزاوية، والسرعة الزاوية اللحظية، وكذلك متوسط التسارع الزاوي، وأخيرا التسارع الزاوي اللحظي. وهي تماثل نفس الكميات في الحركة الخطية.
- قياس هذه الكميات: الزاوية تقاس بالراديان. ω تقاس: Rad/s ، α تقاس: Rad/s^2
- ملاحظة مهمة جدا: عندما يدور جسم ما حول محور ثابت، بسرعة زاوية وتسارع زاوي معين، فأن جميع النقاط الموجودة في هذا الجسم سواء كانت بعيدة أم قريبة من محور الدوران تدور بنفس السرعة ونفس التسارع لأن الجسم واحد. ومثال ذلك الصحن الدوار: جميع الأشخاص الذين يركبون على الصحن الدوار يدورون بنفس السرعة ونفس التسارع.
- **نقوم الآن بمناقشة الحركة الدورانية المنتظمة (أي بتسارع زاوي ثابت) تماما مثل الحركة الخطية المنتظمة، ولذلك نتوقع أن نحصل على قوانين مشابهة تماما.**

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad (10.7)$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (10.8)$$

$$\omega_f^{\,2} = \omega_i^{\,2} + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \qquad (10.9)$$

if $\theta_i = 0$:

$$\theta_f = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (10.8)$$

$$\omega_f^{\,2} = \omega_i^{\,2} + 2\alpha\theta \qquad (10.9)$$

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.2 مثال الحركة الدورانية المنتظمة Uniform Rotational Motion

- **مثال 10.1** : تدور عجلة بتسارع زاوي ثابت مقداره $3.5\ rad/s^2$ إذا علمت بأن السرعة الزاوية للعجلة مقدارها: $2\ rad/s$ عند اللحظة الزمنية $t = 0\ s$.
- (أ) ما هي الزاوية بعد مرور $2\ s$. (ب) احسب السرعة الزاوية عند هذا الزمن

given: $t_i = 0,\ t_f = 2\ s, \theta_i = 0,\ \omega_i = 2\ rad/s, \alpha = 3.5\ rad/s^2$

$$(a): \quad \because \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\therefore \theta_f = 0 + (2)(2) + \frac{1}{2}(3.5)(4) = 11\ rad\ (\equiv 630^o) \qquad (1)$$

$$(b): \quad \because \omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\therefore \omega_f = (2) + (3.5)(2) = 9\ rad/s \qquad (2)$$

- مقارنة بين قوانين الحركة الخطية المنتظمة والحركة الدورانية المنتظمة

TABLE 10.1 Kinematic Equations for Rotational and Linear Motion Under Constant Acceleration

Rotational Motion About a Fixed Axis	Linear Motion
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.3 العلاقة بين الكميات الزاوية والخطية ANGULAR AND LINEAR QUANTITIES

• في هذا الجزء سوف نقوم بربط الكميات الزاوية بالكميات الدورانية:

$$\because v = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$\therefore v = r\omega \qquad (10.10)$$

$$\because a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad (10.11)$$

$$\because a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2 \qquad (10.12)$$

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.4 الطاقة الحركية الدورانية Rotational Kinetic Energy

• الطاقة الحركية الدورانية، هي الطاقة الناشئة بسبب الدوران، وبالتالي فلابد أن تعتمد على كميات دورانية.

• سوف نفترض أن لدينا جسما يدور حول محور ثابت، وأن هذا الجسم هو عبارة عن عدد كبير من الأجسام الصغيرة كتلة كل منها m_i وسرعته الخطية v_i .

• فأذن عملية دوران ذلك الجسم يمكن تمثيلها بدوران هذه الأجسام، والطاقة الحركية الكلية للجسم تعادل مجموع الطاقات الحركية لتلك الجسيمات المشكلة للجسم، والتي نعتبر أن عددها i .

• تذكر أن الطاقة الحركية لجسم كتلته m ويتحرك بسرعة v هي: $k = \frac{1}{2} mv^2$

$$\because K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^{\,2}$$

$$\therefore K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^{\,2} \omega^2 \qquad (10.15)$$

$$or: K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^{\,2} \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (10.16)$$

where: $I = \sum_i m_i r_i^{\,2}$

is the moment of Ineria

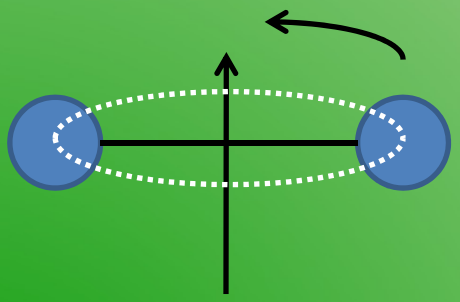
- K_R يمثل الطاقة الحركية الدورانية.
- لاحظ في معادلة (10.16) أننا أخرجنا السرعة الزاوية ω خارج علامة المجموع لأنه ثابت لجميع الأجسام التي تشكل الجسم الأصلي.
- لاحظ كذلك أننا ذكرنا للمرة الأولى الكمية (عزم القصور moment of inertia) I وهو دائما يحتوي على كتلة x مربع المسافة x كمية ثابتة في بعض الأحيان.
- جسم صغير m يبعد عن نقطة الأصل r ويدور حول نقطة الأصل: عزم القصور له: $I = mr^2$
- لاحظ كذلك الشبه بين الطاقة الحركية الخطية والدورانية. كل منهما لديه الكمية ½ وكل منهما لديه كمية مربعة (الخطية v^2 والدورانية ω^2) وكل منهما لديه كمية ثابتة (الخطية m والدورانية I).

• **مثال 10.3** : يتكون جزئ الأكسجين من ذرتين تفصل بينهما مسافة $d = 1.21\text{x}10^{-10}$ m ، إذا علمت بأن كتلة كل ذرة هي: $m = 2.66\text{x}10^{-26}$ kg وأن السرعة الزاوية لدوران الجزئ حول المحور z هي: $4.6\text{x}10^{12}$ rad/s . (أ) احسب عزم القصور للجزئ (ب) احسب الطاقة الحركية الدورانية للجزئ.

$$\because I = \sum_i m_i r_i^2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}md^2 \qquad (1)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}(2.66\times10^{-26})(1.21\times10^{-10})^2 = 1.95\times10^{-46}\,kg.m^2 \qquad (2)$$

$$\because K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(1.95\times10^{-46})(4.6\times10^{12})^2 = 2.06\times10^{-21}J \qquad (3)$$

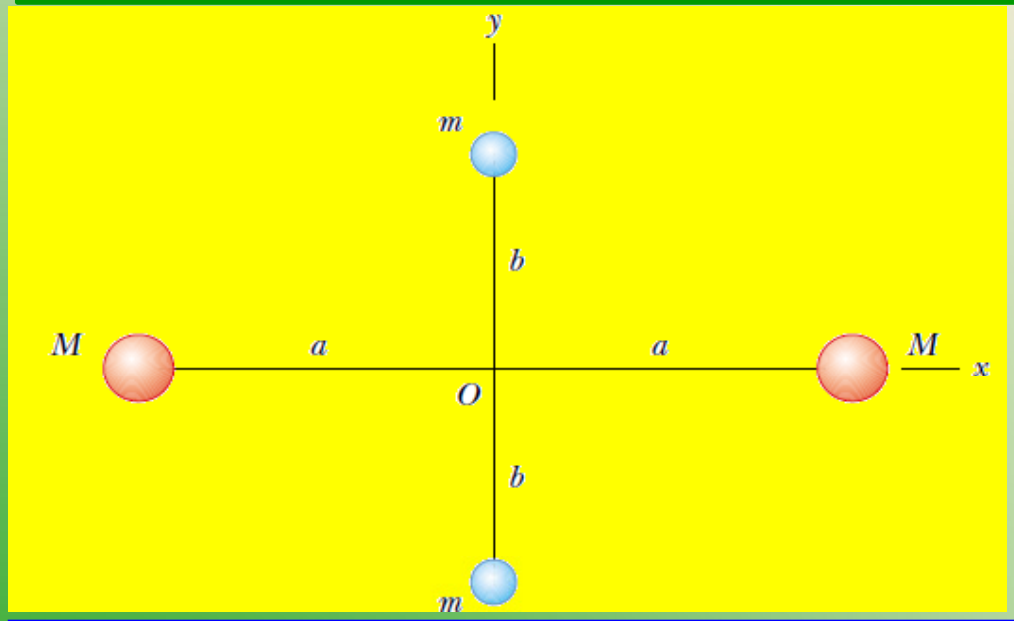


• لاحظ أن كل كتلة تبعد نصف المسافة عن محور الدوران d/2
• لاحظ كذلك وحدة عزم القصور: $kg.m^2$
• لا تستغرب سرعة دوران الجزئ لأن الجزيئات تدور بسرعات عالية.

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

مثال آخر على الطاقة الحركية الدورانية وعزم القصور

• **مثال 10.4** : كما في الشكل، أربع كرات كتلها مبينة في الشكل ، تدور حول المحور y احسب عزم القصور والطاقة الحركية للنظام حول هذا المحور، إذا كانت السرعة الزاوية هي ω .



• **الحل**: حيث أن المطلوب هو حساب الطاقة الحركية حول محور y ، فأن كلا من الكتلتين m تبعدان مسافة 0 عن هذا المحور، ولذلك فلا قيمة لهما.

• العكس سوف يحصل لو طلب منها حساب الطاقة حول محور x حيث سوف نهمل الكتلتين M .

• إذن من المهم فهم السؤال وفهم أي محور يتم حوله الدوران.

$$\because\ I_y = \sum_i m_i r_i^{\,2} = Ma^2 + Ma^2 + m(0) + m(0) = 2Ma^2 \qquad (1)$$

$$\therefore K_R = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2 \qquad (2)$$

• **تذكر** :ما قلناه سابقا، I دائما يحتوى على m مضروبة في مسافة مربعة مضروبة في ثابت. الثابت هذه المرة هو a . (المقصود هو معادلة (1) أعلاه)

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.5 حساب عزوم القصور Calculation of Mements of Inertia

• أخذنا في الفقرات السابقة تعريف وكيفية حساب عزم القصور لجسم كتلته m يدور حول محور بمسافة مقدارها r . كذلك عرفنا بأن عزم القصور الكلي لعدد من الأجسام تدور حول نفس المحور هو عبارة عن المجموع الكلي لتلك العزوم.

• ماذا لو كان الجسم متصلا؟ مثلا شريحة مستطيلة، أو استطوانه، أو كره، أو عمود ونحو ذلك، فكيف نحسب عزم القصور الذاتي له حول محور ما.

• تماما مثل ما فعلنا عند حساب مركز الكتلة في الباب السابق، هنا كذلك سوف نستخدم التكامل ونحتاج إلى عنصر الكتلة dm وبنفس أهمية هذا العنصر في حساب مركز الكتلة، فهو هنا يحدد طريقة حساب التكامل ولذلك فهو مهم جدا، ولابد من التعود لحسابه للأجسام المختلفة.

$$I=\int r^2 dm \qquad (10.17)$$

• مرة أخرى dm هي عبارة عن عنصر يمكن تكراره ليشكل كامل الكتلة، ولابد أن يتم اختياره بحيث يكون متناسقا حول المحور. في حالة أن يكون للجسم حجم فأن: $dm = \rho\, dV$ حيث ρ هي كثافة الجسم و dV تمثل عنصر الحجم.

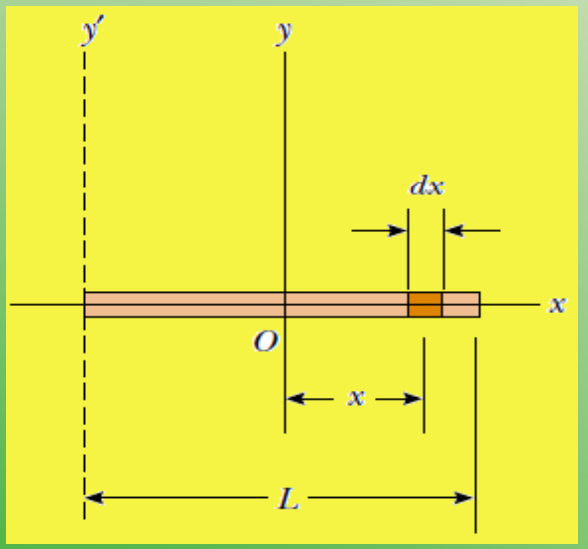
• لاحظ كذلك ورود r^2 مضروبة في m وهي نفس المعطيات السابقة، ونتوقع أن يظهر من التكامل ثوابت معينة ولكن لن تغير من الشكل النهائي المذكور سابقا: مسافة مربعة x كتلة x ثابت ما يتعلق بالجسم.

• حدود التكامل سوف تظهر بعد تحديد عنصر الكتلة.

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.5 حساب عزوم القصور لعمود منتظم Uniform Rigid Rod

• سوف نقوم الآن بحساب عزم القصور لعمود منتظم كتلته الكلية M وطوله L يدور حول محور يمر من منتصفه، كما في الشكل.



• **الحل**: كما سبق، سوف نختار عنصر الكتلة المبين في الشكل، وهو عنصر يمكن تكراره عدة مرات ليغطي كامل الشكل.
• إذا افترضنا بأن الكثافة الطولية للعمود هي λ واخترنا سمك العنصر dx فأن عنصر الكتلة يصبح: λdx .
• ولأن محور y ينصف العمود، فأن حدود التكامل تصبح: -L/2 – L/2
• لاحظ أنه يمكن أن يطلب حساب عزم القصور حول محور يمر من الطرف، وفي هذه الحالة لن يتغير عنصر الكتلة، ولكن فقط حدود التكامل سوف تتغير لتصبح من 0 إلى L .

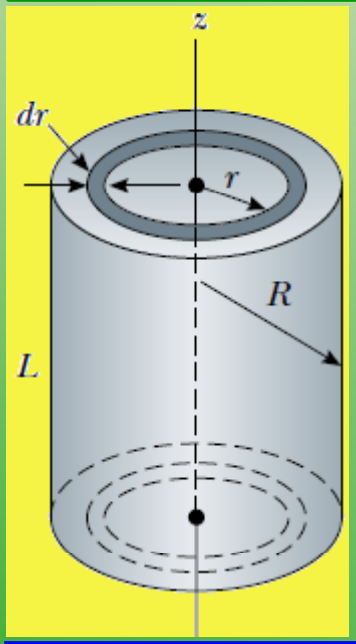
$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \lambda \frac{L^3/8 + L^3/8}{3} \qquad (1)$$

$$\therefore I_y = \lambda \frac{L^3}{12} = \lambda L \frac{L^2}{12} = \frac{1}{12} M L^2 \qquad (2)$$

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.5 حساب عزوم القصور لاسطوانة مصمتة منتظمه Uniform Solid Cylinder

• سوف نقوم الآن بحساب عزم القصور لاسطوانه منتظمة ومصمتة كتلتها الكلية M وطولها L ونصف قطرها R تدور حول محور يمر من مركزها، كما في الشكل.



• **الحل**: كما سبق، سوف نختار عنصر الكتلة المبين في الشكل، وهو عنصر يمكن تكراره عدة مرات ليغطي كامل الشكل. وهو عبارة عن شريحة سمكها *dr* ونصف قطرها *r* وطولها *L* .

• إذا افترضنا بأن الكثافة الحجمية للاسطوانة هي ρ فأن عنصر الكتلة يصبح: ρdr2πrL. (الكثافة x طول محيط العنصر x سمكه x ارتفاعه)

• ولأن محور z يمر بالمركز، فأن حدود التكامل تصبح: من 0 إلى R.

• نفس طريقة الحل ونفس النتيجة سوف نحصل عليها للقرص الذي له نفس الكتلة ونفس نصف القطر ولكن سمكه هو L (فقط غيرنا بدل الطول السمك).

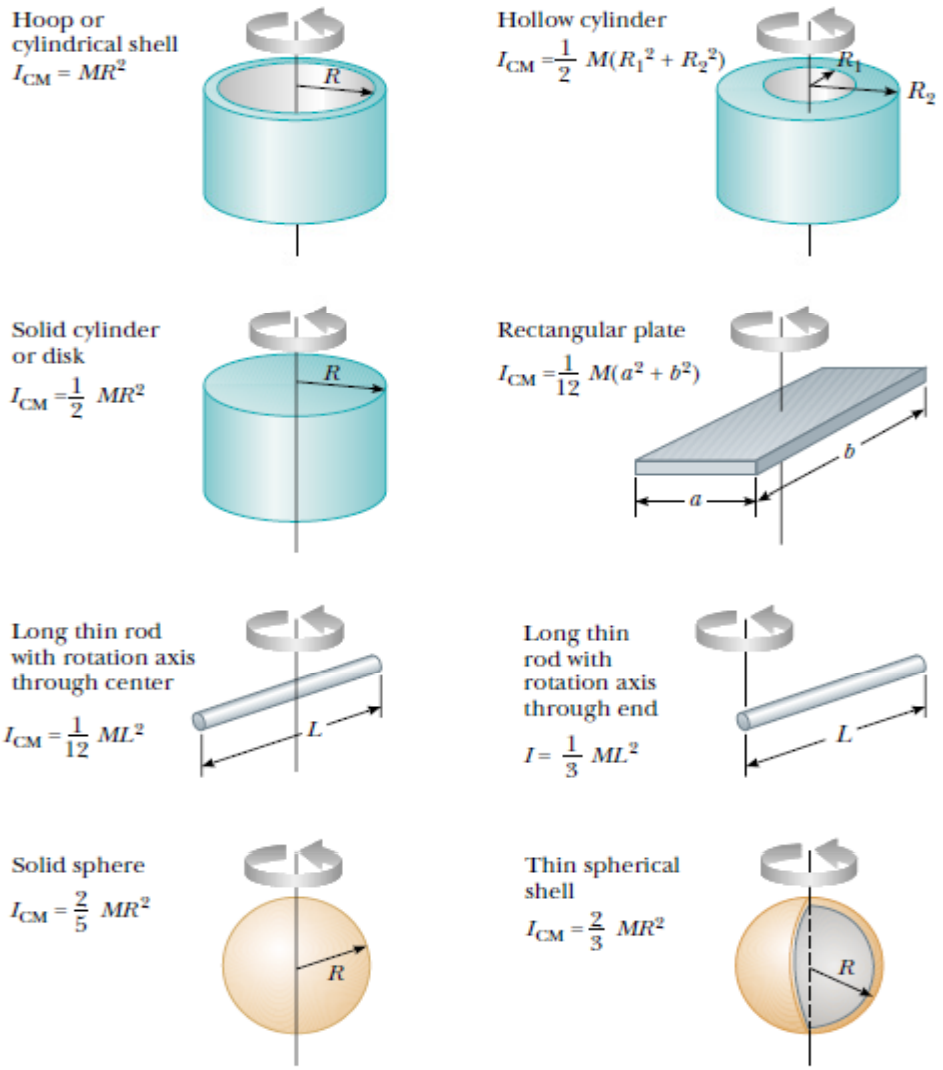
• نقوم بالتكامل التالي:

$$I_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 (2\pi r L dr\,\rho) = 2\pi L\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi L\rho \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi L\rho \frac{R^4}{4}$$

$$\therefore I_z = (\pi R^2)\,L\,\rho\,\frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}MR^2$$

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

عزوم بعض الأشكال المعروفة



- يبين الشكل ثمانية أشكال هندسية معروفة وعزوم قصورها.
- يفضل أن يقوم الطالب بحساب هذه العزوم بالطريقة المشروحة سابقا للتدريب.
- تم تحديد محاور الدوران في كل مرة.
- لاحظ في كل الحالات وجود: M ومسافة مربعة وثابت (قد يساوي 1).
- لاحظ أن $a^2 + b^2$ هي في النهاية مسافة (طول) مربعة.
- الأشكال موجودة في الكتاب ص 304.

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

نظرية المحاور المتوازية parallel-axis theorem

- كثيرا ما يطلب منا حساب عزم القصور حول محور معين ولكن حساب العزم حول هذا المحور صعب بسبب صعوبة التكامل.
- إن نظرية المحاور المتوازية تسهل هذه العملية، حيث يلزم معرفة عزم القصور حول محور يمر بمركز الكتلة (مركز الاسطوانة مثلا، أو منتصف العمود)، ثم نطبق النظرية لأيجاد العزم المطلوب.
- نص النظرية: (10.18) $I = I_{CM} + Md^2$
- إذن عزم القصور حول أي محور = عزم القصور حول مركز الكتلة + الكتلة الكلية x المسافة d بين محور مركز الكتلة وأي محور أي آخر يوازيه.

- **تطبيق على النظرية.**
- نعود لمثال العمود السابق، ونريد حساب عزم القصور حول محور يمر من الطرف.

$$\because I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 \quad and \quad \because d = \frac{L}{2}$$

$$\therefore I = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

- **تأكد من صحة الحل.** قم باستخدام التكامل بشكل مباشر للتأكد من صحة الحل وتطابق نتيجة نظرية المحاور المتوازية مع الحل. لاحظ كيف وفرت عليك النظرية مجهودا كبيرا.

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.6 عزم اللي Torque

- أمثلة عزوم اللي تتكرر يوميا: عندما تقود السيارة وتقوم باللف يمينا وشمالا فأنت تحدث عزم لي على عجلة القيادة، عندما تحاول برم المسمار لكي يدخل في مكانه باستخدام السكروب فهذا عزم لي، والباب عندما تفتحه فأنت تحدث كذلك عزم لي عليه. وهكذا.
- يحصل عزم اللي عندما تستخدم قوة F لأحداث دوران حول محور يبعد عنها مسافة r وتصنع القوة مع هذه المسافة زاوية ϕ . أشارة عزم اللي (+) إذا كان ضد عقارب الساعة و (-) إذا كان مع عقارب الساعة
- لذا نعرف عزم اللي τ كما يلي:

$$\tau = rF \sin\phi \qquad (10.19)$$

- وحيث أن العزوم كميات متجهة، فيمكن جمعها اتجاهيا مثل القوى:

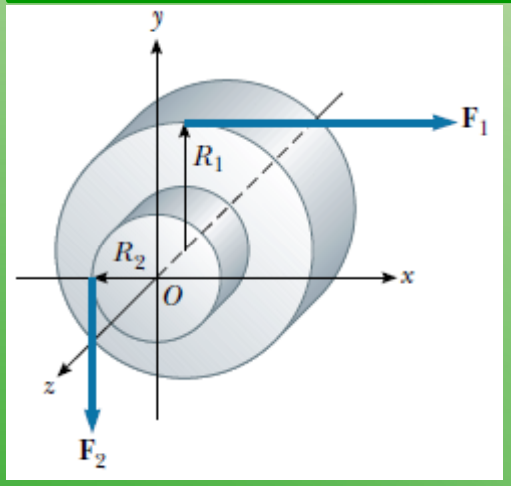
$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots . \tau_n \qquad (10.20)$$

- لاحظ أنه كلا من القوة وعزم اللي يحدث حركة، ولكن الفرق بينهما أن عزم اللي هو قوة مضروبة في مسافة. لذلك فأن وحدة عزم اللي يجب أن تكون N.m .
- أيضا لاحظ أنه عندما يكون خط تأثير القوة والمسافة r متعامدين، فأن هذا يعطي أفضل عزم لي $\tau = Fr$.

- **كويز**: ما هي الكمية الفيزيائية التي لها نفس وحدة عزم اللي؟

- **الحل**: الشغل W له نفس الوحدة لأنه قوة ضرب مسافة. ولكن مفهوم الشغل مختلف تماما عن عزم اللي.

- مثال 10.9 : محصلة العزم على اسطوانة. كما في الشكل.
- (أ) احسب محصلة العزم الكلي
- (ب): إذا كانت $F_1=5\ N,\ R_1=1\ m,\ F_2=15\ N,\ R_2=0.5\ m$ فما هي محصلة عزم اللي، وأين اتجاه الدوران؟



$$(a)\ \because \sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = -F_1R_1 + F_2R_2$$

(-) (+)

$$(b)\ \tau_{net} = -F_1R_1 + F_2R_2$$
$$= -(5)(1) + (15)(0.5) = 2.5\ N\ .m$$

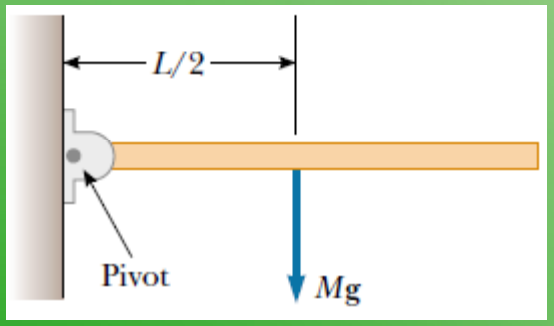
- حيث أن أشارة المحصلة موجبة، إذن الدوران بعكس عقارب الساعة

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.7 العلاقة بين عزم اللي والتسارع الزاوي Torque and Ang. Accel.

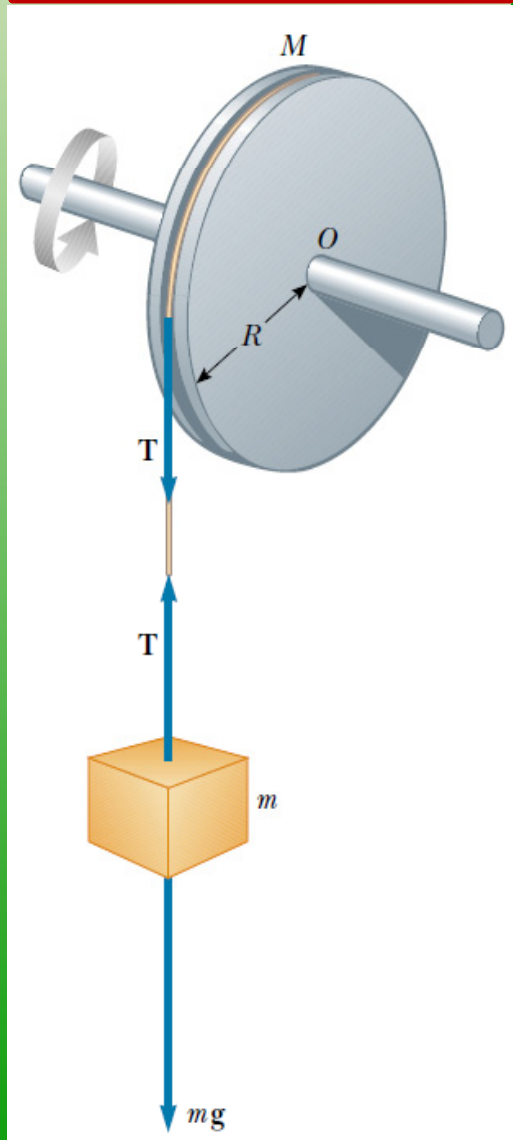
- في التعبير $\tau = rF\sin\varphi$ نحن في الحقيقة أخذنا مركبة القوة F التي تصنع زاوية قائمة مع المحور r .
- لو تأملنا في هذه القوة نجدها عبارة عن قوة مماسية F_t .

$$\because F_t = m a_t$$
$$\therefore \tau = F_t r = (m a_t) r$$
$$\because a_t = r\alpha$$
$$\therefore \tau = (m r \alpha) r = m r^2 \alpha$$
$$\because I = m r^2$$
$$\therefore \tau = I \alpha \qquad (10.20)$$



- مثال: 10.10: انظر الشكل، ما هو التسارع الزاوي والتسارع الخطي للعمود (أول ما يبدأ حركته بالنزول)

$$\because \tau = F_t r = (M g)\frac{L}{2} \quad and \quad I = \frac{1}{3} M L^2$$
$$\because \tau = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \left(M g \frac{L}{2}\right) / \left(\frac{1}{3} M L^2\right) = \frac{3g}{2L}$$
$$\because a_t = L\alpha = L\left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{2} g$$



• مثال 10.12: في الشكل المبين، العجلة كتلتها M ونصف قطرها R وعزم قصور ذاتي I . تم لف حبل عديم الوزن حول العجلة وتم تعليق كتلة m بالحبل. (أ) احسب التسارع الزاوي للعجلة (ب) التسارع الخطي للكتلة m (ج) مقدار الشد في الحبل

$$\because \tau = Fr = TR = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{TR}{I}$$

Newton's 2nd Law for m:

$$mg - T = ma = mR\alpha = mR\frac{TR}{I}$$

$$\rightarrow mg = T\left(1+\frac{mR^2}{I}\right) = T\left(\frac{I+mR^2}{I}\right) \rightarrow T = \frac{mgI}{I+mR^2}$$

$$\therefore T = \frac{mg(1/2MR^2)}{1/2MR^2 + mR^2} = \frac{(0.5)(9.8)(0.5)(2)}{(0.5)(2)+0.5} = \frac{4.9}{1.5} = 3.27\,N$$

$$\therefore \alpha = \frac{TR}{I} = \frac{(3.27)(0.3)}{(0.5)(2)(0.3)^2} = 10.9\ rad/s^2$$

$$a = R\alpha = 0.3\times 10.9 = 3.27\,m/s^2$$

الباب 10: دوران جسم حول محور ثابت Rot. of a Rigid O. About a Fixed Axis

10.8 الشغل، القدرة والطاقة الحركية الدورانية Work, Power & K.E in Rotational Motion

- في الحركة الخطية عرفنا الشغل كما يلي:

$$dW = \mathbf{F}.d\mathbf{s}$$

- في الحركة الدورانية نعرف الشغل بطريقة مقاربة:

$$dW = \tau d\theta \qquad (10.22)$$

- القدرة تعرف بأنها الشغل مقسوما على الزمن، وبالتالي فتعريف الشغل هل هو دوراني أم خطي هو الذي يعطي القدرة الفرق:

$$P = dW/dt = \tau\ \omega \qquad (10.23)$$

- الطاقة الحركية الخطية هي: $\frac{1}{2}\ mv^2$ وفي الدورانية هي:

$$K_R = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2 \qquad (10.24)$$

- نفس دلالات الكميات في الحركة الخطية تفهم هنا كذلك.
- على سبيل المثال: محصلة الشغل الذي تبذله العزوم الخارجية على الجسم ليدور حول محور ثابت يعادل التغير في طاقته الحركية.
- كذلك فأن الشغل وطاقة الحركة يتحول كل منهما إلى الآخر

- في الشريحة القادمة مقارنة بين قوانين الحركة الخطية والحركة الدورانية

TABLE 10.3 Useful Equations in Rotational and Linear Motion

Rotational Motion About a Fixed Axis	Linear Motion
Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$
Resultant torque $\Sigma\tau = I\alpha$	Resultant force $\Sigma F = ma$
If α = constant: $\omega_f = \omega_i + \alpha t$; $\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$; ${\omega_f}^2 = {\omega_i}^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	If a = constant: $v_f = v_i + at$; $x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at^2$; ${v_f}^2 = {v_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$
Work $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$	Work $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx$
Rotational kinetic energy $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$
Power $\mathcal{P} = \tau\omega$	Power $\mathcal{P} = Fv$
Angular momentum $L = I\omega$	Linear momentum $p = mv$
Resultant torque $\Sigma\tau = dL/dt$	Resultant force $\Sigma F = dp/dt$

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

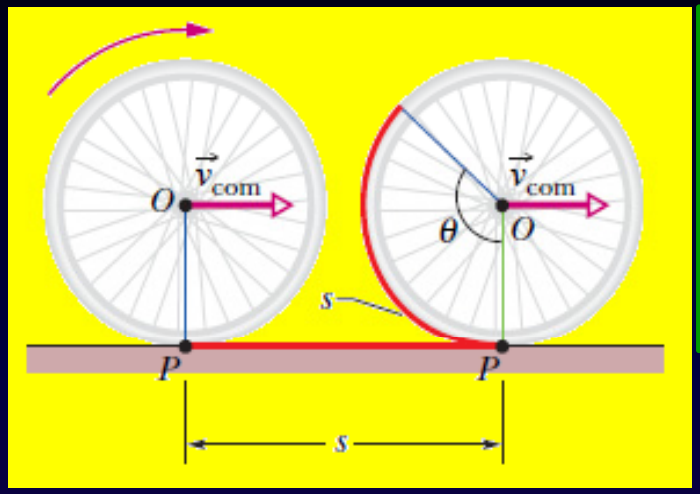
د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 18

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Turque, and Ang. Mom.

11.2 التدحرج يجمع الحركة الخطية والدورانية في نفس الوقت



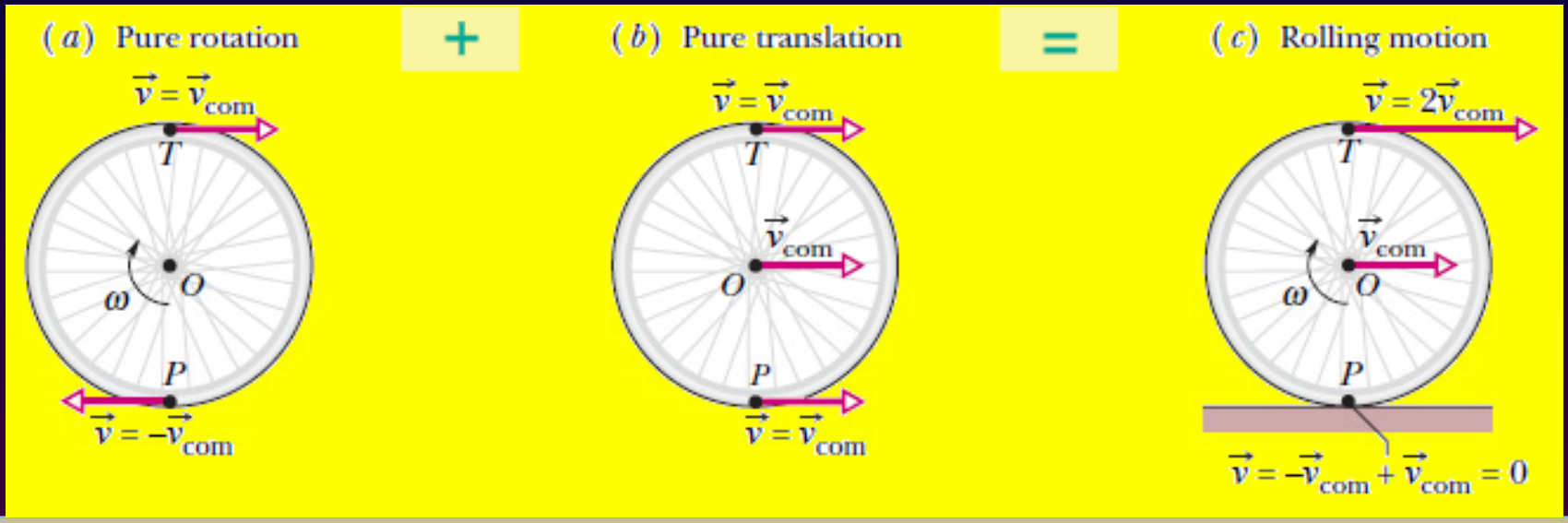
• كما نلاحظ في الشكل: عندما تتحرك العجلة مسافة S فأن النقطة P الواقعة على محيطها تتحرك على محيط العجلة نفس المسافة قاطعة زاوية مقدارها θ .

$$S = R\theta \qquad (11.1)$$

بتفاضل الطرفين:

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow V_{com} = R\omega \qquad (11.2)$$



الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Turque, and Ang. Mom.

11.3 الطاقة الحركية للتدحرج Kinetic Energy of Rolling

• سوف نبين أن الطاقة الحركية للتدحرج تحوي قسمين: قسم بسبب الحركة الخطية والآخر بسبب الحركة الدورانية.
• أخذنا سابقا تعريف الطاقة الحركية الدورانية كما يلي:

$$k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

• ويمكن كتابتها بالنسبة للنقطة P الموجودة على طرف العجل كما يلي:

$$k = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad (11.3)$$

• باستخدام نظرية المحاور المتوازية: يمكن أن نعبر عن عزم القصور عند النقطة المذكورة كما يلي:

$$I_P = I_{com} + MR^2 \qquad (11.4)$$

• إذن تصبح الطاقة الحركية الكلية للعجلة كما يلي:

$$K = \frac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 \qquad (11.5)$$

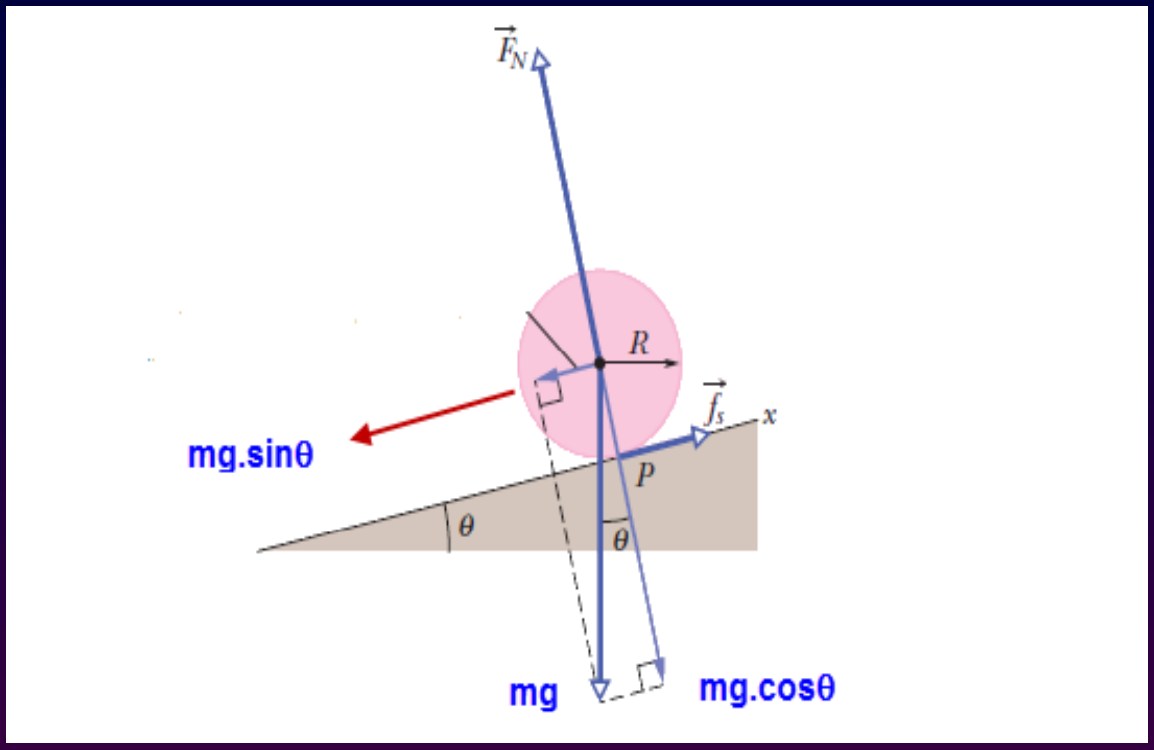
الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Turque, and Ang. Mom.

11.3 مثال على التدحرج Example: Rolling of a ball from a ramp

• نستخدم العلاقة بين السرعة الخطية والدورانية لأعادة كتابة المعادلة بالشكل التالي:

$$K = \frac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2 \qquad (11.5)$$

• إذن تتكون الطاقة الحركية الكلية من حدين: الطاقة الدورانية + الطاقة الحركية الخطية



• مثال: كرة تنحدر من قمة سطح مائل بزاوية معينة:

• إذا كانت $\theta = 30^o$ ، $M = 6\ kg$ ، $h = 1.2\ m$ فاحسب:

• سرعة الكرة في اسفل المنحدر.

• ما مقدار واتجاه قوة الاحتكاك على الكرة أثناء نزولها إلى الأسفل؟

• لاحظ الفرق الكبير بين انزلاق الكرة وبين نزولها وهي تتدحرج (تدور).

11.3 الطاقة الحركية للتدحرج Kinetic Energy of Rolling

• الحل: سوف نطبق مبدأ حفظ الطاقة حيث أن الطاقة الكلية في أعلى المنحدر = الطاقة الكلية أسفله

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2\right] + 0 = 0 + Mgh$$

$$\because v_{com} = \omega R \Rightarrow \omega = v_{com} / R$$

$$\because I_{com} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} MR^2\right)\left(\frac{v_{com}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2\right] = Mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} v_{com}^2 + \frac{1}{2} v_{com}^2 = gh$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} v_{com}^2 = gh \Rightarrow v_{com} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

$$\Rightarrow v_{com} = \sqrt{\frac{10}{7}(9.8)(1.2)} = 4.10\, m/s$$

• الحل: لحساب قوة الاحتكاك مقدارا واتجاها:

$$\because Rf_s = I\alpha$$

$$\Rightarrow f_s = -\frac{I\alpha}{R} = -\frac{Ia}{R^2} = \frac{\frac{2}{5}MR^2(a)}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma$$

$$\because f_s - Mg\sin\theta = Ma$$

$$\therefore f_s - Mg\sin\theta = -\frac{5}{2}f_s$$

$$\Rightarrow f_s\left[1+\frac{5}{2}\right] = Mg\sin\theta \Rightarrow f_s = \frac{2}{7}Mg\sin\theta$$

$$= \frac{2}{7}(6)(9.8)(\sin 30) = 8.4\,N$$

• لاحظ أن الحل لم يعتمد على مقدار نصف القطر R وأنما فقط على مقدار الكتلة.
• إذن قوة الاحتكاك المحسوبة أعلاه صحيحه بغض النظر عن نصف القطر ولكن فقط يشترك أن تكون الكتلة تساوي 6 kg .

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Turque, and Ang. Mom.

11.7 الاندفاع الزاوي Angular Momentum

• يعرف الاندفاع الزاوي رياضيا كما يلي (وبالتالي فهو كمية متجهه):

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (11.18)$$

• يعبر عن قانون نيوتن الثاني في حالة الحركة الخطية والد ورانية كما يلي:

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \qquad (11\text{-}22)$$

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} = \dot{\vec{\ell}} \qquad (11\text{-}23)$$

Proof:

$$\because \vec{\ell} = m\,(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (11.18)$$

$$\therefore \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) = m\left(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}\right) = m\left(\vec{r} \times \vec{a}\right) = \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$\therefore \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}_{net}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{net} = \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} \qquad (11.25)$$

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Torque, and Ang. Mom.

11.9 الاندفاع الزاوي لعدد من الأجسام Angular Mom. For a system of particles

• بكل بساطة، عندما يكون هناك نظام مكون من عدد من الأجسام المختلفة، فأن الاندفاع الزاوي الكلية هو عبارة عن مجموع الاندفاعات الزاوية لجميع الأجسام، تماما مثل ما فعلنا في الاندفاع الخطي:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + ... \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \qquad (11.26)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\,\vec{\ell}_i}{dt} \qquad (11.27)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{net,i} \qquad (11.28)$$

$$\therefore \vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(system of particles)} \qquad (11.29)$$

• الاندفاع الزاوي للجسم الصلب حول محور معين:

$$L = I\,\omega \qquad (11.31)$$

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Torque, and Ang. Mom.

جدول مقارنة بين الحركتين الخطية والدورانية

- جدول يبين مزيدا من المقارنة بين الحركتين الخطية (الانتقالية) والدورانية.
- يضاف هذا الجدول إلى الكميات السابقة حيث أن هناك تشابها كبيرا في القوانين، ولكن مع اختلاف رموز ودلالات الكميات الفيزيائية المستخدمة:

Table 11-1

More Corresponding Variables and Relations for Translational and Rotational Motion[a]

Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\ (=\vec{r}\times\vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell}\ (=\vec{r}\times\vec{p})$
Linear momentum[b]	$\vec{P}\ (=\Sigma\vec{p}_i)$	Angular momentum[b]	$\vec{L}\ (=\Sigma\vec{\ell}_i)$
Linear momentum[b]	$\vec{P}=M\vec{v}_{com}$	Angular momentum[c]	$L=I\omega$
Newton's second law[b]	$\vec{F}_{net}=\frac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law[b]	$\vec{\tau}_{net}=\frac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law[d]	$\vec{P}=$ a constant	Conservation law[d]	$\vec{L}=$ a constant

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Torque, and Ang. Mom.

مقارنة الرموز بين الحركتين الخطية والدورانية

• الرموز المستخدمة في الحركة الخطية وما يقابلها في الحركة الدورانية: صور القوانين تكاد تكون متطابقة ولكن فقط مع تغيير في الرموز:

$$x \rightarrow \theta$$
$$v \rightarrow \omega$$
$$a \rightarrow \alpha$$
$$m \rightarrow I$$
$$p \rightarrow \ell$$
$$F \rightarrow \tau$$

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Torque, and Ang. Mom.

11.11 حفظ الاندفاع الزاوي Conservation of Ang. Momentum

• سبق مناقشة حفظ الاندفاع الخطي، وقلنا بأن الاندفاع الخطي لنظام معزول محفوظ دائما بغض النظر عن ما يحصل للجسم، مثلا تصادمات مرنة أو غير مرنه، انفجار إلى عدة قطع، وهكذا.

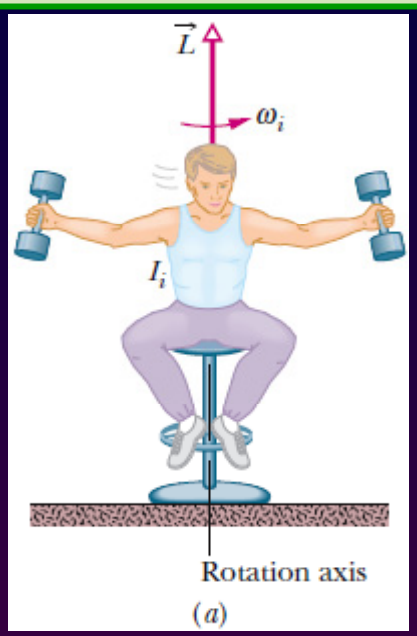
• نفس ما ينطبق على الاندفاع الخطي يمكن إيجاده في الاندفاع الزاوي.

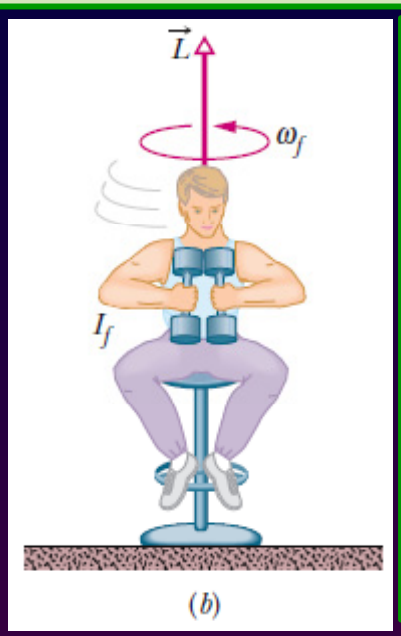
• إذن توجد صيغة تقول بان الاندفاع الزاوي = كمية ثابتة (أي محفوظ)

$$\boldsymbol{L} = constant \qquad (11.32)$$

$$\boldsymbol{L_i} = \boldsymbol{L_f} \qquad (11.33)$$

$$\boldsymbol{I_i\,\omega_i} = \boldsymbol{I_f\,\omega_f} \qquad (11.34)$$





• في الشكل على اليسار، بسبب حفظ الاندفاع الزاوي الكلي للنظام، وحيث أن ضم اليدين فجأة سوف يؤدي إلى تقليل قيمة عزم القصور $\boldsymbol{I}$ فحتى نحافظ على الكميتين في معادلة (11.34) متساوين، فأذن لابد أن يؤدي ذلك إلى زيادة مماثلة في سرعة الدوران، والعكس بالعكس.

• لاحظ أن عزم القصور يعتمد على كل من الكتلة + طول الذراع.

• إذن حتى لو كانت الكتلة نفسها لم تتغير، ولكن مد اليدين أو ضمهما يؤدي إلى تغيير في قيمة عزم القصور

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 210 فيز

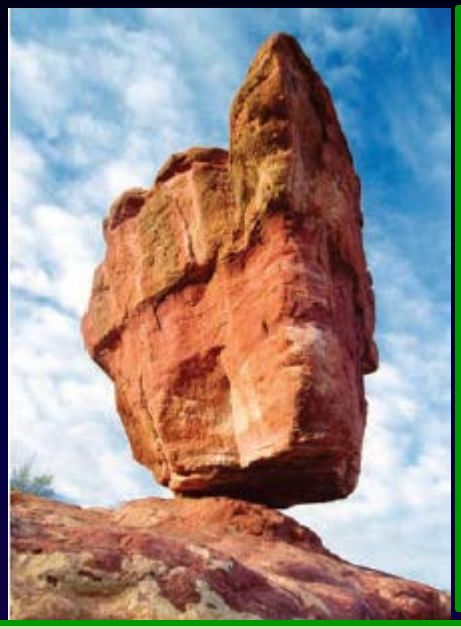
د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 19

الباب 12: الاتزان والمرونة Equilibrium and Elasticity

12.1 الاتزان Equilibrium



- معنى كون الجسم في حالة اتزان أنه لا تتغير حالته الراهنة، أي أنه أن كان ساكنا تماما فيظل على سكونه، وأذا كان يتحرك في خط مستقيم فيظل كذلك بدون تغير في سرعته، وإذا كان يدور فيظل يدور ولكن بنفس السرعة. من امثلة ذلك: مروحة السقف التي تدور بسرعة ثابتة.
- هناك شرطان أساسيان حتى يصبح الجسم في وضع اتزان:
- الاندفاع الخطي لمركز الكتلة يكون ثابتا
- الاندفاع الزاوي حول مركز الكتلة يكون ثابتا
- أي أن:
- $\boldsymbol{P}$ = constant and: $\boldsymbol{L}$ = constant (12.1)

- شرح متطلبات الاتزان:
- أولا: أن كون الاندفاع الخطي لمركز الكتلة ثابتا يعني ان تفاضله بالنسبة للزمن = صفرا
- وهذا معناه أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة = صفرا (أي لا يوجد تسارع أو التسارع = كمية ثابتة
- ثانيا: أن كون الاندفاع الزاوي حول مركز الكتلة ثابتا يعني أن تفاضله بالنسبة للزمن = صفرا
- وهذا معناه أن محصلة عزوم اللي الخارجية حول مركز الكتلة = صفرا ، أي أن التسارع الزوي يساوي صفرا أو يساوي كمية ثابتة.
- إذن الجسم لا يتغير تسارعه الخطي ولا تسارعه الزاوي

الباب 12: الاتزان والمرونة Equilibrium and Elasticity

12.1 الاتزان Equilibrium

• نعبر عن ذلك رياضيا كما يلي:

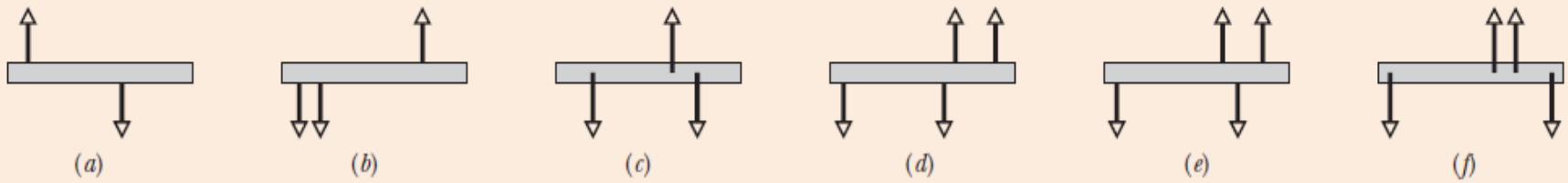
$$F_{net} = \frac{dP}{dt} = 0 \qquad (12.3)$$

$$\tau_{net} = \frac{dL}{dt} = 0 \qquad (12.5)$$

• أي من الأشكال التالية يمكن أن يؤدي إلى الاتزان؟ القوى المبينة ليست بالضرورة متساوية ولكنها لا تساوي الصفر في كل الاحوال.

CHECKPOINT 1

The figure gives six overhead views of a uniform rod on which two or more forces act perpendicularly to the rod. If the magnitudes of the forces are adjusted properly (but kept nonzero), in which situations can the rod be in static equilibrium?



• الجواب: c, e, f فقط لأن الباقي يقود إلى قوى غير متزنه فيحصل أما دوران أو حركة ألى أعلى أو اسفل. أي تؤدي إلى مخالفة الشرطين أو أحدهما.

- العمود في وضع اتزان.

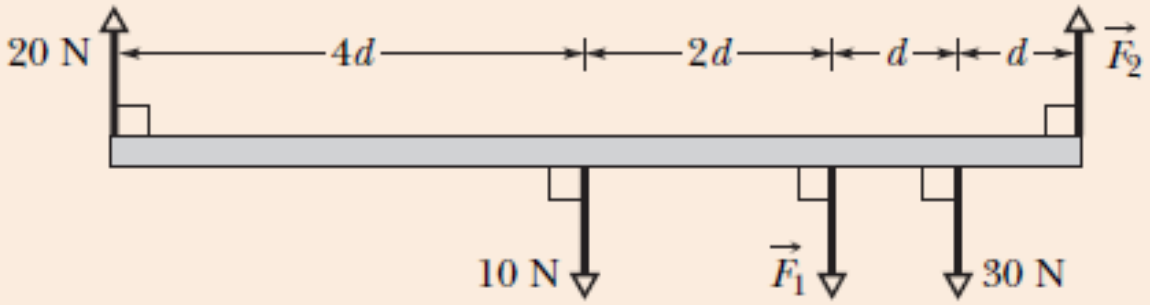
(a) هل يمكن حساب مقادير كل من: F_1 & F_2 بمجرد معادلة القوى؟

(b) إذا أردت أن تتخلص من تأثير القوة F_1 على الدوران فاين تضع محور الدوران؟

(c) إذا كان مقدار F_2= 65 N فكم هو مقدار F_1؟

CHECKPOINT 2

The figure gives an overhead view of a uniform rod in static equilibrium. (a) Can you find the magnitudes of unknown forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ by balancing the forces? (b) If you wish to find the magnitude of force $\vec{F}_2$ by using a balance of torques equation, where should you place a rotation axis to eliminate $\vec{F}_1$ from the equation? (c) The magnitude of $\vec{F}_2$ turns out to be 65 N. What then is the magnitude of $\vec{F}_1$?



- توضيح وحل:

(a) لا، لا يمكن ذلك بمجرد النظر إلى القوى، بل يجب استخدام الشرطين في نفس الوقت. إذن من غير الممكن الحل وأيجاد قيم القوى المجهولة من مجرد تطبيق الشرط الأول للاتزان.

(b) حيث أن طريقة حل مسائل الاتزان تبدأ بتحديد محور للدوران، وهو أمر اختياري، فيمكن اختيار محور يمر من أي نقطه على العمود. ولكن يفضل اختيارمحور يساعد على التخلص من بعض القوى. وحيث أن عزم اللي هو عبارة عن (القوة × ذراعها) إذن من أجل التخلص من القوة F_1 فكل ما علينا هو أن نختار محور دوران حول هذه القوة تحديدا حتى تصبح قيمة الذراع = صفرا.

(c) 1st cond. $\rightarrow \sum F = 0 \rightarrow 20 + F_2 - 10 - F_1 - 30 = 0$

$\therefore F_2 - F_1 - 20 = 0 \rightarrow F_1 = F_2 - 20$ (1)

2nd cond. $\rightarrow \sum \tau = 0$

$\therefore -20(4\hat{\alpha}) + 0 - F_1(2\hat{\alpha}) - 30(3\hat{\alpha}) + F_2(4\hat{\alpha}) = 0$

$\therefore -80 + 0 - 2F_1 - 90 + 4F_2 = 0$

$\rightarrow 4F_2 - 2F_1 = 170$ (2)

(1) and (2): $\rightarrow 4F_2 - 2(F_2 - 20) = 170$

$\rightarrow 4F_2 - 2F_2 + 40 = 170 \rightarrow 2F_2 = 130 \rightarrow F_2 = 65\,N$ (3)

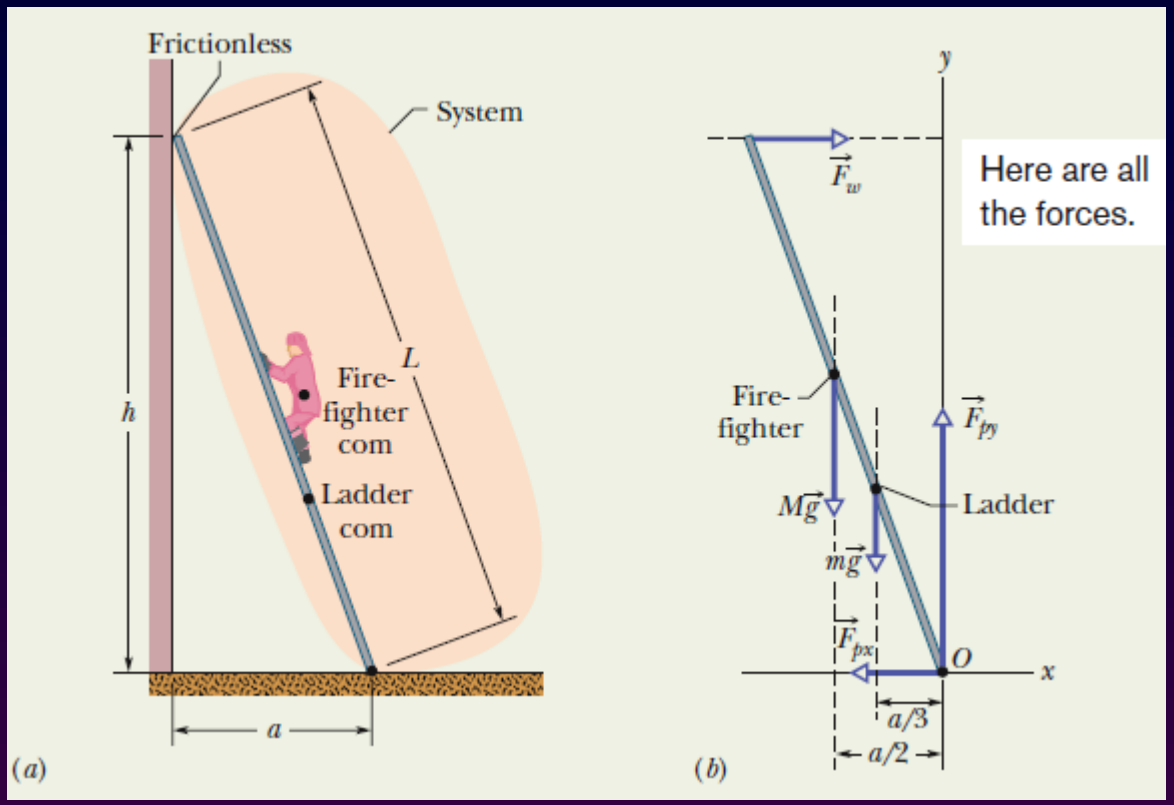
(1) & (3): $\rightarrow F_1 = 45\,N$

Equilibrium and Elasticity الباب 12: الاتزان والمرونة

Balancing a leaning ladder 12.5 مثال السلم المستند على الحائط

• مثال السلم: هناك سلم طوله L = 12 m وكتلته m = 45 kg يستند على حائط أملس (لا يوجد احتكاك بينه وبين الحائط) . نهاية السلم العلوية تقع عند h = 9.3 m بالنسبة لسطح الأرض. يقع مركز ثقل السلم عند L/3 من نهايته السفلي. هناك رجل إطفاء في منتصف السلم كلته M =72 kg .

• احسب مقادير القوى المؤثرة على السلم من الحائط ومن الأرض.

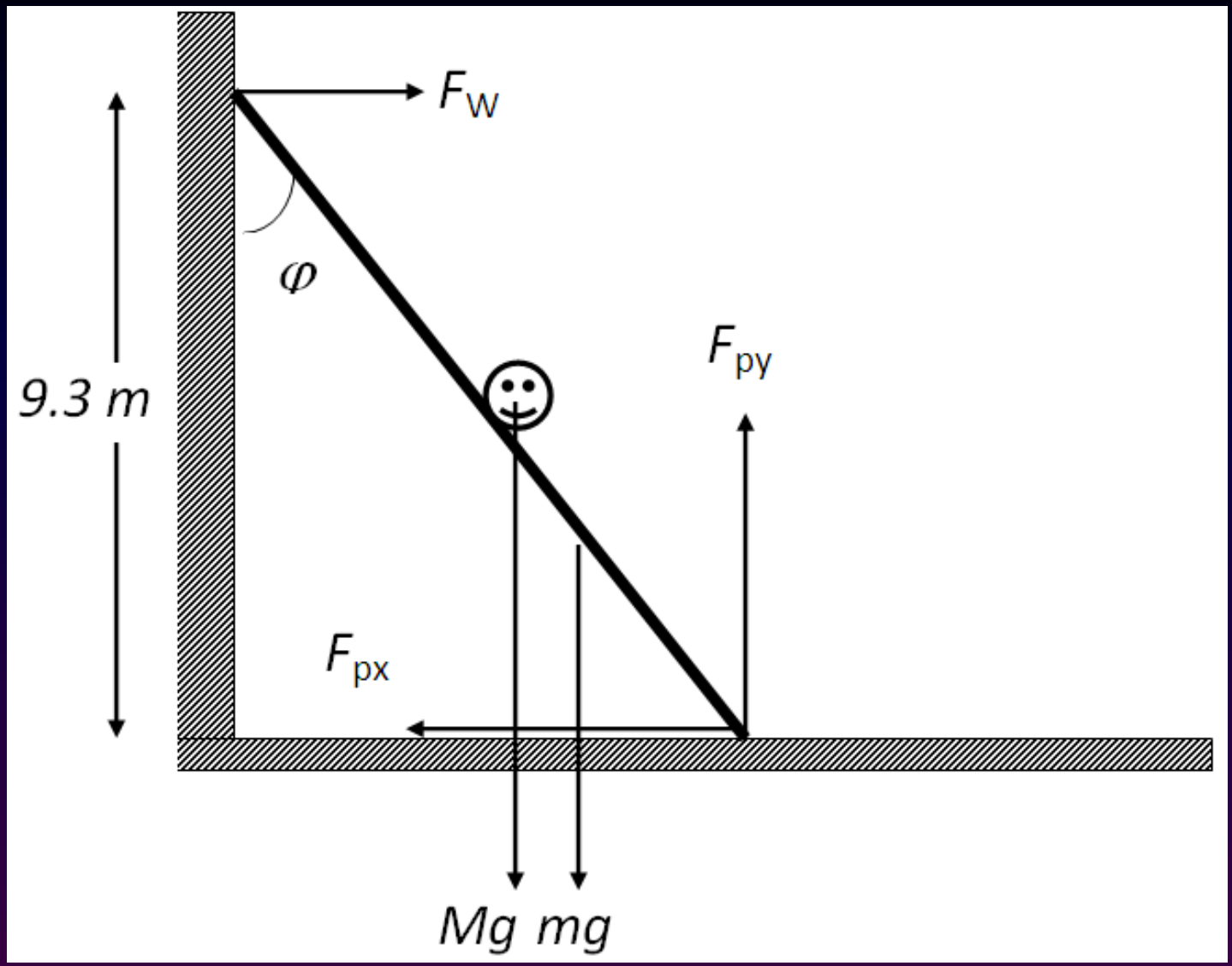


• هذه مسألة اتزان. سوف نطبق عليها شرطي الاتزان ونقوم بالحل.

• لاحظ أن قوى الاحتكاك تمنع السلم من الانزلاق على الأرض، السلم يريد أن ينزلق إلى اليمين وقوى الاحتكاك تسحبه باتجاه الحائط.

• وأن السلم يضغط على الجدار من أعلى باتجاه اليسار وبالتالي فالجدار يضغط على السلم بنفس القوة (الفعل ورد الفعل) ولكن باتجاه اليمين.

Balancing a leaning ladder 12.5 مثال السلم المستند على الحائط



- الحل: سوف نختار نقطة محور الدوران حول أسفل السلم حتى نتخلص من تأثير قوتين.

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum \tau = 0 \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow F_w - F_{px} = 0 \quad (4)$$

$$(2) \rightarrow F_{py} - mg - Mg = 0 \quad (5)$$

$$(3) \rightarrow F_{py}(0) + F_{px}(0) + mg\frac{\cancel{L}}{3}\sin\varphi + Mg\frac{\cancel{L}}{2}\sin\varphi - F_w \cancel{L}\cos\varphi = 0 \quad (7)$$

$$\rightarrow \frac{(45)(9.8)(0.632)}{3} + \frac{(72)(9.8)(0.632)}{2} = F_w(0.775)$$

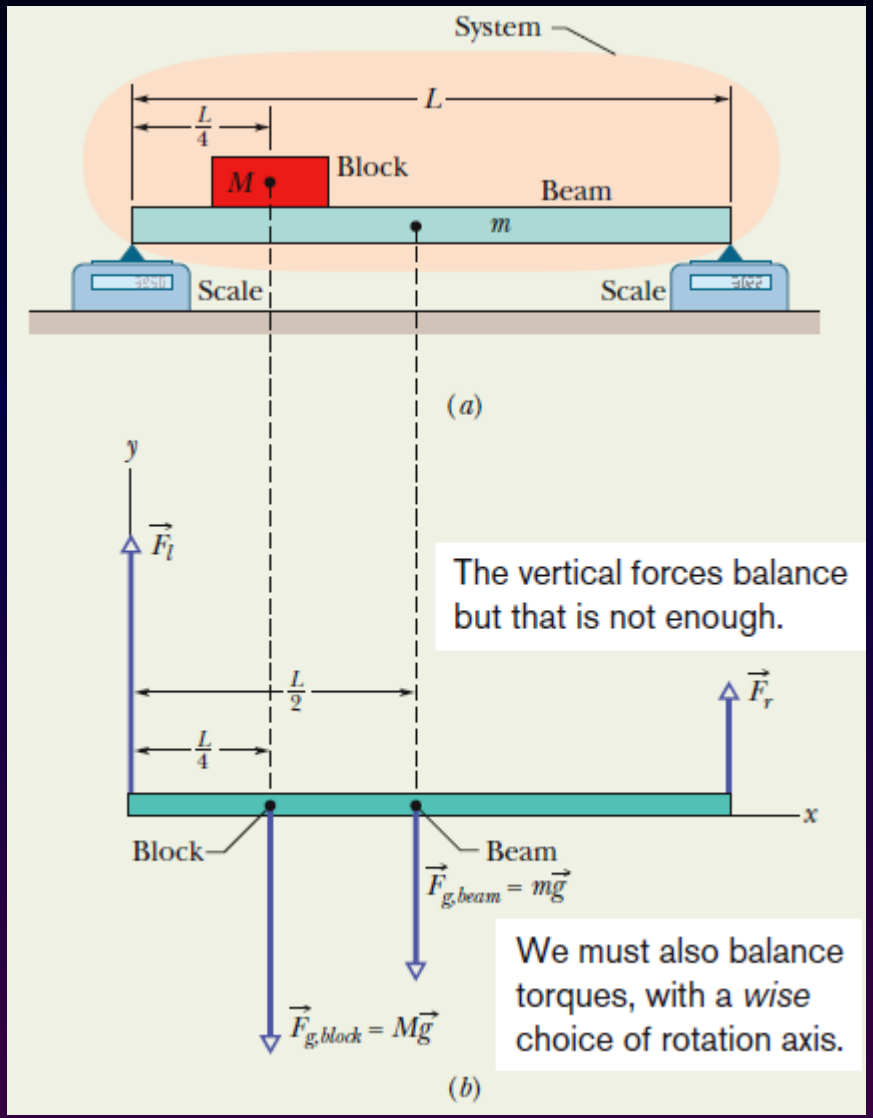
$$\rightarrow F_w = 408\ N \quad (8)$$

$$(8) \text{ in } (4): F_{px} = F_w = 408\ N$$

$$(5) \rightarrow F_{py} = mg + Mg = (45)(9.8) + (72)(9.8) = 1145\ N$$

Equilibrium and Elasticity الباب 12: الاتزان والمرونة

Balancing a horizontal beam 12.5 مثال عمود أفقي على ميزانين



- مثال عمود أفقي:
- في الشكل المجاور: العمود الذي طوله L يتكئ على ميزانين على اليسار واليمين. كتلة العمود m = 1.8 kg وموضوع عليه كتلة M = 2.7 kg بالقرب من الطرف الأيسر كما هو مبين.
- المطلوب هو: كم قراءة كل ميزان؟

- الحل:
- سوف نرمز للطرف الأيسر بالرمز *l* والأيمن *r*
- سوف نختار محور الدوران عند الطرف الأيسر حتى نتخلص من تأثير القوة F_l .
- نقوم بتطبيق شرطي الاتزان:
- الأول: محصلة القوى = صفر
- الثاني: محصلة العزوم = صفر
- نتوقع أن قراءة الميزان الأيسر تكون أكبر من قراءة الميزان الأيمن بسبب وجود الكتلة M على اليسار.