جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 04

بعض الطرق الرياضية في حساب التغيرات 2

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

مثال 6.1 أقصر مسافة بين نقطتين

- كتبنا سابقا العلاقة التالية: $L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$
- الدالة المقصودة في داخل التكامل هي: $f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}.$
- نطبق عليها معادلة (14) (معادلة أولار-لاجرانج) ونوجد الحدين التاليين:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \textbf{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

$$\therefore (14) \Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \Rightarrow y'^2 = c^2(1 + y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

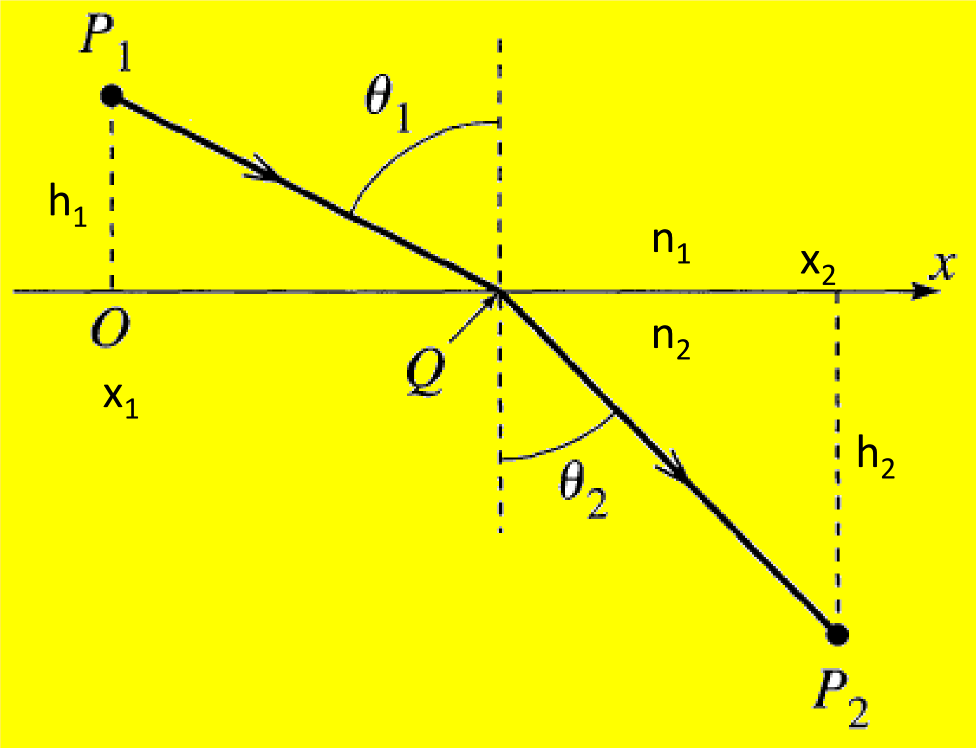
$$\Rightarrow y'^2(1 - c^2) = c^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} \Rightarrow y' = c'$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = c' \Rightarrow dy = c'dx \Rightarrow y = c'x + c''$$

$$or: \mathbf{y} = \mathbf{ax} + \mathbf{b}$$

تمرين محلول

- A ray of light travels from point P_1 in a medium of refractive index n_1 to P_2 in a medium of index n_2, by way of the point Q on the plane interface between the two media, as in the figure. Show that Fermat's principle implies that, on the actual path followed, Q lies in the same vertical plane as P_1 and P_2 and obeys Snell's law, that $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$



تمرين محلول - الحل

$$t=\int_{P_1}^{P_2} dt=\int_{P_1}^{P_2}\frac{ds}{v}=\frac{1}{c}\int_{P_1}^{P_2} n\,ds \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{let}\ P_1(x,y,z)=P_1(0,h_1,0)\\&\textbf{let}\ P_2(x,y,z)=P_2(0,-h_2,0)\\&\textbf{let}\ Q(x,y,z)=Q(x,0,z)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\because\ ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (3)$$

$$\therefore t=\int_{P_1}^{P_2} dt=\int_{P_1}^{Q_2} dt+\int_{Q}^{P_2} dt=\frac{n_1}{c}\int_{P_1}^{Q} ds+\frac{n_2}{c}\int_{Q}^{P_2} ds \qquad (4)$$

$$\therefore t=\frac{n_1}{c}\int_{0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx+\frac{n_2}{c}\int_{x}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (5)$$

تمرين محلول - الحل (متابعة)

- الآن لابد أن نعرف بأن كون معاملات الانكسار n_1, n_2 ثوابت فيؤدي ذلك إلى أن المسارات بين P_1 and Q و Q and P_2 يجب أن تكون مستقيمة:

$$let \quad d_1 = P_1Q = \sqrt{x^2 + h_1{}^2}$$

$$and \;\; d_2 = QP_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2{}^2}$$

$$\therefore t = \frac{n_1}{c}\sqrt{x^2 + h_1{}^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2{}^2}$$

$$\rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{n_1}{c}\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1{}^2}} - \frac{n_2}{c}\frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2{}^2}} = 0$$

$$\rightarrow n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1{}^2}} = n_2 \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2{}^2}}$$

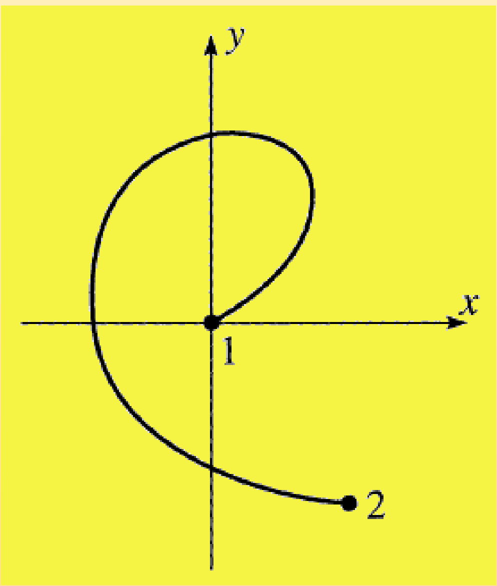
$$\because \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1{}^2}} = \sin\theta_1 \quad and \quad \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + h_2{}^2}} = \sin\theta_2$$

$$\therefore n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2 \qquad (6)$$

حساب التغيرات في ظل وجود أكثر من متغيرين

- هناك حالات يصعب فيها وصف الخط الموجود بين نقطتين بالعلاقة $y(x)$ كما فعلنا سابقا. أنظر الشكل المرفق كمثال على ذلك.
- نحتاج هنا أن نتصور مسارا يعتمد على متغير مستقل تماما ولنسميه u بحيث أن:

$$x = x(u), y = y(u)$$



- يصبح طول القطعة من المسار:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,du \qquad (28)$$

- وبالتالي يصبح المسار كاملا بالصورة التالية:

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{x(u)^2 + y(u)^2}\,du. \qquad (29)$$

- أذن صار لدينا دالتان مجهولتان هما: $x(u), y(u)$
- وأصبحت المسألة المطلوب حلها هي:

$$S = \int_1^2 f[x(u), y(u), x'(u), y'(u), u]du. \qquad (30)$$

حساب التغيرات في ظل وجود أكثر من متغيرين

- قد يبدو الحل الآن أصعب من السابق بسبب وجود دالتين بدل دالة واحدة
- ولكن سوف نستخدم نفس التقنيات ونفترض وجود عدة مسارات خاطئة ومسار واحد صحيح (الأقصر) أي أن:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u) + \alpha\xi(u); \qquad \xi(u_1) = \xi(u_2) = 0. \\ y &= y(u) + \beta\eta(u); \qquad \eta(u_1) = \eta(u_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

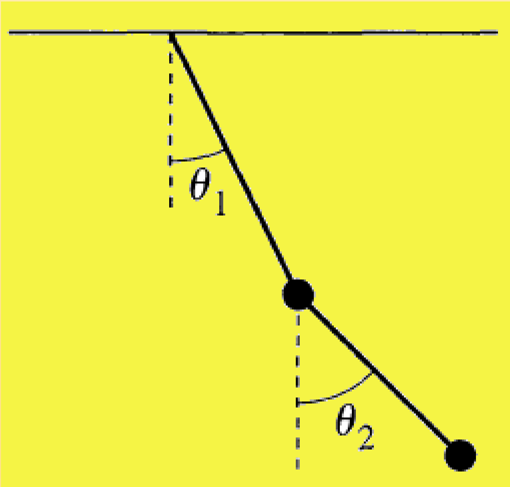
- وبهذا فالمسار المطلوب هو الذي يحقق الشرطين: $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0.$
- سوف لن نعيد نفس الخطوات التي أوصلتنا للمعادلة (14) في المحاضرة الماضية وأنما نكتفي حاليا بنتيجة مشابهة:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{du}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \tag{32}$$

- في الباب السابع سوف تواجهنا مسائل ذات عدة متغيرات وبالتالي عدد من معادلات أولار-لاجرانج أي مثل معادلة (32). سوف يتبين لنا أن من أهم سمات معادلات لاجرانج سهولة استخدامها مع أية أحداثيات (كارتيزية وغير كارتيزية)

الأحداثيات المعممة

- استخدمنا حتى الآن أحداثيات كارتيزية، وقطبية ويبقى غيرها كذلك ولاحظنا أمكانية الحل باستخدام أي من تلك الأحداثيات. وبينا كذلك أن معادلات لاجرانج تجعل التعامل مع أية مجموعة من الأحداثيات أمرا سهلا.
- أذن بدلا من أن نكتب الأحداثيات (x, y, z), (ρ, ϕ, z) or (r, θ, ϕ) سوف نبدأ بكتابة الأحداثيات برموز عامة لا تشير إلى نوع أو آخر من الأحداثيات: أي بالصورة: $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$.
- تسمى هذه الأحداثيات: الأحداثيات المعممة generalized coordinates



- مثلا في الشكل المجاور نختار الأحداثيات المعممة التي تخدم المسألة ونجد أنها هنا: θ_1, θ_2 . يسمى النظام المجارو البندول المزدوج وحله صعب ألا بالطريقة المذكورة.
- الأحداثيات المعممة لا ترتبط بفضاء معين فمن الممكن أن تكون بعدد n من الأبعاد.

The Lagrangian اللاجرانجيان

- مع بداية الباب القادم (السابع) سوف نبدأ باستخدام مجموعة من المعادلات يطلق عليها معادلات لاجرانج.
- تقوم هذه المعادلات على اللاجرانجيان وهو يقوم على فكرة الأحداثيات المعممة كما يلي:

$$f[q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t] \qquad (33)$$

- لاحظ هنا كيف تم تعميم الدالة المطلوب دراستها بحيث تعتمد حاليا على مجموعة من الأحداثيات المعمة + مشتقاتها + الزمن (الاشتقاق حاليا هو بالنسبة للزمن وليس x).
- وبهذا يمكن كتابة اللاجرانجيان كما يلي:

$$\mathsf{L} = \mathsf{L}[q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t]. \qquad (34)$$

- أي أن الدالة التي في داخل التكامل صارت هي ببساطة اللاجرانجيان نفسه. فيكتب التكامل كما يلي:

$$S = \int \mathsf{L}[q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t]\, dt \qquad (35)$$

The Lagrangian اللاجرانجيان

- المطلوب من اللاجرانجيان L في داخل التكامل أن تحقق المعادلات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1};\ \frac{\partial L}{\partial q_2}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2};\cdots;\ \frac{\partial L}{\partial q_n}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \qquad (36)$$

- أذن هناك عدد n من المعادلات مقابل معادلتين هما أولار-لانجرانج السابقتين.
- إذا تحققت هذه المعادلات فأن التكامل في معادلة (35) يحقق المطلوب (أي يحدد القيمة الدنيا أو العظمى). والعكس صحيح فأذا كان التكامل المذكور يحقق المطلوب فأن هذه المعادلات صحيحة.
- قام لاجرانج بتطوير معادلات في نهاية القرن الثامن عشر
- تتميز هذه المعادلات بميزتين أساسيتين:

1. تأخذ معادلات لاجرانج نفس الشكل بغض النظر عن نظام الأحداثيات المستخدم وبالتالي فطريقة الحل هي نفسها في كل مرة وكل مسألة.
2. الميزة الثانية أنها لا تعتمد على القيود الخارجية على النظام مما جعل حلها أسهل حتى لو كان النظام يخضع لقوى من تلك القيود.

ميزة معادلات لاجرانج مقابل معادلات نيوتن

- قام لاجرانج بتطوير معادلات في نهاية القرن الثامن عشر
- تتميز هذه المعادلات بميزتين أساسيتين:
- تأخذ معادلات لاجرانج نفس الشكل بغض النظر عن نظام الأحداثيات المستخدم وبالتالي فطريقة الحل هي نفسها في كل مرة وكل مسألة.
- الميزة الثانية أنها لا تعتمد على القيود الخارجية على النظام مما جعل حلها أسهل حتى لو كان النظام يخضع لقوى من تلك القيود.

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة