جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 05

معادلات لاجرانج 1

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

7.1- معادلات لاجرانج للحركة غير المقيدة

- القطار يتحرك على سكة الحديد وبالتالي فحركته مقيدة، الخرزة التي تتحرك على سلك حركتها مقيدة حيث لا يمكنها مغادرة السلك. وأما الحركات غير المرتبطة بقوة ما تجربها على نوع من أنواع الحركة فهي الحركة غير المقيدة.

- نتذكر أولا الدالة f التي لعبت دورا أساسيا في معادلة أولار-لاجرانج في الباب السابق وتؤدي إلى:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (1)$$

- سوف نستفيد من هذه الدالة والمعادلة ونفترض وجود دالة هي: $\mathcal{L} = T - U$ والتي سوف نسميها اللاجرانجيان بحيث لو تم استخدامها في المعادلة (1) أعلاه فأنها تعطينا معادلة الحركة للجسم equation of motion ونعرف الكميات كما يلي: T هي الطاقة الحركية للجسم وتكتب بالصورة التالية:

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (2)$$

- والحد الثاني U يعبر عن طاقة الوضع للجسم ويكتب بالصورة:

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z) \qquad (3)$$

7.1- معادلات لاجرانج للحركة غير المقيدة

- لاحظ أن $\mathcal{L}$ لا تعبر عن الطاقة الكلية أي $T + U$ وأنما الفرق بين طاقة الحركة وطاقة الوضع.
- إذن يعتمد حد الطاقة الحركية على السرعات $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ويعمتمد حد طاقة الوضع على الأحداثيات x, y, z وبالتالي فاللاجرانجيان نفسه $\mathcal{L}$ يعتمد على الأثنين معا

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t] \qquad (4)$$

- نطبق التفاضلات في المعادلة (1) على الدالة (4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x. \qquad (5)$$

- لو قمنا بالتافضل مرة ثانية للجزء الثاني:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} = \dot{p}_x = F_x \qquad (6)$$

- بمقارنة الجزء الأول في (5) و (6) نجد أن:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}.$$

أي أن معادلة لاجرانج صحيحة

7.1- معادلات لاجرانج للحركة غير المقيدة

- في ثلاثة أبعاد إذن نكتب المعادلات كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}. \qquad (7)$$

- لو قمنا بمقارنة معادلات لاجرانج بمعادلات: أولار-لاجرانج في الباب السادس لوجدناها متطابقة.
- بما أن معادلات أولار-لاجرانج السابقة كانت عبارة عن حل للتكامل: $S=\int_{x_1}^{x_2} f dx$
- هنا الصورة مشابهة: $S=\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$
- يسمى هذا التكامل: تكامل الأداء action integral، وعندما يكون بقيمته الأدنى فيسمى مبدأ الأداء الأدنى principle of least action
- وفي الحقيقة فأن المسار الفعلي للجسم الذي يتبعه بين النقطتين 1 و 2 خلال فترة زمنية بين t_1 و t_2 يسمى: مبدأ هاملتون Hamilton’s Principle

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt \qquad (8)$$

الأحداثيات المعممة

- حتى هذه اللحظة تبين لنا أن العبارات التالية تعطي نفس النتيجة:
  1. **يمكن تحديد مسار الجسم باستخدام قانون نيوتن الثاني $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$**
  2. **يمكن تحديد المسار باستخدام معادلات لاجرانج**
  3. **يمكن تحديد المسار باستخدام مبدأ هاملتون**
- معادلات (7) كانت باستخدام الأحداثيات الكارتيزية، ولكن كما سبق فأن الأحداثيات الكارتيزية ما هي إلا أحد الخيارات ولذا فنود التعبير عن نفس المعادلات ولكن باستخدام الأحداثيات المعممة التي سبق الحديث عنها. فنعبر أولا عن اللاجرانجيان باستخدام تلك الأحداثيات، ثم نكتب معادلات لاجرانج:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]. \qquad (9)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}, \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3}. \qquad (10)$$

- وهي صالحة لجميع أنظمة الأحداثيات بشرط واحد فقط: أن يتم قياسها في أطار أسناد قصوري (مستقل زمنيا)

مثال 7.1

- For a single particle in two dimensions, in Cartesian coordinates, under some arbitrary potential energy U(x, y), the Lagrangian is

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y). \qquad (11)$$

- In this case, there are two Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}. \qquad (12)$$

- The left side of each equation is just

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y. \qquad (13)$$

- The right side of each equation, in turn, is just

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} m\dot{y} = m\ddot{y}. \qquad (14)$$

- Equating these, we have Newton's second law

$$F_x = m\ddot{x}, \qquad F_y = m\ddot{y} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \qquad (15)$$

القوى والاندفاعات المعممة

- نلاحظ أن الجزء الأيسر من معادلات لاجرانج في الأحداثيات الكارتيزية يعطي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y. \qquad (16)$$

- وهذه النتيجة هي للقوة. إذن بشكل عام، عندما نستخدم الأحداثيات المعمة ونقو بحساب هذا الجزء من معادلات لاجرانج فأننا نحصل على نتيجة ما تشبه القوة أو تقوم بعمل مشابه: نسميها بالقوة المعمة generalized force :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = (i\text{th component of generalized force}). \qquad (17)$$

- بنفس الطريقة الجزء الأيمن من المعادلات يعطي الاندفاعات المعممة generalize momentum

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = (i\text{th component of generalized momentum}). \qquad (18)$$

- بشكل مبسط ينظر إلى معادلة لاجرانج: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$ على أنها:

القوة المعممة = معدل تغير الاندفاع المعمم

generalized force = rate of change of generalized momentum

مثال 7.2

- Same as example 7.1, but in polar coordinates. In this case, the potential energy is $U(r, \phi)$, the kinetic energy: $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$.
- so the Lagrangian is just

$$\boxed{\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r,\varphi).}$$

- In this case, there are two Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$\rightarrow mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = m\ddot{r}, \qquad -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}$$

- الحد الأول هو حد القوة: $-\frac{\partial U}{\partial r} = F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right),$
- لفهم الحد الثاني نتذكر العلاقة الرياضية:
- أذن:

$$-\frac{\partial U}{\partial \phi} = rF_\phi = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right).$$

حيث استفدنا من العلاقة الرياضية:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

مثال 7.2

- ماذا تعني تلك العلاقة؟

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\rightarrow \nabla U = 0 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\because F_\varphi = -\nabla U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

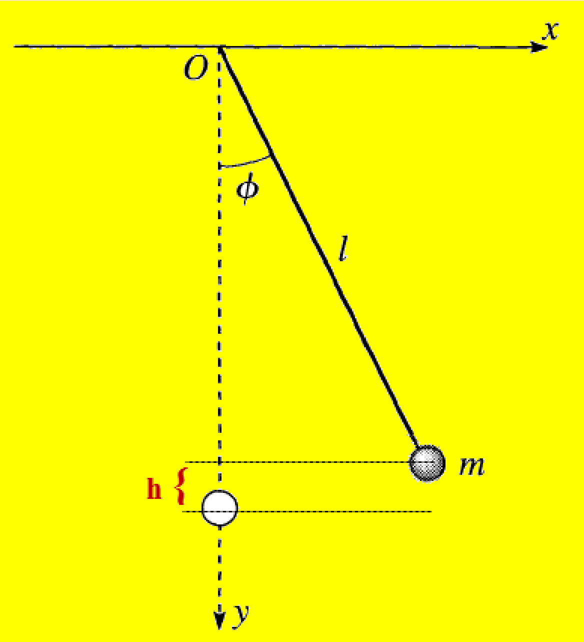
$$\therefore rF_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right)$$

- ماهي الحدود التي حصلنا عليها؟

الاندفاع الزاوي	$mr^2\dot{\varphi}$
التسارع المركزي	$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$
عزم اللي	rF_φ

7.2- مثال على نظام مقيد

- ذكرنا سابقا بأن ما يميز معادلات لاجرانج أنها متحررة من قيود (القيود).
- سوف نتحدث عن الموضوع بالتفصيل لاحقا ولكن نفص الموضوع في مثال يخضع للقيد. كتلة صغيرة معلقة بحبل يتدلى من سقف (الكتلة مرتبطة بقيد الحبل).
- كما هو واضح من الشكل، تتحرك الكتلة في بعدين تحت القيد التالي: $\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- لحل المسألة يمكن التخلص من y والتعبير عنها بدلالة x أي $y = \sqrt{\ell^2 - x^2}$.
- ولكن أسهل من ذلك يمكن استخدام الأحداثي ϕ
- كالمعتاد نكتب أولا: $\mathcal{L} = T - U$ بدلالة ϕ
- نبحث بعد ذلك عن حد الجهد، وهو واضح من الرسم باعتبار أن أسفل الصورة يمثل فرق الجهد الصفري وبالتالي:



$$U = mgh = mgl(1 - \cos\phi).$$

نفس الشئ مع حد الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2.$

- نقوم أخيرا بتطبيق معادلة لاجرانج: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}},$

ونحصل على النتيجة:

$$\boxed{-mg\ell\sin\varphi = m\ell^2\ddot{\varphi}. \qquad (\equiv I\alpha)}$$

7.2- مثال على نظام مقيد

- توضيح أكثر للمثال:
- أولا: لماذا اخترنا حد الطاقة الحركية بالصورة $T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2.$
- ج: لأن السرعة $v=r\omega=r\dot{\varphi}$
- ثانيا: التفاضل في الحد الأيسر بالنسبة للأحداثي ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}=\frac{\partial}{\partial \varphi}U=\frac{\partial}{\partial \varphi}(mgh)=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[mgl(1-cos\phi)\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[mgl-mglcos\phi\right]=0+mgl\sin\phi$$

- لاحظ وجود أشارة (-) قبل U في الدالة $\mathcal{L}=T-U$
- ثالثا: التفاضل في الحد الأيمن:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(\tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2)$$
$$=\frac{d}{dt}\left[m\ell^2\dot{\varphi}\right]=m\ell^2\ddot{\varphi}$$

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة