جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 06

معادلات لاجرانج 2

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

7.3- الأنظمة المقيدة بشكل عام

- لو كان لدينا نظام مكون من N من الأجسام وسميناها N ,... ,1 = α وكانت مواقع هذه الأجسام هي $\mathbf{r}_\alpha$. كما سبق نسمى الأحداثيات $q_1, \ldots, q_n$ بالأحداثيات المعممة.
- يمكن التعبير عن المواقع بدلالة الأحداثيات كما يلي:

$$\mathbf{r}_\alpha = (q_1, \cdots, q_n, t) \qquad [\alpha = 1, \cdots, N], \qquad (34)$$

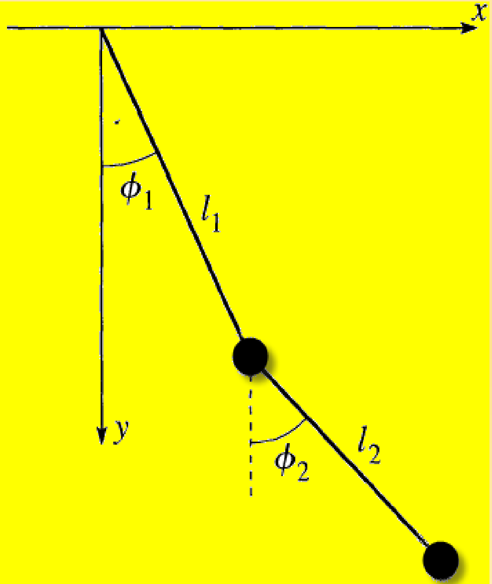
- بالمقابل يمكن التعبير العكسي التالي:

$$q_i = q_i(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N, t) \qquad [i = 1, \cdots, n]. \qquad (35)$$

- مثلا في نظام كارتيزي ثلاثي الأبعاد فعدد الأحداثيات المعممة لا يتجاوز 3N .
- مثال: البندول السابق (7.2) بالرغم من وجود أحداثيين هما (x, y) فأن هناك أحداثيا معمما واحدا هو ϕ حيث:

$$\mathbf{r} = (x, y) = (l \sin \phi, l \cos \phi).$$

- ومثال آخر في الشكل المجاور (بندول مزدوج):



$$\mathbf{r}_1 = (l_1 \sin \phi_1, l_1 \cos \phi_1) = \mathbf{r}_1(\phi_1) \qquad (36)$$

$$\mathbf{r}_2 = (l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2, l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2) = \mathbf{r}_2(\phi_1, \phi_2) \qquad (37)$$

7.3- الأنظمة المقيدة بشكل عام (درجات الحرية)

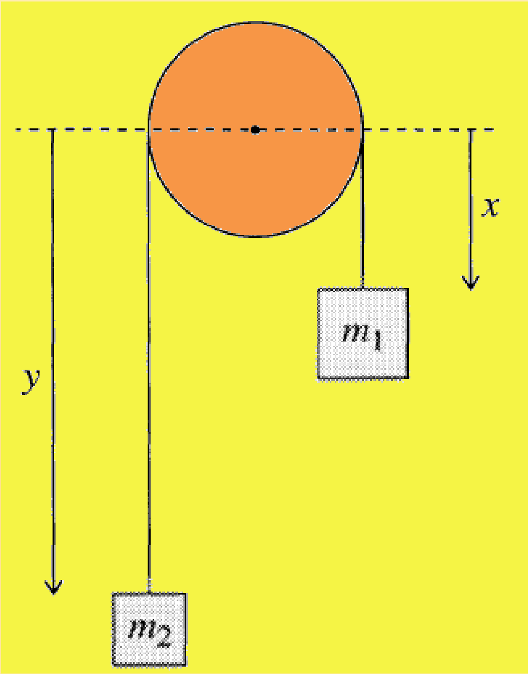
- عندما نتحدث عن نظام ما، فمن المناسب الحديث عن درجات الحرية المتاحة للنظام أي الاتجاهات التي يمكنه أن يتحرك بها بشكل حر ومستقل
- البندول البسيط لديه درجة حرية واحدة وهي الزاوية بين الحبل والرأسي، بينما البندول المزدوج لديه درجتان للحرية (زاوية الحبل الأول وزاوية الحبل الثاني)
- يمكننا أن نفهم القيود المفروضة على نظام ما كما يلي: إذا كان لدينا N من الأجسام وكانت درجات الحرية المتاحة هي أقل من $3N$ فأن النظام مقيد (في ثلاثة أبعاد)، أما في بعدين يصبح النظام مقيدا أذا كان عدد درجات الحرية أقل من $2N$
- الجسم الصلب الحر لديه 6 درجات حرية.
- الخرزة التي تتحرك على سلك لديها درجة حرية واحدة فقط.
- جسم يتحرك فقط على سطح مستوي: لديه درجتين للحرية
- بما أن عدد الأحداثيات المعممة = عدد درجات الحرية
- أذن هناك عدد من معادلات لاجرانج = عدد درجات الحرة (معادلة لكل درجة)
- أي نظام يحقق ما ذكر أعلاه يسمى « نظام هولونومي» *holonomic* والقيود أيضا تسمى : القيود الهولونومية.
- جميع مسائل هذا المقرر من هذا النوع لأن حلها أسهل

7.3- الأنظمة المقيدة بشكل عام (الأنظمة غير الهولونومية)

- دعنا نتصور كرة موجودة على سطح مستوي (بعدين).
- لو وضعنا الكرة في نقطة الأصل ورسمنا علامة في أعلا الكرة
- ثم حركنا الكرة بدورة كاملة على محور x فأن العلامة سوف تظهر مرة ثانية
- لو دحرجنا الكرة على محور y بدورة كاملة سوف تظهر العلامة أيضا
- ولكن لو دحرجنا الكرة وأعدناها لنقطة الأصل ولكن هذه المرة على طور الوتر فأن العلامة لن تظهر؟
- ومعنى ذلك أن الأحداثيين x و y غير كافيين لوصف الحركة بشكل دقيق
- إذن سوف نحتاج إلى عمليات دوران أضافية، وبالتحديد نحتاج إلى توفير ثلاث حركات دورانية لأتمام وصف الحركة
- إذن صار لدينا 5 أحداثيات بدل 2 هي الأصل
- مثل هذا النظام يسمى (غير هولونومي) *nonholonomic*

مثال 7.4 آلة أتوودز

- Consider the Atwood machine first met in Figure 4.15 and shown again in Figure , in which the two masses m_1 and m_2 are suspended by an inextensible string (length *l*) which passes over a massless pulley with frictionless bearings and radius *R*. Write down the Lagrangian , $\mathcal{L}$, using the distance *x* as generalized coordinate, find the Lagrange equation of motion, and solve it for the acceleration $\ddot{x}$ Compare your results with the Newtonian solution.



مثال 7.4 آلة أتوودز

نلاحظ أن طول الحبل لا يحسب النظر إليه كما يلي.

$$x + y + \pi R = l \quad \text{------} \; (1)$$

$$\rightarrow y = l - \pi R - x$$
$$= -x + (l - \pi R)$$
$$= -x + \text{const.} \quad \text{----} \; (2)$$

نصف المحيط $= \pi R$

$\therefore$ use x as generalized coordinate

note $(2) \rightarrow \dot{y} = \dot{x}$

$\therefore L = T - U$

for $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \quad \text{---} \; (3)$$

for U: taking $U = 0$ at center of polly

$$\rightarrow U = -m_1 g x - m_2 g y = -(m_1 - m_2) g x + C$$

مثال 7.4 آلة أتوودز

$\Rightarrow L = T - U$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + (m_1-m_2)gx \quad \text{---} (4)$$

$\therefore$ Lagrange equation of motion is:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \text{---} (5)$$

L.H.S: $\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1-m_2)g \quad \text{---} (6)$

R.H.S: $\because \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\ddot{x} \quad (7)$

(6) and (7) $\rightarrow (m_1-m_2)g = (m_1+m_2)\ddot{x} \quad \text{---} (8)$

مثال 7.4 آلة أتوودز

$$\therefore \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{------} \; (9)$$

بالمقارنة مع طريقة نيوتن:

حيث يوجد لنتبع m_1 , m_2 ← وجود معادلتين

m_1: $\quad m_1 g - F_t = m_1 \ddot{x}$ --(a)

m_2: $\quad F_t - m_2 g = m_2 \ddot{x}$ --(b)

$F_t \equiv T$ شد في الحبل ،

تمثل F_t القيد في المسألة

بينما هنا في الحل بطريقة لاجرانج لم يلزمنا ان

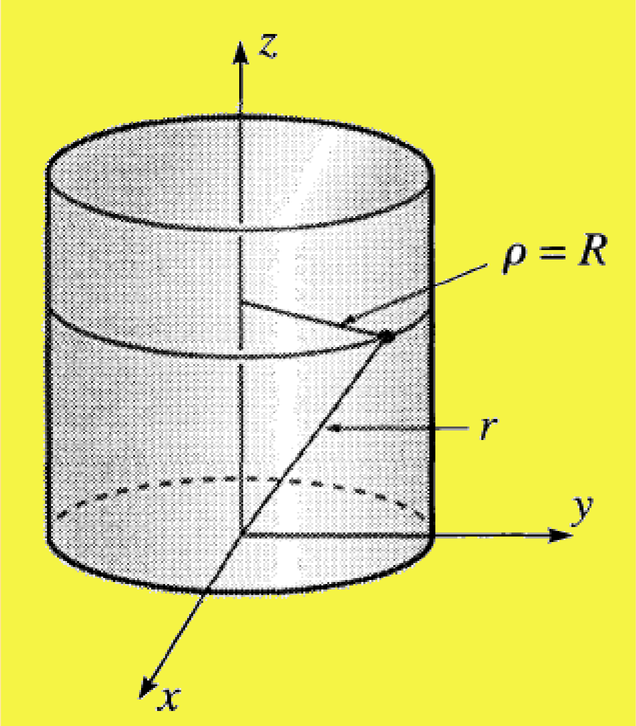
نجد هذا القيد. كما أنه تم ايجاد معادلة واحدة

فقط بدلاً من معادلتين.

لـ هنا في جمع المعادلتين (a) + (b) ← (9)

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

- Consider a particle of mass m constrained to move on a frictionless cylinder of radius R, given by the equation $\rho = R$ in cylindrical polar coordinates (ρ, ϕ, z). Besides the force of constraint (the normal force on the cylinder), the only force on the mass is a force $F = -k\mathbf{r}$ directed toward the origin. Using z and ϕ as generalized coordinates, find the Lagrangian $\mathcal{L}$. Write down and solve Lagrange's equations and describe the motion.
-



مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

∵ الجسم يتحرك على السطح ← $\rho = R$

∴ نستطيع إهمال هذا الإحداثي

∴ only 2 coordi. (z, ϕ)

We have:

$$v_\rho = 0 \qquad v_z = \dot{z} \qquad v_\phi = R\dot{\phi}$$

∴ for T: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$ - - - - (1)

for U: ∵ $\bar{F} = -k\bar{r}$

→ $U = \frac{1}{2}kr^2$ (by integration $\int$).

∵ $r^2 = R^2 + z^2$ (من نظرية فيثاغورس)

∴ $U = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$ - - - - - - - (2)

مثال 7.5 جسم يتحرك على سطح اسطواني

$$\therefore\ L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \quad --- (3)$$

we have 2 eq. 1 for z + 1 for ϕ

$$z:\quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) \rightarrow -kz = m\ddot{z} \quad ------ (4)$$

$$\phi:\quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) \rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\phi}) \quad ---- (5)$$

بالنسبة للمعادلة (4) ← متذبذب توافقي في اتجاه z

" " (5) ← الاندفاع الزاوي Ang-momentum

محفوظ (ثابت زمنياً) حول المحور z.

∵ m و R ثوابت ← السرعة الزاوية $\dot{\phi}$ ثابتة $\dot{\phi} = const$

∴ الجسم يدور بسرعة زاوية ثابتة ويتذبذب ↑ لـ توافقياً.

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

- A bead of mass *m* is threaded on a frictionless circular wire hoop of radius *R.* The hoop lies in a vertical plane, which is forced to rotate about the hoop's vertical diameter with constant angular velocity $\dot{\phi} = \omega$, as shown in Figure . The bead's position on the hoop is specified by the angle *e* measured up from the vertical. Write down the Lagrangian for the system in terms of the generalized coordinate θ and find the equation of motion for the bead

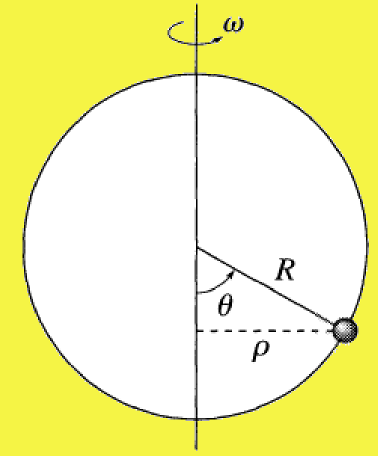


Figure 7.9 A bead is free to move around the frictionless wire hoop, which is spinning at a fixed rate ω about its vertical axis. The bead's position is specified by the angle θ; its distance from the axis of rotation is $\rho = R \sin\theta$.

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

$\because L = T - U$

T: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta)$ - - - (1)

U: let $U = 0$ at the bottom

$\rightarrow U = mgR(1 - \cos\theta)$ - - - - (2)

$\therefore L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgR(1 - \cos\theta)$ - - - (3)

$\therefore$ only 1 degree of freedom, only one coordinate θ

Now: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) \rightarrow$ L.H.S: $mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$

R.H.S: $mR^2 \ddot{\theta}$

$\rightarrow mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta = mR^2\ddot{\theta}$ - - - - - - (4)

مثال 7.6 خرزة حرة على أطار يدور بسرعة زاوية ثابتة

solving for $\ddot{\theta}$: تسارع زاوي

(4) $\rightarrow$ $\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta$ ----- (5)

Two possibilities: (1) $\omega = 0$

$\rightarrow$ $\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta$ بندول بسيط

(2): $\ddot{\theta} = 0$ (equilibrium اتزان)

$\rightarrow$ $\left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\cancel{\sin\theta} = 0$

$\rightarrow$ $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$

θ_0 زاوية الاتزان

شكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة