جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 07

مبدأ ومعادلات هاملتون

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

13.1 مقدمة في الهاملتونيان

- سبق الحديث عن الأحداثيات المعممة في لاجرانج:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) = T - U \qquad (1)$$

- ثم عبرنا عن معادلات لاجرانج كما يلي:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad [i = 1, ..., \mathrm{n}] \qquad (2)$$

- أيضا استحثنا ما يسمى بالاندفاع المعم وعرفناه كما يلي:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \qquad (3)$$

- نشير هنا إلى أن الاندفاع في (3) يسمى أيضا: الاندفاع القانوني canonical momentum وأحيانا يسمى بالاندفاع المرافق للأحداثي q_i .

- تعرف دالة هاملتونيان، وتختصر بكلمة: هاملتونيان كما يلي:

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \qquad (4)$$

- في بعد واحد فقط يمكن تتابة الهاملتونيان كما يلي:

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = T + U \qquad (5)$$

13.2 معادلات هاملتون

- لأثبات المعادلة (5)

$$\because \mathscr{H} = p\dot{q} - \mathscr{L} = 2T - (T - U) = T + U \qquad (6)$$

- لاشتقاق معادلات هاملتون:

$$\because \mathscr{H} = p\dot{q} - \mathscr{L} = p\dot{q}(q, \mathrm{p}) - \mathscr{L}(q, \dot{q}(q, p))$$

$$\therefore \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right] = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}$$

$$\because \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \dot{q}} = p \Rightarrow \text{1st and last term cancel}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}p = -\dot{p}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} = -\dot{p} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \dot{q} \qquad (8)$$

13.2 معادلات هاملتون

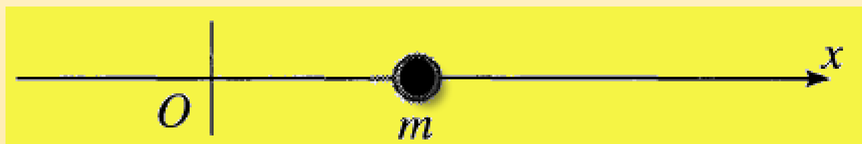
- إذن معادلات هاملتون:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad and \qquad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \qquad (8)$$

- في معادلات لاجرانج كان هناك معادلة واحدة للحركة هي عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية في الأحداثي q (المقصود هو التسارع).
- في معادلات هاملتون هناك معادلتان كل منهما من الدرجة الأولى واحدة للأحداثي q والثانية للاندفاع p .

مثال 13.1 خرزة على سلك مستقيم

- Consider a bead sliding on a frictionless rigid straight wire lying along the *x* axis, as shown in Figure. The bead has mass *m* and is subject to a conservative force, with corresponding potential energy *U(x)*. Write down the Lagrangian and Lagrange's equation of motion. Find the Hamiltonian and Hamilton's equations, and compare the two approaches.



Let x is our generalized coordinate

$$\therefore L(x,\dot{x}) = T - U$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \quad \text{------} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x} \quad \text{------} \quad (2)$$

$\because$ (القوة) $F = -\frac{dU}{dx}$

$\therefore$ (2) $\rightarrow$ $\boxed{F = ma}$

eq. of Motion [معادلة الحركة] وهذا نفس قانون نيوتن الثاني

مثال 13.1 خرزة على سلك مستقيم

للحل بطريقة هاملتون يلزمنا أولاً البحث عن

الاندفاع المعمم generalized momentum

$$\therefore\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{m\dot{x}} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\therefore\ H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{p^2}{2m} - U(x)\right]$$

$$= \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \text{-------} \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (4) \quad \text{and} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dU}{dx} \quad (5)$$

$$(4) \rightarrow p = m\dot{x} \checkmark \qquad (5) \rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = F$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

مثال 13.2 آلة أتوودز

- Set up the *Hamiltonian formalism* for the Atwood machine, as shown in the Figure.

Step # 1: what is H ?

سبق في الباب 7 دراسة مثال :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \quad --- (1)$$

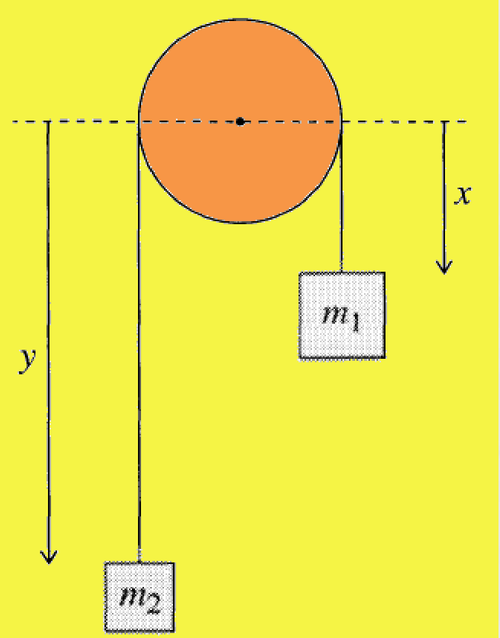
$$U = -(m_1 - m_2) g x \quad --- (2)$$

$$\rightarrow H = T + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - (m_1 - m_2) g x \quad (3)$$

step # 2: use p for x :

$$\therefore H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2) g x \quad - (4)$$

Step # 3: find $\frac{\partial H}{\partial p}$ and $-\frac{\partial H}{\partial x}$



$$\therefore \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2} \quad \text{-----} \quad (5)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)\, g \quad \text{---} \quad (6)$$

step # 4 : use p in (5) for $\dot{p}$ in (6) :

$$(5) \rightarrow \quad \dot{p} = (m_1 + m_2)\, \ddot{x} \quad \text{-----} \quad (7)$$

$$\therefore \quad (6) \rightarrow \quad (m_1 + m_2)\, \ddot{x} = (m_1 - m_2)\, g$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \quad \text{-----} \quad (8)$$

Acceleration of m_1 and m_2

تسارع الجسمين وهو نفس معادلات لاجرانج

13.3- معادلات هاملتون في فضاء متعدد الأبعاد

- نعود لمادلة (4) السابقة:

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \qquad (4)$$

- ونكتبها بشكل مفصل أكثر:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(\mathbf{q},\mathbf{p},t) - \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)) \qquad (9)$$

- باتباع خطوات مشابهة في بعد واحد نحصل على معادلات هاملتون التالية:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \textit{and} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ldots,\mathrm{n}) \qquad (10)$$

- إذن لو كان لدينا نظام لديه عدد n من درجات الحرية فيكون بالمقابل 2n من المعادلات كلها من الدرجة الأولى تمثل معادلات هاملتون. في لاجرانج كان لدينا n من المعادلات ولكن من الدرجة الثانية.

مثال 13.3 معادلات هاملتلون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Set up Hamilton's equations for a particle of mass m subject to a conservative central force field with potential energy $U(r)$, using as generalized coordinates the usual polar coordinates r and ϕ.

- بالرغم من أن الجسم بالأساس مسموح له أن يتحرك في ثلاثة أبعاد تحت تأثير القوة المركزية U(r) إلا أنه لا يوجد سبب يجعله يتحرك في فضاء ثلاثي حيث أن القوة المركزية المذكورة غاية ما تسبب للجسم أن يدور في مستوى.

- ولذلك فأننا نختار r , ϕ كأحداثيات معممة.

- Step #1: Choose generalized coordinates: r , ϕ

- Step #2: Write down the T:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \qquad (1)$$

- Step #3: Find the generalized momenta:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \text{and} \qquad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \qquad (2)$$

- الاندفاع الأول p_r ويسمى مرافق r هو عبارة عن الاندفاع الخطي العادي mv باتجاه r. أما الاندفاع الثاني p_ϕ ويسمى مرافق ϕ فهو عبارة عن الاندفاع الزاوي *angular momentum*.

مثال 13.3 معادلات هاملتون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Step #4: Solve for $\dot{r}$ *and* $\dot{\phi}$:

$$(2) \rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{and} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \qquad (3)$$

- Step #5: Write down H as function of r, ϕ, p_r, p_ϕ

$$\mathcal{H} = T + U = \left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right] + U(r) \qquad (4)$$

- Step #6: write down the 4 Hamilton equations:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad (5)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \qquad (7)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \qquad (8)$$

مثال 13.3 معادلات هاملتلون لجسم تحت تأثير قوة مركزية

- Step #7: Explain the results:

- نتيجة معادلة (5) هي الاندفاع الخطي العادي وهو نفس ما ذكر سابقا.
- نتيجة المعادلة (6): نقوم باستخدام pr من معادلة (5) بعد تفاضله وتعويضه في (6):

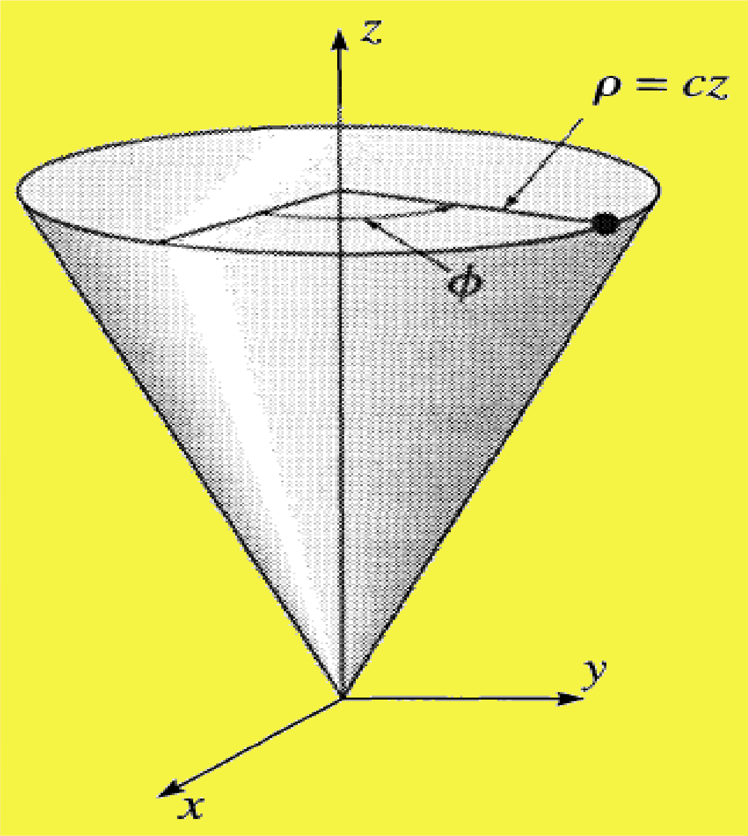
$$\rightarrow m\ddot{r} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (9)$$

وهو يتكون من حدين: الأول يمثل القوة الطاردة المركزية والثاني يمثل القوة المركزية الأصلية.

- نتيجة معادلة (7) هي عبارة عن الاندفاع الزاوي بشكل مباشر بعد ترتيب الحدود
- نيتجة معادلة (8) بكل بساطة تكرر نفس فرضيتنا ومعلومتنا الأصلية وهي أن الاندفاع الزاوي محفوظ (تفاضله = 0 بالنسبة للزمن).

مثال 13.4 معادلات هاملتلون لجسم يتحرك على سطح قمع

- Consider a mass m which is constrained to move on the frictionless surface of a vertical cone $\rho = cz$ in a uniform gravitational field g vertically down. Set up Hamilton's equations using z and ϕ as generalized coordinates.



مثال 13.4 معادلات هاملتلون لجسم يتحرك على سطح قمع

الخطوة # 1 : اختيار الإحداثيات المعممة : z, ϕ

الخطوة # 2 : كتابة T :

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right] \quad \text{------} (1)$$

الحركة الأفقية

الحركة الرأسية

الحركة الدورانية

$\because \rho = cz$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}m\left[c^2\dot{z}^2 + \dot{z}^2 + c^2z^2\dot{\phi}^2\right]$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}m\left[(c^2+1)\dot{z}^2 + (cz\dot{\phi})^2\right] \quad \text{------} (2)$$

مثال 13.4 معادلات هاملتلون لجسم يتحرك على سطح قمع

الخطوة # 3: البحث عن الاندفاعات المعممة:

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot\phi} = mc^2 z^2 \dot\phi \quad \text{--- (3)}$$

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot z} = m(c^2+1)\dot z$$

الخطوة رقم # 4: نقوم بالحل لإيجاد $\dot z$ و $\dot\phi$ بدلالة الاندفاع

$$\rightarrow \dot z = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \quad \text{and} \quad \dot\phi = \frac{p_\phi}{mc^2 z^2} \quad \text{---- (4)}$$

الخطوة # 5: نكتب الهاملتونيان:

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U = \frac{1}{2m}\left[\frac{p_z^2}{(c^2+1)} + \frac{p_\phi^2}{c^2 z^2}\right] \ldots gz \quad \text{-- (5)}$$

U

مثال 13.4 معادلات هاملتون لجسم يتحرك على سطح قمع

Saving screenshot...

الخطوة رقم 6: نشتق 4 معادلات هاملتون (معادلتين لكل إحداثي)

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \quad \text{---- (6)}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{p_\phi^2}{m c^2 z^3} - mg \quad \text{---- (7)}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m c^2 z^2} \quad \text{---- (8)}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad \text{---- (9)}$$

$\rightarrow$ p_ϕ is conserved

الاندفاع الزاوي محفوظاً.

14/15

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة