جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 08

مسألة القوة المركزية

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

8.1 – مقدمة في القوة المركزية

- تعرضنا للقوة المركزية أكثر من مرة في الأبواب السابقة.
- سوف نتعرض للقوة المركزية بشئ من التفصيل ومنها مسألة الجسمين 2-Body Problem .
- سوف نناقش القوة المركزية التي تعود لقوة الجاذبية الكونية.
- نفترض وجود جسمين m_1 and m_2 موجودين عند الموقعين $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$
- نعبر عن طاقة الوضع بين الجسمين باستخدام العلاقة الكونية التالية:

$$U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}. \qquad (1)$$

- لاحظ أن هذه الدالة لا تعتمد على متجهي الموقعين وأنما فقط على مقدار الفرق بينهما أي على $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$
- يفضل استحداث متجه $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ عبارة عن نسبة الجسم الثاني للأول ونقوم باستخدام هذا المتجه. وتصبح الدالة

$$U = U(r). \qquad (2)$$

8.1 – مقدمة في القوة المركزية

- إذن باستخدام اللاجرانجيان يكون لدينا اللاجرانجيان التالي:

$$\mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r). \qquad (3)$$

- حيث يمثل الحد الأول الطاقة الحركة للجسم الأول في حين يمثل الحد الثاني الطاقة الحركية للجسم الثاني وأما الحد الثالث هو كما سبق يمثل طاقة الجهد أو الوضع بين الجسمين وهي طاقة جذب كوني تخضع لأنظمة القوى المركزية.

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- سبق في عدة مقررات تعريف مركز الكتلة (أو مركز الثقل) وهو يمثل النقطة التي تتوزع الكتلة حولها بالتساوي وتعرف رياضيا كما يلي:

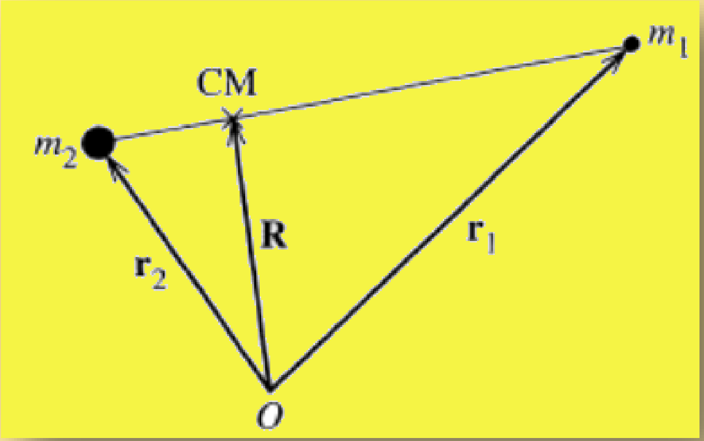
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i . \qquad (4)$$

- عندما يكون لدينا فقط كتلتان فأن المعادلة (4) تصبح بالصورة التالية:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} . \qquad (5)$$

- ربما من المناسب التذكير بأن الاندفاع الكلي لنظام مكون من عدة أجسام هو عبارة عن الكتلة الكلية للأجسام مضروبة في سرعة مركز الكتلة أي:

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} \qquad (6)$$



8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- الأن يمكننا استخدام العلاقتين التاليتين لموقعي الجسمين:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \qquad (7)$$

- أثبات صحة العلاقتين في معادلة (7):

$$\because \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{M}$$

$$\rightarrow M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r} = (m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}$$

$$\therefore \mathbf{r}_1 = \frac{M\mathbf{R} + m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2} = \frac{M\mathbf{R} + m_2\mathbf{r}}{M} = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}$$

$$\text{for } \mathbf{r}_2 : \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) + m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

$$\rightarrow M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r} + m_1\mathbf{r}_2 + m_2\mathbf{r}_2$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_2 = \frac{M\mathbf{R} - m_1\mathbf{r}}{M} = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}$$

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- الأن نعود لمعادلة (3) ونستخدم معادلتي (7) في حد الطاقة الحركية:

$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\left[\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right]^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left[\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right]^2 \\
&= \tfrac{1}{2}m_1\left[\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + 2\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}\right] + \tfrac{1}{2}m_2\left[\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 - 2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}}\right] \\
&= \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + m_1\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}} + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 - m_2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}}.\dot{\mathbf{r}} \\
&= \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)(m_1m_2)}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 \\
&= \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(m_1m_2)}{M}\dot{\mathbf{r}}^2 \\
\therefore T &= \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- في معادلة (8) استخدمنا الكتلة المختزلة وهي:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (9)$$

or :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (10)$$

- ملاحظات على الكتلة المختزلة:

✓ تصبح تقريبا تساوي m_1 عندما $m_2 \rightarrow \infty$

✓ تصبح تقريبا تساوي m_2 عندما $m_1 \rightarrow \infty$

✓ تصبح تساوي $\frac{1}{2}m$ عندما $m_1 = m_2 = m$

✓ هذه الكتلة المختزلة لها وحدات dimensions نفس وحدات الكتلة kg

✓ الكلتة المختزلة لنظام الأرض والشمس = تقريبا كتلة الأرض !!

✓ بشكل عام الكتلة المختزلة لكتلتين واحدة كبيرة جدا والأخرى صغيرة تساوي تقريبا للكتلة الصغيرة.

8.2 – مركز الكتلة والكتلة المختزلة

- أذن حد الطاقة الحركية في اللاجرانجيان هو:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \\ \therefore \mathcal{L} = T - U &= \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right) \\ &= \mathcal{L}_{\text{CM}} + \mathcal{L}_{\text{rel}} \end{aligned} \tag{11}$$

- يمثل الحد الأول لاجرانجيان لمركز الكتلة والثاني اللاجرنجيان للأحداثي النسبي.
- بمعنى آخر فقد استخدمنا موقع مركز الكتلة **R** والموقع النسبي إي نسبة أحد الجسمين للأخر r كأحداثيات معممة Generalized Coordinates
- بحسب معادلة (11) يمكننا الحل على مرحلتين واحدة خاصة بحركة مركز الكتلة ومستقلة تماما عن أي اعتبارات أخرى والمعادلة الأخرى خاصة بالحركة النسبية بين الجسمين.

8.3– معادلات الحركة

- من المعادلة (11) يمكننا الحصول بالطريقة المعتادة على المعادلات من لاجرانجيان: (الجزء الأول):

$$\because \mathcal{L} = T - U = \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right)$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \rightarrow 0 = M\ddot{\mathbf{R}} \rightarrow (\dot{\mathbf{R}} = \text{constant}) \qquad (12)$$

- يمكن النظر إلى هذه النتيجة من زاويتين: الأولى أنه لا توجد قوى خارجية تؤثر على مركز الكتلة، وهو أمر مفروغ منه حيث أن الجسمين يمثلان نظاما معزولا من الأساس. والثانية أن الاندفاع الكلي المرتبط بمركز الكتلة محفوظ.

- المعادلة الثانية (الجزء الثاني):

$$\because L = T - U = \tfrac{1}{2} M\dot{\mathbf{R}}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)\right)$$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \rightarrow -\nabla U(r) = \mu\ddot{\mathbf{r}} \qquad (13)$$

- يمكن فهم هذه المعادلة كما لو كان هناك جسم كتلته μ يتعرض لجهد مركزي $U(r)$ وهذه معادلة حركته. لاحظ أن أزواج النجوم يدور كل منهما حول مركز كتلة النجمين. بمعنى آخر هي معادلة أي من الجسمين لأمكانية تثبيت أي منهما.

8.4– حفظ الاندفاع الزاوي

- نعيد النظر في اللاجرنجيان (الجزء الثاني) $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2-U(r),$ ولكن هذه المرة من زاوة الأحداثيات القطبية:
- تذكر من الباب الأول عندما قمنا بالتفاضل التالي:

$$\dot{\mathbf{r}}=\frac{d}{dt}r\hat{\mathbf{r}}=\dot{r}\hat{\mathbf{r}}+r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (14)$$

- أذن يمكن التعبير عن اللاجرنجيان كما يلي:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right)-U(r) \qquad (15)$$

- باستخدام معادلات لاجرانج على المتغير ϕ (أحداثي الدوران فقط) نجد ما يلي:

$$\therefore \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\rightarrow\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\phi})=0$$

$$\therefore \mu r^2\dot{\phi}=\text{constant} \qquad (13)$$

- والحد الناتج يعبر عن الاندفاع الزاوي وهو محفوظ. ولكن هذا بافترضا الكتلة المختزلة فقط.
- ماذا لو ناقشنا الجسمين في نفس الوقت؟

8.4– حفظ الاندفاع الزاوي

- الاندفاع الزاوي يعرف بالعلاقة: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
- أذن الاندفاع الكلي للجسمين هو:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \qquad (14)$$

$$\because \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} = \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad (\mathbf{R} = 0) \qquad (15)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r} \qquad (16)$$

(15) & (16) in (14):

$$\mathbf{L} = \frac{m_1 m_2}{M^2}(m_2 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + m_1 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$$

$$= \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} \qquad (17)$$

- ملاحظة مهمة على هذه المعادلة (17) حيث أن الاندفاع الزاوي الكلي $\boldsymbol{L}$ هو نفسه كما لو كان هناك جسم واحد فقط كتله μ يدول على بعد $\mathbf{r}$
- وملاحظة أخرى حيث أن الاندفاع محفوظ فأن الكمية $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ نفسها ثابتة بما في ذلك الاتجاه. وحيث أن نتيجة هذا الضرب الاتجاهي عمودية عليه، وهي تظل ثابتة فإذن نظام الجسمين يدور في مستوى ثابت، مثلا مدار القمر حول الأرض في مستوى.

8.4– معادلتين للحركة

- عرفنا قبل قليل أن اللاجرانجيان باستخدام الأحداثي ϕ هي:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r) \qquad (18)$$

- إذن معادلة لاجرانج هي:

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2\dot{\phi} = \text{const} = l \quad \text{(angular momentum)} \qquad (19)$$

- معادلة الأحداثي r هي:

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial r} = \mu r\dot{\phi}^2 - \frac{dU}{dr} = \mu\ddot{r} \qquad (20)$$

$$(19) \rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2} \qquad (21)$$

$$\therefore (20) \rightarrow \mu\ddot{r} = \mu r\left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (22)$$

- الحد على اليسار هو قوة، وبالتالي الحدين الآخرين أيضا قوة. الحد الأول على اليمين هو حد القوة الطاردة المركزية أما الحد الثاني فهو حد القوة المركزية (قوة جاذبة). معادلة (20) تسمى المعادلة القطرية radial equation

8.5– مقابل مسألة القوة المركزية في بعد واحد

- نعود أولا للمعادلة (22):

$$\mu\ddot{r} = \mu r\left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} \qquad (22)$$

- نعيد كتابة هذه المعادلة بالصورة:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U_{\mathrm{cf}} - \frac{dU}{dr} \qquad (23)$$

$$\text{where}: F_{\mathrm{cf}} = -\nabla U_{\mathrm{cf}} = \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{d}{dr}U_{\mathrm{cf}} \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{cf}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} \qquad (24)$$

- حيث F_{cf} هي القوة الطاردة المركزية.
- نستطيع أن نعبر الآن عن القوة الكلية المؤثرة:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} - \frac{dU_{\mathrm{cf}}}{dr} = -\frac{d}{dr}\left[U(r) + U_{\mathrm{cf}}(r)\right] = -\frac{d}{dr}U_{\mathrm{eff}}(r) \qquad (25)$$

- حيث U_{eff} هو الجهد الفعال أي مجموع الجهدين المركزي والطارد المركزي:

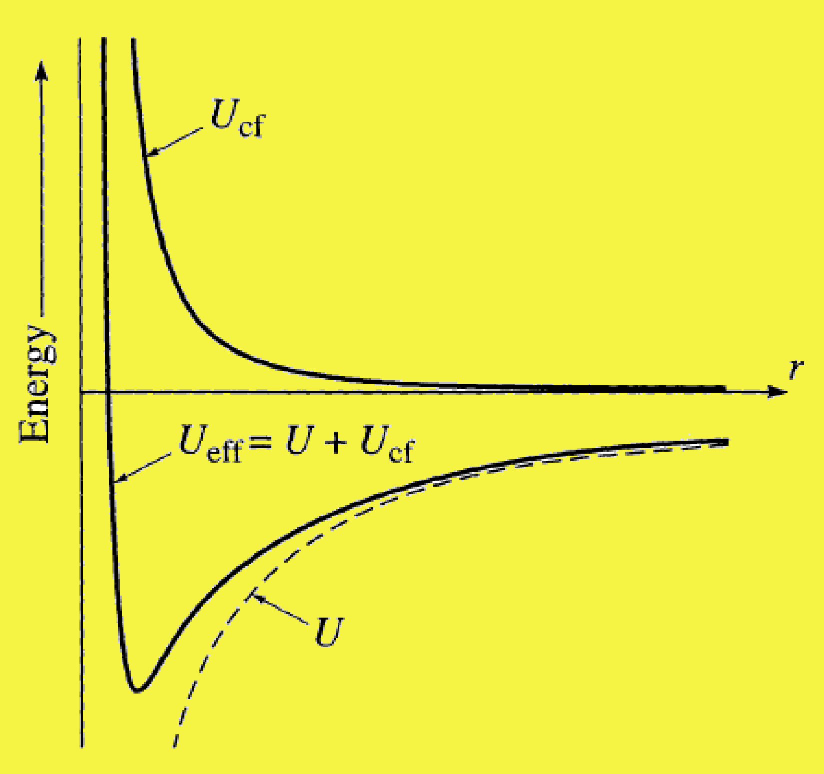
$$U_{\mathrm{eff}} = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \qquad (26)$$

8.5– مقابل مسألة القوة المركزية في بعد واحد

- المعادلة (26) يمكن كتابتها في حالة قوى الجذب الكوني (مثلا مذنب يدور حول الشمس) بالصورة:

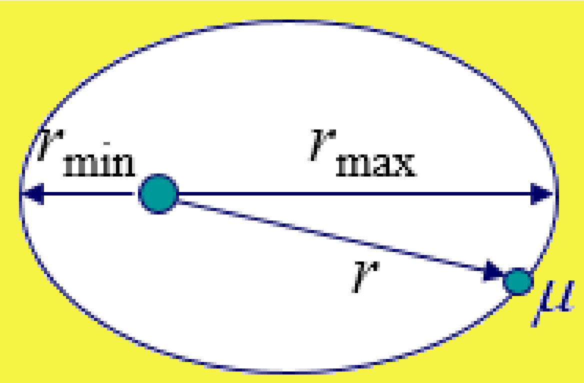
$$U_{\text{eff}} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \qquad (27)$$

- أذن الجهد الذي يتحكم بحركة المذنب حول الشمس هو عبارة عن حدين الأول سالب وهو تجاذبي وسببه التجاذب بين الجسم والشمس. والحد الثاني يمثل جهد القوة الطاردة المركزية.



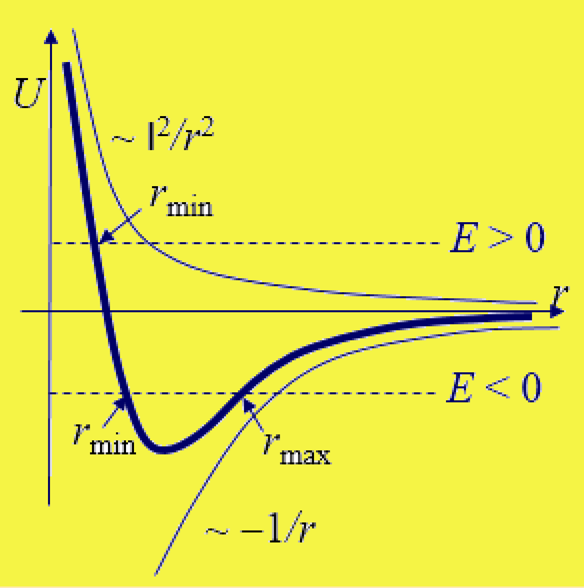
- لاحظ أن الحد الأول يعتمد خطيا على مقلوب المسافة r في حين يعتمد الثاني على مقلوب مربع المسافة. والنتيجة أن قوة التجاذب تصبح أقوى كلما ابتعد المذنب عن الشمس، وكلما اقترب المذنب من الشمس تغلبت قوة التنافر حيث تصبح أكبر فيبتعد المذنب عن الشمس. والنتيجة أنه يصبح في أفضل مدار يحقق التوازن بين القوتين

8.5–مقابل مسألة القوة المركزية في بعد واحد



- عندما تصبح الطاقة الكلية أقل من الصفر (سالبه) فيكون لدى المذنب أو أي جرم يدور حول الشمس نقطتين تغيير اتجاه turning points
- بحسب الصورة على اليسار وتوضيحها في الأسفل هاتان النقطتان هما عند المسافة الدنيا rmin و المسافة القصوى rmax .
- نتيجة ذلك أن المذنب يدور في مسار يشبه القطاع الناقص.
- أدنى نقطة للشمس يمكن للمذنب الوصول إليها هي rmin
- أن ما يحكم العملية كلها هو مبدأ: حفظ الطاقة الكلية لنظام الشمس و المذنب في نفس الوقت. نعيد النظر في معادلة (25):

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U_{\text{eff}}(r) \qquad (25)$$



- لو أثرنا على الطرفين بالكمية dr/dt:

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}U_{\text{eff}}(r) = -\frac{d}{dt}U_{\text{eff}}(r) \qquad (26)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)\right] = 0$$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{constant} \qquad (27)$$

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة