جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

مقرر 312 فيز (فيزياء تقليدية II)

المحاضرة رقم: 11

الحركة الدورانية للأجسام الصلبة-II

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

- للتذكير بآخر المعادلات التي حصلنا عليها في المحاضرة السابقة:

$$\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha).$$

$$\text{so} \quad \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha = (-\omega y_\alpha, \omega x_\alpha, 0)$$

$$\rightarrow$$

$$\boldsymbol{\ell}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha\right)$$

$$= m_\alpha \omega(-z_\alpha x_\alpha, -z_\alpha y_\alpha, x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \qquad (22)$$

$$L_z = \sum m_\alpha \omega (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \sum m_\alpha \omega \rho_\alpha^2 = I_z \omega \qquad (24)$$

where : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the distance of any point from the axis

$$I_z = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \qquad (25)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha'^2 = \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum m_\alpha \rho_\alpha^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (26)$$

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \quad \text{and} \quad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (27)$$

مضروبات العزوم

- وللتذكير أيضا، تسمى الكمية I بشكل عام بعزم القصور moment of inertia ويضاف له تذييله تشير إلى نسبة هذا العزم إلى أحد المحاور فمثلا: I_x عزم القصور حول محور x وهناك كذلك I_y و I_z

- بحسب المحاضرة السابقة فقد توصلنا إلى العلاقة (24) لعزم القصور I_z وأما معادلة (27) فيمكن ملاحظة أن كلا من L_x و L_y تتناسبان طرديا مع السرعة الزاوية ω وثابت التناسب سوف نسميه I_{xz} و I_{yz} على الترتيب أي أن:

$$L_x = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \omega \quad \text{and} \quad L_y = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \omega \qquad (27)$$

$$\rightarrow$$

$$L_x = \left(-\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha\right)\omega \quad \text{and} \quad L_y = \left(-\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha\right)\omega$$

$$\therefore L_x = I_{xz}\omega \quad \text{and} \quad L_y = I_{yz}\omega \qquad (28)$$

$$where: I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \quad \text{and} \quad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha \qquad (29)$$

- نسمي الكميتين في معادلة (29) مضروبات عزوم القصور الذاتي للجسم (أحيانا مضروبات العطالة). لاحظ أن كلا منها مذيل بالحرف z أضافة إلى حرف آخر أما x أو y أي أنها ترمز لعزوم القصور للدوران حول محور z. وحتى تكتمل منظومة عزوم القصور نحتاج إلى:

$$I_{zz} = \sum m_\alpha \rho_\alpha^2 = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \qquad (30)$$

وهو نفسه في معادلة (24) ولكن فقط حتى يتوافق ترميزيا مع زملائه

مضروبات العزوم

- إذن يمكن كتابة الاندفاع الزاوي بشكل كامل للجسم الذي يدور حول محور z كما يلي:

$$\mathbf{L} = \left(I_{xz}\omega, I_{yz}\omega, I_{zz}\omega \right) \qquad (30)$$

- حتى يمكننا حل هذه المعادلة وحساب الاندفاع نحتاج إلى حساب تلك المضاريب (I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}) لكل جسم بحسب شكله وأبعاده.
- في الشريحة التالية نقوم بحل مثال للتوضيح.

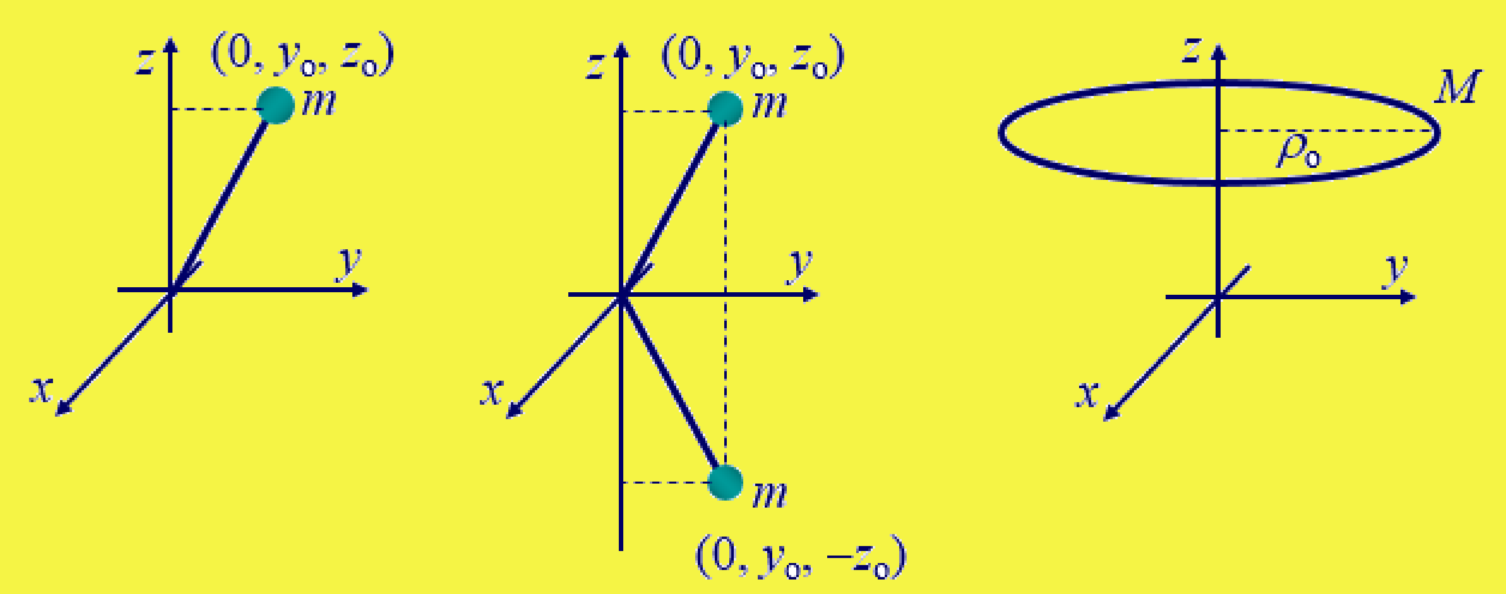
مثال 10.1 حساب مضروبات عزوم القصور

- Calculate the (simple) moments and products of inertia for rotation about the z axis of the following rigid bodies:

(a) A single mass m located at the position $(0, y_o, z_o)$ as shown in the figure below left.

(b) The same as in part (a), but with a second equal mass placed symmetrically below the xy plane (below middle).

(c) A uniform ring of mass M and radius ρ_o centered on the z axis and parallel to the xy plane (below right)



مثال 10.1 حسبا مضروبات عزوم القصور (الحل)

- (a) The products we have to calculate are:

$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha; \qquad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha; \qquad I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2).$$

  Since $x = 0$, these reduce to

$$I_{xz} = 0; \qquad I_{yz} = -m y_o z_o; \qquad I_{zz} = m y_o^2$$

  This confirms that $\mathbf{L}$ is not along the rotation axis (this one is going to wobble).

- (b) For the two mass system, we have to calculate sums:

$$I_{xz} = 0; \qquad I_{yz} = -m[y_o z_o + y_o(-z_o)) = 0; \qquad I_{zz} = 2m y_o^2$$

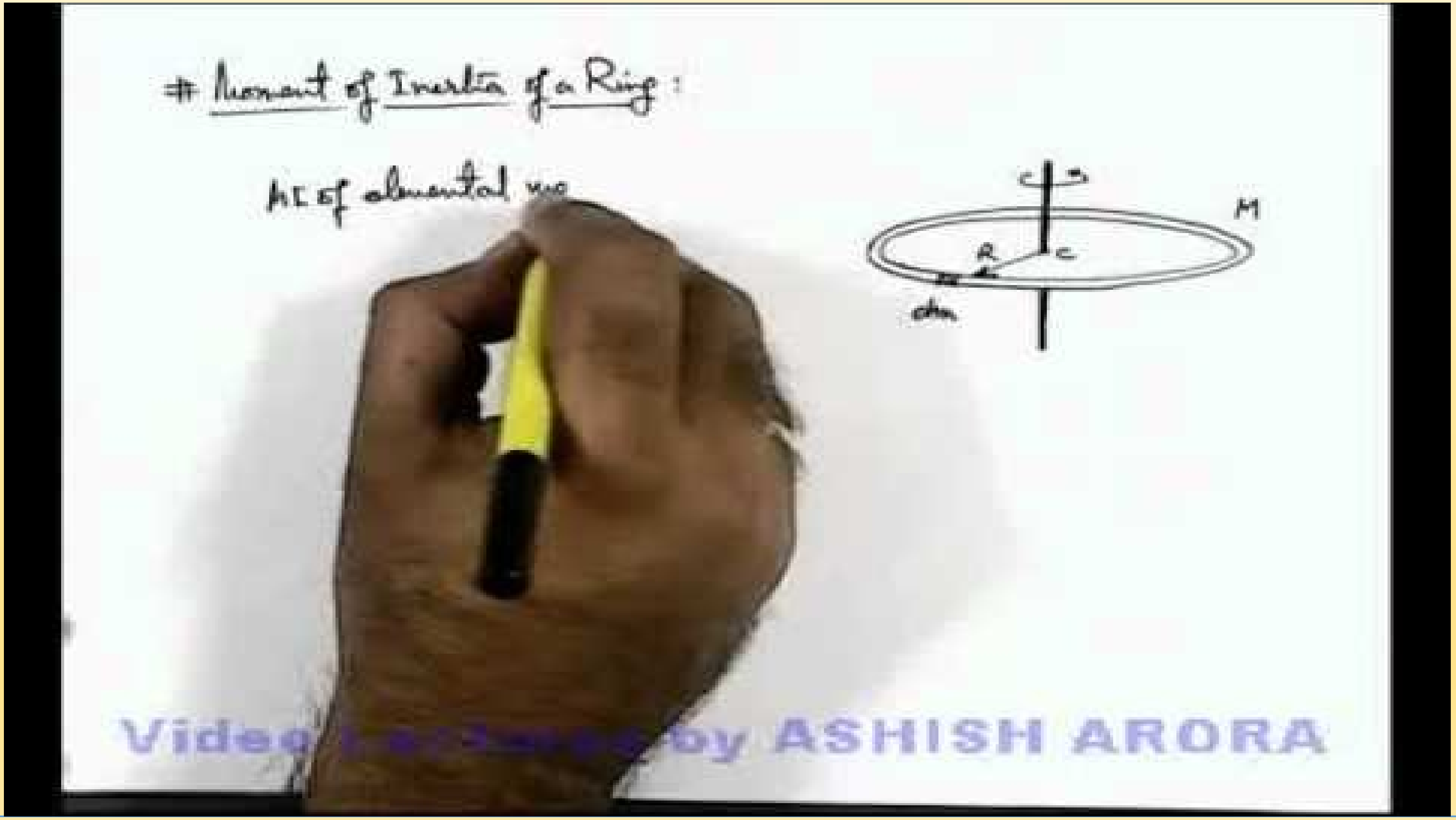
  This illustrates that when symmetries occur (like the one about the y axis in this case), the product of inertia for that axis can become zero. In this case, there is reflection symmetry about the y axis. Because both I_{xz} and I_{yz} are zero, $\mathbf{L}$ is along the rotation axis. Note that both rods experience a torque, but they balance.

- (c) For the ring, we would normally have to do an integration, but due to the symmetry we can do this without a formal mathematical integration. You can easily see that $I_{xz} = 0$, since the x coordinate for each element of mass can be paired with another with negative x coordinate. Likewise for I_{yz}. Since $(x^2 + y^2) = \rho_o^2 = \text{constant}$, I_{zz} is just

$$I_{zz} = \left(\sum m_\alpha\right)\rho_o^2 = M\rho_o^2.$$

مثال 10.1 حسبا مضروبات عزوم القصور (الحل)

- هناك ملاحظة مهمة في هذا المثال الجزء (c) حيث أن مضروبات العزوم تساوي الصفر عدا I_{zz} الذي كان ببساطة يساوي الكتلة في مربع نصف القطر كما هو متوقع.
- الفائدة المهمة التي نستفيدها أنه عندما يكون النظام متناسقا حول محور z مثل عجلة تدور حول ذلك المحور بحيث تكون كتلة العجلة متناسقة تماما حول المحور فأن جميع المضاريب تساوي صفرا عدا I_{zz} .



مثال 10.2 حساب مضروبات عزوم القصور لعمود يدور

- *(a) A thin uniform rod of mass M and length L lies on the x axis with one end at the origin. Find its moment of inertia for rotation about the z axis.*
- *(b) What if the rod's center is at the origin?*

(a) Because the rod is uniform, it has a uniform density that we can characterize as a linear mass density $\mu = M/L$.: We want to find the products of inertia I_{xz}, I_{yz} and I_{zz}. Because this is a thin rod (i.e. we are not supposed to worry about the thickness), we need to take $y = z = 0$, so I_{xz} and I_{yz} are identically zero. The remaining sum,

$$I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \sum m_\alpha x_\alpha^2$$

is to be converted to an integral over the length by considering an element of mass $dm = \mu\, dx$:

$$I_{zz} = \int_0^L \mu x^2 dx.$$

Because $\mu = \text{constant}$, we have the solution

$$I_{zz} = \int_0^L \mu x^2 dx = \mu \frac{L^3}{3} = \tfrac{1}{3} ML^2.$$

(b) To calculate it for rotation about the rod center, we simply integrate from $-L/2$ to $L/2$:

$$I_{zz} = \int_{-L/2}^{L/2} \mu x^2 dx = \mu \left[\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right] = \tfrac{1}{12} ML^2.$$

10.3- ممتدة عزم القصور The Inertia Tensor

- بشكل عام كان نقاشنا حتى الآن عن الدوران حول محور ثابت وسميناه z ولكن هذا لا يحصل دائما وأنما توجد حالات يتم فيها الدوران الحر مثلا لو تخيلت صندوقا يسقط سقوطا حرا في الفضاء ويتقلب في كل الاتجاهات.
- أذن هناك عدة محاور يمكن أن يتم حولها الدوران. ولكن عندما يكون المحور يسمح باندفاع زاوي $\boldsymbol{L}$ يكون اتجاهه هو نفس اتجاه السرعة الزاوية ω ففي هذه الحالة نسمي المحور: المحور الرئيسي Principal Axes
- أذن في ثلاثة أبعاد حرة نكتب السرعة الزاوية كما يلي: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.
- وبالتالي نعبر عن الاندفاع الزاوي بالعلاقة (انظر معادلة 22):

$$L = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = \sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha\right) \qquad (31)$$

- لأي متجه $\mathbf{r} = (x, y, z)$ الحدود من المضروب: $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ يمكن كتابته كما يلي:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) = [&(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z, \\ &- yx\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - yz\omega_z, \\ &- zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] \qquad (32)\end{aligned}$$

- انظر الشريحة التالية لطريقة الفك أو يمكن استخدام العلاقة: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$\bar{\omega} \times \bar{r}$:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{x}(\omega_y z - \omega_z y) - \hat{y}(\omega_x z - \omega_z x) + \hat{z}(\omega_x y - \omega_y x) \quad \text{---} \; (1)$$

next.. $\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ (\omega_y z - \omega_z y) & -(\omega_x z - \omega_z x) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\left[\omega_x y^2 - \omega_y y x + \omega_x z^2 - \omega_z x z\right] - \hat{y}\left[\omega_x y x - \omega_y x^2 - \omega_y z^2 + \omega_z y z\right]$$

$$+ \hat{z}\left[-\omega_x x z + \omega_z x^2 - \omega_y y z + \omega_z y^2\right]$$

10.3- ممتدة عزم القصور The Inertia Tensor

- ومنها يمكننا كتابة الصورة العامة لمركبات الاندفاع الزاوي كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

- حيث:

$$\begin{array}{lll} I_{xx} = \sum m_\alpha (y_\alpha^2 + z_\alpha^2) & I_{yx} = -\sum m_\alpha y_\alpha x_\alpha & I_{zx} = -\sum m_\alpha z_\alpha x_\alpha \\ I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha & I_{yy} = \sum m_\alpha (z_\alpha^2 + x_\alpha^2) & I_{zy} = -\sum m_\alpha z_\alpha y_\alpha \\ I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha & I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha & I_{zz} = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \end{array}$$

- نقوم بعد ذلك بتسهيل كتابة هذه المعادلات بصورة ممتدة من أجل بساطة التعامل معها خاصة خلال أجراء العمليات الرياضية المختلفة.

- سوف نعبر عن الاندفاع الزاوي بالطريقة التالي عوضا عن معادلات (33):

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \quad \text{or} \quad L_i = I_{ij}\omega_j \qquad (34)$$

10.3- ممتدة عزم القصور The Inertia Tensor

- ويمكننا كتابتها بصورة مصفوفات: $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \qquad (35)$$

- في معادلة (35) الكمية $\mathbf{I}$ تسمى ممتدة عزم القصور moment of inertia tensor
- الفرق الجوهري بين المصفوفة والممتدة tensor أن الأخيرة هي في الحقيقة بشكل متجهي أي أن الكمية $\mathbf{I}$ هي كمية متجهه وبالتالي ناتج المصفوفة هو كمية متجهة كذلك.
- بعض مميزات هذه الممتدة:
- أولا: التناسق: $I_{ij} = I_{ji}$
- ثانيا: منقول المصفوفة transpose: لا تتغير هذه المصفوفة تحت عمليات النقل. $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{T}$.

مثال 10.2 ممتدة العزوم لجسم بشكل مكعب

- لدينا مكعب نفترض بأن كتلته الكلية هي M وطول حرفه a ويدور حول ركنه السفلي عند نقطة الأصل كما في الشكل. وهذا ليس معناه أننا حددنا محور الدوران فممكن يكون على أي من المحاور الثلاثة.

- بما أن المكعب منتظم الشكل فعلينا تحويل عمليات الجمع Σ إلى عمليات تكامل.

$$I_{xx}=\sum m_\alpha (y_\alpha^2+z_\alpha^2)\Rightarrow$$

$$I_{xx}=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a dz\rho(y^2+z^2)$$

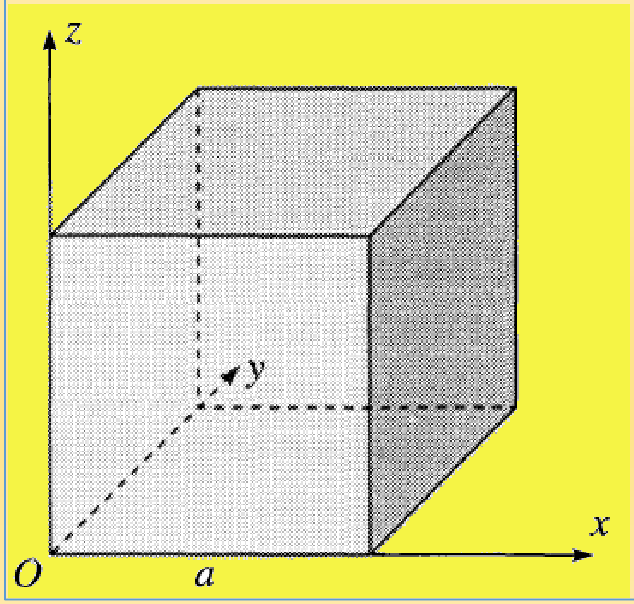
$$\rho=M/a^3$$

- بحسب المعادلات (33) علينا أن نقوم بإجراء 9 تكاملات.

ولكن كما هو واضح من الشكل فأن $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}$ وبالتالي لهذه الثلاثة عزوم نفس النتيجة. كذلك العزوم المختلطة لها نفس النتيجة.

إذن نحتاج فقط إلى تكاملين.

- يمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:



$$I_{xx}=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a dz\rho(y^2+z^2)$$

$$=\rho\left(\int_0^a dx\int_0^a y^2dy\int_0^a dz+\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a z^2dz\right)=\tfrac{2}{3}\rho a^5=\tfrac{2}{3}Ma^2$$

مثال 10.2 ممتدة العزوم لجسم بشكل مكعب

- أما التكاملات المختلطة:

$$I_{xy} = -\sum m_\alpha x_\alpha y_\alpha \quad \Rightarrow$$

$$I_{xy} = -\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a dz\rho xy = -\rho\int_0^a xdx\int_0^a ydy\int_0^a dz = -\tfrac{1}{4}\rho a^5 = -\tfrac{1}{4}Ma^2$$

- أذن مصفوفة **I** في معادلة (35) تصبح:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \tfrac{2}{3}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{2}{3}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{2}{3}Ma^2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{[about a corner]}$$

- لو أردنا مثلا حساب الاندفاع الزاوي **L** حول محور x:

$$\because \boldsymbol{\omega} = (\omega,\ 0,\ 0)$$

$$\therefore \mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{12}\begin{bmatrix} 8\omega \\ -3\omega \\ -3\omega \end{bmatrix} \qquad (36)$$

$$or: \quad \mathbf{L} = Ma^2\omega\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

مثال 10.2 ممتدة العزوم لجسم بشكل مكعب

- نكرر نفس المثال السابق ولكن في هذه المرة نفترض بأن نقطة الأصل واقعة في مركز المكعب: سوف نلاحظ أن التكاملات للعزوم $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ هي نفسها السابقة مع تغيير حدود التكامل:

$$I_{xx} = \rho\left(\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dz + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz\right) = 2\tfrac{2}{3}\rho a^2 (a/2)^3 = \tfrac{1}{6} M a^2$$

and :

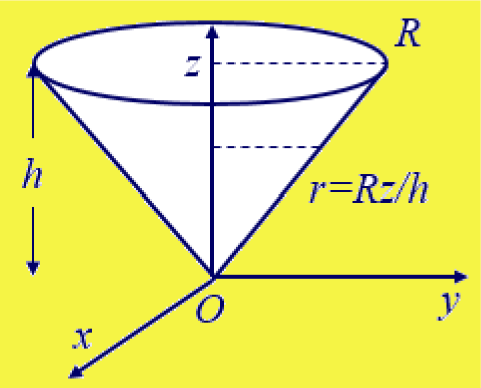
$$I_{xy} = -\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \rho xy, = -\rho \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-a/2}^{a/2} y dy \int_{-a/2}^{a/2} dz = 0$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Ma^2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\mathbf{1}\,[\text{about CM}] \qquad (37)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{Ma^2}{6}\boldsymbol{\omega} \qquad (38)$$

مثال 10.3 ممتدة العزوم لجسم بشكل مخروط

- Let's do one more example—Find the moment of inertia tensor $\mathbf{I}$ for a spinning top that is a uniform solid cone (mass M, height h, and base radius R) spinning about its tips. Choose the z axis along the axis of symmetry of the cone, as shown in the figure. For an arbitrary angular velocity $\boldsymbol{\omega}$, what is the top's angular momentum $\mathbf{L}$?



- The I_{zz} element is given by the integral:

$$I_{zz} = \int_V dV\, \rho (x^2 + y^2),$$

where the volume density is

$$\rho = M / V = 3M / \left(\pi R^2 h\right).$$

- This is most easily solved in cylindrical polar coordinates,

(ρ, ϕ, z), where $\rho^2 = (x^2 + y^2)$. NB: The two rho's are different! Then

$$I_{zz} = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{Rz/h} \rho d\rho\, \rho^2$$

$$= 2\pi\rho \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} \rho^3 d\rho = \frac{\pi\rho}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^4 \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{10} MR^2$$

- The I_{xx} and I_{yy} elements are equal, and are

$$I_{xx} = \rho \int_V dV (y^2 + z^2) = \tfrac{3}{20} M (R^2 + 4h^2).$$

مثال 10.3 ممتدة العزوم لجسم بشكل مخروط

- All of the off-diagonal elements are zero. Note that symmetry about any two axes guarantees that all of the off-diagonal elements are zero. Then, the moment of inertia tensor is:

$$\mathbf{I} = \frac{3}{20}M\begin{bmatrix} R^2+4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2+4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

- The last form is just for further discussion. A matrix with all zero off-diagonal elements is, as we said, called a diagonal matrix. We can then write

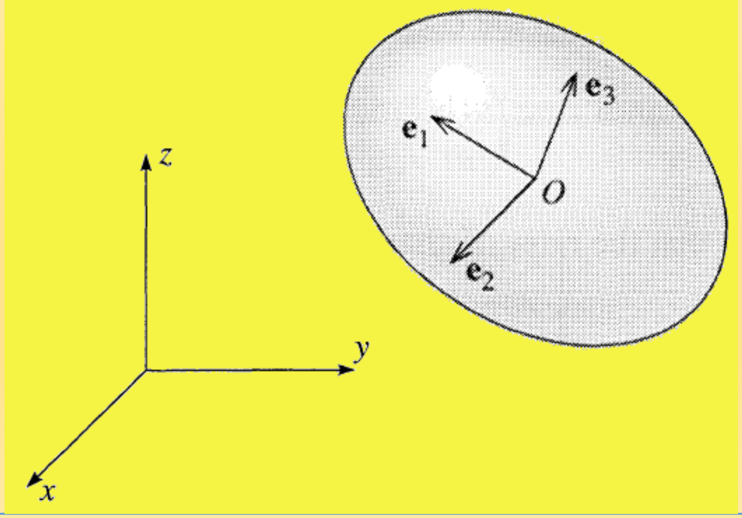
$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (\lambda_1\omega_x, \lambda_2\omega_y, \lambda_3\omega_z).$$

- What this means is that whenever $\boldsymbol{\omega}$ points along one of the three coordinate axes, $\mathbf{L}$ and $\boldsymbol{\omega}$ are parallel. This brings us (finally) to the concept of principal axes of inertia.
- While this may not look remarkable, notice that if the angular velocity w points along one of the coordinate axes, then the same is true of the angular momentum $\mathbf{L}$. For example, if w points along the x axis, then $\boldsymbol{\omega}_y = \boldsymbol{\omega}_z = 0$, hence:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = (\lambda_1\omega_x, 0, 0)$$

10.7- معادلات أولار Euler's Equations

- تعرفنا حتى الآن إلى أن جميع الأجسام الصلبة لها 3 محاور رئيسية principal axes كما عرفنا كيف نشكل ممتدة العزوم بحيث تكون العزوم المنسوبة للمحاور الرئيسية واقعة في المحور القطري المائل للممتدة.
- لذلك عبرنا عن متجه الاندفاع الزاوي بالصورة: $\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$.
- سبق كذلك في أول الفصل الدراسي الحديث عن أطر الأسناد، ومنها ذلك الأطار الأسنادي المرتبط بالنظام نفسه، أي يتحرك مع النظام وبالتالي يعتبر ثابتا بالنسبة للنظام حتى لو كان النظام نفسه يتحرك أو يدور.
- إذن بالإمكان تصور أطار أسنادي هو الذي يصف حركة الجسم الصلب body frame وأطارا آخر مرتبط بالجسم الصلب بحيث يتحرك معه تماما ويعتبر مستقرا أو ثابتا بالنسبة له. ونسمي الأول أطار الجسم والثاني الأطار الفضائي space frame. سوف نعتبر أن أحدثيات هذا الأطار هي x, y, z ونستخدم وحدات متجهات هي $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ضمن عملياتنا على نظام الأحداثيات.



10.7- معادلات أولار Eulers Equations

- تذكر العلاقة بين تفاضل الاندفاع بالنسبة للزمن والقوة في حالة الاندفاع الخطي وبين الاندفاع الزاوي وعزم اللي في حالة الدوران. لذلك لدينا العلاقة التالية:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \boldsymbol{\tau} \qquad (28)$$

- يرتبط النظامان بالعلاقة التالية:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{body}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} \qquad (28)$$

- ومن هذه العلاقة نصل إلى ما يسمى: معادلات أولار **Euler's equation**

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \qquad (29)$$

- **باستخدام العلاقة المذكورة قبل قليل** $\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1,\ \lambda_2\omega_2,\ \lambda_3\omega_3)$. نستطيع أن نفك هذه المعادلة إلى ثلاث معادلات مختلفة نسميها معادلات أولار

10.7- معادلات أولار Euler's Equations

- يمكننا إذن الحصول على معادلات أولار بالصورة:

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \qquad (29)$$

$$\because \mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3)$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{L}} = (\lambda_1\dot{\omega}_1, \lambda_2\dot{\omega}_2, \lambda_3\dot{\omega}_3)$$

$$\therefore (29) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 &= \tau_1 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_1\omega_3 &= \tau_2 \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 &= \tau_3 \end{aligned} \qquad (30)$$

- تعطي هذه المعادلات الكمية w بالنسبة لاطار الجسم. ويتعبر حلها صعبا بعض الشئ بسبب الحاجة لمعرفة قيم عزوم اللي المعطاة.
- تصبح هذه المعادلات أسهل لو كانت قيم عزوم اللي تساوي الصفر.

شـكرا للمتابعة

نهاية المحاضرة