رموز ديـراك

رموز ديـراك:

نعلـم أنـه يمكـن وصـف ميكانيكـا الكـم بواسـطة صـورتين متكـافئتين، همـا صـورة شـرودنجروتكون فيهـا المـؤثرات عبـارة عـن عوامـل تفاضـلية وصـورة هيزنبـرج وتمثـل فيهـا المؤثرات بمصفوفات. ونتيجة للتشابه بين المؤثرات التفاضلية والمؤثرات المصفوفة، استحدث ديراك طريقة مختصرة لكتابة كل من الدوال الموجية والتكاملات التى تتضمنها علاقات نظريـة الكم لإضفاء سهولة على العمليات الرياضية ولإبراز المعنـى الفيزيـائى لهذه العلاقـات. وسنورد هنا نبذه مختصرة عن كيفية كتابة علاقات نظرية الكم باستخدام هذه الرموز.

فتكتب الدالة $g(x)$ والدالة المرافقة لها $g^*(x)$ فى الصورة التالية:

$$g\,(x) = \langle x | g \rangle$$

$$g^*(x) = \langle g | x \rangle$$

ولأنه من الأنسب عدم ذكر الإعتمـاد الصـريح للدالـة g علـي المتغيـر x، فتكتـب هـذه المعـادلات بصورة أكثر اختصـاراً كالآتـي:

$$g\,(x) = |g\rangle \tag{1}$$

$$g^*(x) = \langle g| \tag{2}$$

ويسمى القوس $\langle \cdots \rangle$ باللغة الإنجليزية براكت. ويلاحظ فـي العلاقـات السـابقة أن القـوس قـد تـم شطره الى نصفين يرمز للشطر الأول بالرمز $|\cdots\rangle$ ويطلق عليه اسم "برا" وهـى الشـطر الأول من كلمة "براكـت" ويرمـز للشـطر الثـانى بـالرمز $\langle\cdots|$ ويطلـق عليـه اسـم "كـت" وهـى الشـطر الآخر من كلمة " براكت ". ويسمي الرمز $\langle g|$ بمتجه الحالة بدلاً من دالة الحالة $g(x)$.

ويكتب تكامل حاصل ضـرب دالتين $g_1(x)$، $g_2(x)$ في الصــورة:

$$\int g_1^*(x)\; g_2(x)\; dx = \int \langle g_1 | x \rangle \langle x | g_2 \rangle\; dx \tag{3}$$

ويمكـن كتابـة هـذا التكامـل بصـورة أكثـر اختصـاراً كحاصـل الضـرب القياسـي لمتجهـي الحالـة كالآتي:

$$\int g_1^*(x)\; g_2(x)\; dx = \langle g_1 | g_2 \rangle \tag{4}$$

ويسمى التكامل $\langle g_1 | g_2 \rangle$ بحاصل الضرب القياسي لكل من g_1 ، g_2. وبنفس الطريقة يمكن كتابة علاقة المعايرة للدوال المميزة في الصورة التالية:

$$\int u_n^*(x)\ u_n(x)\ dx = 1$$

$$\langle u_n | u_n \rangle = 1 \qquad (5)$$

وتكتب علاقة التعامد للدوال المميزة في الصورة:

$$\int u_n^*(x)\ u_m(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = 0 \qquad (m \neq n) \qquad (6)$$

والشرط الدال أن مؤثر $\hat{A}$ هو مؤثــر هيرميتي:

$$\int u_1^* \left(\hat{A}\, u_2\right) dx = \int \left(\hat{A}\, u_1\right)^* u_2\, dx$$

$$\langle u_1 | \hat{A} u_2 \rangle = \langle \hat{A} u_1 | u_2 \rangle \qquad (7)$$

يلاحظ في شرط أن المؤثر هيرميتي "العلاقة (7)" أن المؤثر $\hat{A}$ قد كتب داخل النصف الأيمن للقوس وذلك في الطرف الأيسر للمعادلة ويعنى هذا أن المؤثر $\hat{A}$ يؤثر على u_2 وأن نفس المؤثر كتب في النصف الأيسر للقوس وذلك في الطرف الأيمن للمعادلة ويعنى هذا أن المؤثر $\hat{A}$ يؤثر على u_1 ونستنتج من ذلك أن أى من طرفي العلاقة (7) يمكن كتابته في صــورة موحدة هى:

$$\langle u_1 | \hat{A} | u_2 \rangle \qquad (8)$$

وهذه الصــورة لا يفهم منها هل يؤثر المؤثر $\hat{A}$ على u_1 أو على u_2 وهى صــورة مرغوب فيها في كثير من العلاقات الرياضية في نظرية الكم. ويسمى الرمز $\langle u_1 | \hat{A} | u_2 \rangle$ بعنصر مصفوفة المؤثر $\hat{A}$ مأخوذاً بين u_1، u_2. ومن البديهى أن $\langle u_1 | \hat{A} | u_2 \rangle$ وهو رقم عددى لا يعتمد على x لأنه يمثل قيمة تكامل قد تم اجراؤه على x.

ويلاحظ أنه إذا كان المؤثر $\hat{A}$ هيرميتي وكان:

$$\hat{A} | \psi \rangle = | \varphi \rangle$$

فإن هذا يؤدي إلي:

$$\langle\varphi| = \langle\psi|\hat{A}$$

أما إذا كان المؤثر $\hat{A}$ غير هيرميتي وكان:

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\varphi\rangle$$

فإن هذا يؤدي إلي:

$$\langle\phi| = \langle\psi|\hat{A}$$

حيث:

$$\langle\phi| \neq \langle\varphi|$$

لما كان إيجاد مرافق المرافق لدالة ما هى الدالة نفسها وهى ما يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$(g^*)^* = g$$

فإنه يمكن استنتاج العلاقة التالية:

$$\langle g_1|g_2\rangle = \langle g_2|g_1\rangle^* \qquad (9)$$

والطرف الأيمن لهذه المعادلة هو مرافق المرافق للطرف الأيسر (أو العكس).

معادلة القيمة المميزة باستخدام رموز ديراك:

إذا كانت $g_n(x)$، a_n هما الدوال المميزة والقيم المميزة للمؤثر $\hat{A}$ على الترتيب، فإن معادلة القيمة المميزة:

$$\hat{A}\, g_n(x) = a_n\, g_n(x)$$

يمكن كتابتها في احدى الصــور التالية:

$$\hat{A}\,\langle x|g_n\rangle = a_n\,\langle x|g_n\rangle$$

ولأنه من غير الضروري الإشارة بوضوح إلي الاعتماد علي المتغير x فيمكن اختصار العلاقه السابقة إلي الصورة:

$$\hat{A}\,|g_n\rangle = a_n\,|g_n\rangle$$

ولأن الدالة $g_n(x)$ دالة مميزة "دالة ذاتية" للمؤثر $\hat{A}$ فإننا نشير إلي متجه الحالة المميز "متجه الحالة الذاتية" بالرمز $|a_n\rangle$ بدلاً من الرمز $|g_n\rangle$. حيث أن الرمز $|a_n\rangle$ يدل علي أننا نتعامل مع متجه حالة مميز "ذاتي أو مناسب" وأن القيمة المميزة "الذاتية أو المناسبة" له هي a_n. ولأن الرمز u لايحمل أي معلومات إضافية فإنه يمكن كتابة العلاقة السابقة بصورة أكثر اختصاراً كالآتي:

$$\hat{A}\,|a_n\rangle = a_n\,|a_n\rangle \tag{10}$$

ويسمي الرمز $|\mathbf{a_n}\rangle$ الذى لا يحتوى معلومات عن احداثيات الدالة المميزة "an eigen function" بالمتجه المميز "an eigen vector" أو كت المميز "an eigen ket" والمعادلة المرافقة لمعادلة القيمة المميزة يظهر بها برا المميز "an eigen bra". ويلاحظ أن البعض يشير المتجه المميز $|\mathbf{a_n}\rangle$ بالرمز $|\mathbf{n}\rangle$ وبالتالي تكتب العلاقة (10) أحياناً بالصورة:

$$\hat{A}\,|n\rangle = a_n\,|n\rangle$$

المفكوك $\Psi = \sum_n a_n\, g_n$ باستخدام رموز ديراك:

يمكن كتابة المفكوك

$$\Psi(x) = \sum_n a_n\, g_n(x) \tag{11}$$

باستخدام رموز ديراك مع عدم كتابة الإعتماد على الإحداثيات x في الصورة التالية:

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n\,|g_n\rangle \tag{12}$$

ولتعيين قيمة a_n نضرب طرفي العلاقة (12) من جهة اليسار في $\langle g_m|$ لنحصل علي:

$$\langle g_m|\Psi\rangle = \langle g_m|\sum_n a_n\,|g_n\rangle$$

$$= \sum_n a_n\,\langle g_m|g_n\rangle$$

ومن علاقة التعامد نجد أن من بين الحدود التى يحتويها المجموع $\sum_{n}$ يوجد حد واحد فقط لا يساوى صفراً لأن $\langle g_m | g_n \rangle = 0$ إذا كانت $m \neq n$، ولأن $\langle g_m | g_n \rangle = 1$ إذا كانت $m = n$. وبالتالي نحصل علي:

$$a_m = \langle g_m | \Psi \rangle \tag{13}$$

بالتعويض من (13) في (12) نحصل علي علاقة المفكوك بالصورة:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n} \langle g_n | \Psi \rangle | g_n \rangle \tag{14}$$

علاقة الإحتواء باستخدام رموز ديراك:

يمكن استنتاج علاقة الإحتواء

$$\sum_{n} a_n^2 = 1 \tag{15}$$

باستخدام رموز ديراك فإذا كانت الدالة الموجية Ψ معايرة فان :-

$$\int \Psi^*(x)\, \psi(x)\, dx = 1$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \tag{16}$$

ويمكن أيضاً كتابة $\langle \Psi | \Psi \rangle$ في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \int \Psi^*(x)\, \psi(x)\, dx \\ &= \int \left[\sum_{n} a_n^* u_n^* \right] \left[\sum_{m} a_m u_m \right] dx \\ &= \sum_{n} \sum_{m} \int a_n^* u_n^* a_m u_m \, dx \\ &= \sum_{n} \sum_{m} a_n^* a_m \langle u_n | u_m \rangle \end{aligned} \tag{17}$$

وبتطبيق شرطي التعامد والمعايرة للدوال u، نجد أن الحدود الناتجة من عمليتى الجمع تساوى صفراً إذا كانت $n \neq m$ ولا تســاوى صفراً إذا كانت $n = m$. ويعنى هذا أن عمليتى الجمع $\sum_m \sum_n$ فى العلاقة (17) يمكن كتابتها على انها عملية جمع واحدة $\sum_n$:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n a_n^* \, a_n \langle u_n | u_n \rangle$$

$$= \sum_n a_n^* \, a_n = 1$$

$$\therefore \quad \sum_n a_n^2 = 1$$

الصورة العامة لمعادلة الإحتواء:

من العلاقة (14) يمكن كتابة أى دالة $q(x)$ كمفكوك باستخدام مجموعة مميزة متعامدة معايرة تامة "complete orthonorml set" ولتكن u_n:

$$q(x) = \sum_n c_n \, u_n(x)$$

$$|q\rangle = \sum_n \langle u_n | q \rangle |u_n\rangle$$

ويمكن كتابة الدالة المرافقه $q^*(x)$ علي الصورة:

$$\langle q| = |q\rangle^* = \sum_n \langle q | u_n \rangle \langle u_n |$$

وبالمثل يمكن كتابة الدالة $s(x)$ كمفكوك باستخدام نفس المجموعة المميزة المتعامدة المعايرة التامة u_n:

$$s(x) = \sum_n d_n \, u_n(x)$$

$$|s\rangle = \sum_m \langle u_m | s \rangle |u_m\rangle$$

وبالتالي فيمكن كتابة حاصل الضرب القياسي لمتجهي الحالة $|q\rangle$، $|s\rangle$ علي الصورة:

$$\langle q|s\rangle = \sum_n \sum_m \langle q|u_n\rangle\langle u_n|\langle u_m|s\rangle|u_m\rangle$$

وبتطبيق شرطي التعامد والمعايرة للدوال u، نجد أن عمليتى الجمع يمكن كتابتها على انها عملية جمع واحدة $\sum_n$:

$$\langle q|s\rangle = \sum_n \langle q|u_n\rangle\langle u_n|s\rangle$$

$$= \sum_n c_n^* d_n$$

القيمة المتوسطة للكمية الفيزيائية A:

لايجاد القيمة المتوسطة "المتوقعة" لقياس الكمية الفيزيائية A والتي يمثلها المؤثر التفاضلي $\hat{A}$ نحسب التكامل:

$$\overline{A} = \frac{\int \psi^* \,\hat{A}\, \psi \; d\tau}{\int \psi^* \;\psi \; d\tau}$$

وباستخدام رموز ديراك يمكن كتابة القيمة المتوسطة علي الصورة:

$$\overline{A} = \frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

وكحالة خاصة إذا كانت ψ دالة حالة مميزة "ملائمة" للمؤثر $\hat{A}$ وكانت مسواة "معايرة" فإن:

$$\overline{A} = \frac{a\langle\psi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = a$$

حيث a هي القيمة المميزة "الملائمة" للمؤثر $\hat{A}$ حيث:

$$\hat{A}\psi = a\psi$$