الفصل الصيفي 1435/1434 هـ الزمن: ساعة و نصف	الاختبار الشهري الأول في المقرر 151 ريض	جامعة الملك سعود كلية العلوم- قسم الرياضيات

د. برهان

اسم الطالب	
الرقم الجامعي	

السؤال الأول (6 درجات)

(أ) أثبت أن : $(p \to q) \to (\neg p \to r) \equiv p \vee r$. (درجتان)

$$(p \to q) \to (\neg p \to r) \equiv (\neg p \vee q) \to (p \vee r)$$
$$\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (p \vee r)$$
1
$$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \vee r)$$
$$\equiv (p \vee (p \vee r)) \wedge (\neg q \vee (p \vee r))$$

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$

1
$$\equiv (p \vee r) \wedge ((p \vee r) \vee \neg q)$$
$$\equiv (p \vee r)$$

قاعدة الامتصاص

(ب) بدون استخدام الجداول, أثبت أن : $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$ مصدوقة. (درجتان)

$$[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q \equiv [(\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)] \to q$$
1
$$\equiv [F \vee (\neg p \wedge q)] \to q$$
$$\equiv (\neg p \wedge q) \to q$$
1
$$\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee q$$
$$\equiv p \vee (\neg q \vee q) \equiv p \vee T \equiv T$$

(ج) أثبت أنه إذا كان $(7n+5)$ عددا فرديا فإن n عدد زوجي حيث n عدد صحيح. (درجتان)

نستخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي .

نفترض أن n هو عدد فردي فلنثبت أن $(7n+5)$ هو عدد زوجي.

1 بما أن n فردي فانه يوجد عدد صحيح k بحيث $n=2k+1$

$7n = 7(2k+1)$ ومن $7n+5 = 7(2k+1)+5$

$$= 14k+12$$
$$= 2(7k+6)$$
$$= 2m$$

1 حيث $m=7k+6 \in \mathbb{Z}$

إذن $(7n+5)$ هو عدد زوجي.

السؤال الثاني (4 درجات)

بين صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل (درجة لكل عبارة)

(أ) $\forall x \in \mathbb{R}, 9x^2+6x+1 \ge 0$

صح لأن $9x^2+6x+1=(3x+1)^2 \geq 0$ ①

(ب) $\neg \exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$

$\neg(\exists x\in\mathbb{R} , x>x^2) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, x\le x^2$

خاطئة. خذ قيمة لـ $0<x<1$ مثلا $x=1/2$. ①

(ج) مجموع عددين غير كسرين هو عدد غير كسري.

خاطئة. خذ $a=2+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ و $b=3-\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ فإن $a+b=5\in\mathbb{Q}$ ①

(د) كل عدد أولي هو عدد فردي.

خاطئة. 2 هو عدد أولي وزوجي. ①

السؤال الثالث (6 درجات)

(أ) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن: 7^n-2^n يقبل القسمة على 5 لأجل كل عدد صحيح $n\ge1$.

(3 درجات)

نضع $P(n)$: " $5 \mid 7^n-2^n$ "

• خطوة الأساس: $n=1$: $5 \overset{?}{\mid} 7^1-2^1=5$ صح إذن $P(1)$ صائبة. ①

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k\ge1$. نفترض أن $P(k)$ صائبة ولنثبت صحة $P(k+1)$.

بما أن $P(k)$ صائبة إذن لدينا $5 \mid 7^k-2^k$ يعني يوجد $c\in\mathbb{Z}$ بحيث $7^k-2^k=5c$ (0,5)

$$7^{k+1}-2^{k+1} = 7\times7^k-2\times2^k$$
$$= (5+2)\times7^k-2\times2^k$$
$$= 5\times7^k+2\times7^k-2\times2^k$$
$$= 5\times7^k+2(\underbrace{7^k-2^k}_{5c})$$
$$= 5[7^k+2c]=5m$$

(1,5)

إذن $5 \mid 7^{k+1}-2^{k+1}$ يعني $P(k+1)$ صائبة

عندئذ نستنتج أن لكل $n\ge1$ ؛ $5\mid 7^n-2^n$

(ب) لتكن $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائيا كما يلي : $\begin{cases} a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

أثبت أن : $a_n = 3^n - 1$ لكل عدد صحيح $n \geq 0$. (3 درجات)

نستخدم المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي. نضع $P(n)$: "$a_n = 3^n - 1$"

• خطوة الأساس: $n = 0$ ؛ $a_0 = 0$ ، $a_0 \overset{?}{=} 3^0 - 1 = 0$ صح إذن $P(0)$ صائب

1

$n = 1$ ، $a_1 = 2$ ، $a_1 = 3^1 - 1$ صح إذن $P(1)$ صائب

• خطوة الاستقراء: نأخذ $k \geq 2$. نفترض أن $P(0)$ ، ... ، $P(k)$ جميعها صائبة ونثبت صحة $P(k+1)$.

0,5 بما أن: $a_{k+1} = 4a_k - 3a_{k-1}$

و $P(k)$ صائب إذا لدينا $a_k = 3^k - 1$ (1)

0,5 وإذا كذلك $P(k-1)$ صائب إذن لدينا $a_{k-1} = 3^{k-1} - 1$ (2)

$$a_{k+1} = 4(3^k - 1) - 3(3^{k-1} - 1)$$
$$a_{k+1} = 4 \times 3^k - 4 - 3 \times 3^{k-1} + 3.$$
$$a_{k+1} = 3^{k-1}[4 \times 3 - 3] - 1$$
$$a_{k+1} = 3^{k-1} \cdot 3^2 - 1 = 3^{k+1} - 1$$

1 عندئذ نستنتج أنه لكل $n \geq 0$ و $a_n = 3^n - 1$

<u>السؤال الرابع (9 درجات)</u>

(أ) لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ كما يلي : $x \; R \; y \Leftrightarrow |x - y| < 2$.

(i) أكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (درجتان)

2

$$R = \{(-2,-2); (-1,-1); (0,0); (1,1); (2,2); (-2,-1); (-1,-2); (-1,0); (0,-1); (0,1); (1,0); (1,2); (2,1)\}$$

(ii) بيَن فيما إذا كانت العلاقة R , انعكاسية, تناظرية , متعدية أم لا؟ (3 درجات)

1 • R انعكاسية على A لأنها تحتوي على العلاقة القطرية.

• R تناظرية على A لأن $R^{-1} = R$ أي $|x-y| = |y-x|$ و

نعلم أن لكل $x, y \in A$ أيضاً

1

• R ليست متعدية على A لأن

1 $(0,1) \in R$, $(1,2) \in R$ لكن $(0,2) \notin R$

(ب) لتكن مصفوفات العلاقتين R_1 و R_2 المعرفتين على $A = \{1,2,3,4\}$ كالآتي:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أوجد كلا من مصفوفة $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ و $R_2 \circ R_1$. (4 درجات)

1 $$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \oplus M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 $$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 $$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$