اصلاح الاختبار الفصلي الاول
36/37

س1 : (أ)

$$[(p\to q)\vee(q\to r)]\to(p\to \neg r)$$

$$\equiv \neg[(p\to q)\vee(q\to r)]\vee(p\to\neg r)$$

$$\equiv \neg[(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee r)]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv \neg[\neg p\vee(q\vee\neg q)\vee r]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv \neg[\neg p\vee T\vee r]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv \neg[T]\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv F\vee(\neg p\vee\neg r)$$

$$\equiv \neg(p\wedge r)$$

ليست تناقضا (تكلوطة).

(ب)

$$(p\to q)\wedge(p\to r)\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$$

$$\equiv \neg p\vee(q\wedge r)\equiv\neg(q\wedge r)\to\neg p$$

$$\equiv(\neg q\vee\neg r)\to\neg p$$

س٢ الكافي، العكسي:

إذا كان a فردي و b فردي و c فردي فإن $a+b-c$ عدد فردي

ليكن: a فردي و b فردي و c فردي

فإنه يوجد $p,q,r \in \mathbb{Z}$ حيث $b=2q+1, a=2p+1$ و $c=2r+1$

فإن

$$a+b-c=(2p+1)+(2q+1)-(2r+1)$$
$$=2(p+q-r)+1$$

و $p+q-r \in \mathbb{Z}$

فإن $a+b-c$ عدد فردي.

و بالتالي إذا كان $a+b-c$ عدد زوجي فإن a عدد زوجي أو b عدد زوجي أو c عدد زوجي.

(ب) $n \neq 0$ و $\sqrt{5}$ عدد غير كسري.

نفرض أن $\frac{\sqrt{5}}{n}-m$ عدد كسري.

وبما أن m عدد كسري فإن $\frac{\sqrt{5}}{n}=\frac{\sqrt{5}}{n}-m+m$ عدد كسري

وبما أن n عدد كسري فإن $\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{n}\cdot n$ عدد كسري

ونعلم أن $\sqrt{5}$ عدد غير كسري وهذا تناقض

وبالتالي $\frac{\sqrt{5}}{n}-m$ عدد غير كسري إذا علمنا أن m,n عددين كسريين و $n \neq 0$ و $\sqrt{5}$ عدد غير كسري

س 3 (أ): اثبت أن $3 | (4^n - 1)$ لكل $n \geq 0$

الخطوة الاساسية: $n = 0$

$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$ فإن $3 | (4^0 - 1)$

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 0$

نفرض أن $3 | (4^k - 1)$ ونبرهن أن $3 | (4^{k+1} - 1)$

بما أن $3 | (4^k - 1)$ فإنه يوجد $p \in \mathbb{Z}$ حيث

$4^k - 1 = 3p$ فإن $4^k = 3p + 1$

ولدينا $4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4(3p+1) - 1$

$= 12p + 4 - 1 = 12p + 3 = 3(4p+1)$

وبما أن $4p + 1 \in \mathbb{Z}$ فإن $3 | (4^{k+1} - 1)$

النتيجة: $3 | (4^n - 1)$ لكل $n \geq 0$

(ب) $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، $u_1 = \frac{3}{4}$ ، $u_2 = \frac{8}{13}$

و $u_n = \frac{3u_{n-1} + 2u_{n-2}}{5}$ لكل $n \geq 3$

أثبت أن $u_n < 1$ لكل $n \geq 1$

الخطوة الاساسية: $u_1 = \frac{3}{4} < 1$ ، $u_2 = \frac{8}{13} < 1$

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 2$

ونفرض أن $u_1 < 1$ و $u_2 < 1$ و ... ، $u_{k-1} < 1$ ، $u_k < 1$

ونبرهن أن $u_{k+1} < 1$

لدينا: $u_{k+1} = \frac{3u_k + 2u_{k-1}}{5}$ (التعريف الاستقرائي)

ولدينا $u_{k-1} < 1$ ، $u_k < 1$ فإن $2u_{k-1} < 2$ ، $3u_k < 3$

فإن $3u_k + 2u_{k-1} < 5$ وبالتالي $u_{k+1} = \frac{3u_k + 2u_{k-1}}{5} < 1$

النتيجة: $u_n < 1$ لكل $n \geq 1$.

س4

$B=\{2,3,4,5\}$, $A=\{1,2,3,4\}$ (أ)

$a R b \Leftrightarrow a+b=5$

(i) $R=\{(1,4),(2,3),(3,2)\}$

(ii) $Im(R)=\{3,2,4\}$ مدى R , $D_R=\{1,2,3\}$ مجال R :

(iii)

$$M_R=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

(ب) [illegible] $C=\{x,y,z\}$ $S=\{(x,y),(x,z),(y,x),(z,y)\}$

(i) $S^{-1}=\{(y,x),(z,x),(x,y),(y,z)\}$

$S-S^{-1}=\{(x,z),(z,y)\}$

(ii) $S^2=SoS=\{(x,x),(x,y),(y,y),(y,z),(z,x)\}$