جامعة الملك سعود	الإ متحان النهائي للمقرر (209) ريض	الإثنين 1438/4/25هـ
كلية العلوم	قسم الرياضيات –الفصل الأول-1438/1437هـ	الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول (8) : أ) برهن أن المتسلسلة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right]$ متقاربة وما هو مجموعها؟.

ب) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2} \ ، \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+2}} \ ، \ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+3} \ ، \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+2^n}{n!} .$$

السؤال الثاني (7) : أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x)=\frac{1}{2-x}$ ثم استنتج متسلسلة القوى في x للدالة $g(x)=\frac{x}{(2-x)^2}$ ، وماهي فترة تقاربها؟.

ب) أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى في x : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2 3^n}$.

السؤال الثالث (10) : أ) أوجد متسلسلة فوريية للدالة $f(x)=x$ على الفترة $(0,2\pi)$ ، حيث

$f(x+2\pi)=f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$. عند $x=\frac{\pi}{2}$، استنتج أن متسلسلة فوريية تحقق العلاقة

التالية $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ ، (استفد من العلاقة $\sin(\frac{2n-1}{2}\pi)=(-1)^{n-1}$)

ب) أوجد تكامل فوريية للدالة : $f(x)=\begin{cases}-2 & ,-1\le x<0\\ 1 & ,0<x\le 1\\ 0 & ,x<-1, x>1\end{cases}$

ثم استنتج أن قيمة تكامل فوريه عند x=0 تحقق العلاقة التالية : $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$.

السؤال الرابع (15) : أ) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$ydx + x\left[\ln(\frac{x}{y}) - 1\right]dy = 0$ ، حيث $x > 0, y > 0, x \neq y$.

ب) برهن أن المعادلة التفاضلية التالية :

$(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$ تامة ثم أوجد حلها.

ج) أوجد حل المسألة التفاضلية التالية :

$$\begin{cases} (x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x} \ , x > -1 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

السؤال الأول: (8)

أ)

$$a_n = 2\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = 2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \to 2$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

$(1\frac{1}{2})$

هندسية $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots + \dots = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{-1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}}$

$a = \frac{-1}{2},\quad r = \frac{-1}{2}$ $\qquad = \frac{-1}{3}$

$(1\frac{1}{2})$

متقاربة $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{-1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$

ب) 1) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ متقاربة، $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ $\quad x \geq 2$

(1) f متصلة + $f' < 0$ + موجبة ∴ نستخدم اختبار التكامل

$$I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{l\to\infty} \int_2^{l} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{l\to\infty}\left[\frac{-1}{(\ln l)} + \frac{1}{\ln 2}\right]$$ متقارب

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

---

2) (1) $\sum_{1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+2}}\right| \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},\quad P = \frac{3}{2} > 1$

متقاربة

∴ $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+2}}$ متقاربة مطلقة وأيضاً متقاربة حسب اختبار المقارنة

---

3) بما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$ إذاً $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+3}$ متباعدة (1)

---

4) $\sum_{0}^{\infty} \frac{5}{n!}$ متقاربة باستخدام اختبار النسبة

$\sum_{0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ = = = بالنسبة

(2) $\Leftarrow$ متقاربة $\sum_{0}^{\infty} \frac{5}{n!} + \frac{2^n}{n!}$

$$= \sum \frac{5}{n!} + \sum \frac{2^n}{n!} = 5e + e^2$$

السؤال الثاني: (أ)

(2) $f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^{n+1}}, \quad |x|<2$

(2) $f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$

$g(x)=\frac{x}{(2-x)^2}=\sum_{0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^{n+1} \qquad |x|<2$

(ب) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2 3^n}$

(3) $\lim\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{n^2 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{|x|}{3}=\frac{|x|}{3}<1$

المتسلسلة متقاربة لكل $x\in\mathbb{R}$ تحقق $|x|<3$ ⇐ $\boxed{x\in(-3,3)}$

عندما $x=3$ ⇐ $\frac{1}{2}$ $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة مطلقا ومتقاربة حسب المتناوبة

عندما $x=-3$ ⇐ $\frac{1}{2}$ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة $(p=2>1)$

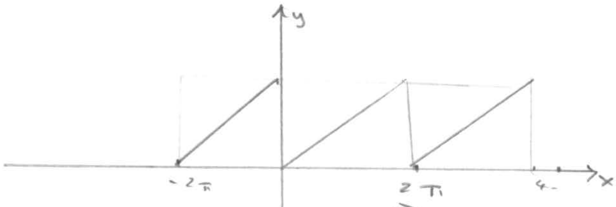
لذا فترة التقارب هي $\boxed{I=[-3,3]}$ ، ونصف قطر التقارب $r=3$

السؤال الرابع: (أ)

(5) + (1)

$\frac{n\pi x}{T}$ $\frac{n\pi x}{\frac{L}{2}}$

$L=2\pi=$



(1)

$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$

(1) $=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}$

$=\frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{2}=2\pi$

(2) $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\cos(nx)\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[\cancel{x\frac{\sin nx}{n}}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(xn)}{n}dx=\frac{1}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{2\pi}=0$

(1) $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\frac{-1}{\pi}\left[\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx$

$=\frac{-2}{n}+\frac{1}{\pi n^2}\left[\sin nx\right]_0^{2\pi}=\frac{-2}{n}$

(1) $f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=x=\pi-\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx) \qquad 0<x<2\pi$

At $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=\pi-\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)=(-1)^{n-1}$

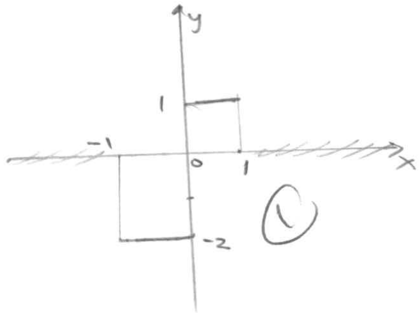
(1) $-\frac{\pi}{2}=-\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)=-\sum_{1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$

منه

$\boxed{\frac{\pi}{4}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}$

$(5+)$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$



(1)

$$= \int_{-1}^{0} (-2)\cos(\alpha x)\,dx + \int_{0}^{1} (1)\cos(\alpha x)\,dx$$

$\left(1\tfrac{1}{2}\right)$

$$= -2\left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_{0}^{1} = -2\left(0 - \frac{\sin(-\alpha)}{\alpha}\right) + \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$= -2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \frac{\sin\alpha}{\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \int_{-1}^{0}(-2)\sin\alpha x\,dx + \int_{0}^{1}(1)\sin\alpha x\,dx$$

$\left(1\tfrac{1}{2}\right)$

$$= +2\left[\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right]_{0}^{1} = +2\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right) - \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha}$$

$$= \boxed{\frac{3(1-\cos\alpha)}{\alpha}}$$

(1) $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos(\alpha x) + 3\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)\sin\alpha x\right]d\alpha \qquad x\in\mathbb{R}$$

عند $x=0$

(1) $$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

السؤال الرابع: (1

معادلة متجانسة $\quad y\,dx + x\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right]dy = 0 \qquad x>0,\ y>0,\ \frac{x}{y}\neq 1$

$$dx + \frac{x}{y}\left[\ln(x/y) - 1\right]dy = 0. \qquad \frac{x}{y} = u \Rightarrow x = yu$$

(2) $dx = y\,du + u\,dy$

(1) $$y\,du + u\,dy + u(\ln u - 1)\,dy = 0 \Rightarrow y\,du + u\ln u\,dy = 0$$

(3)

$$\frac{du}{u\ln u} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln|\ln u| + \ln|y| = c$$

$$\boxed{\ln\left|\ln\frac{x}{y}\right| + \ln|y| = c}$$

$$\ln\left(|y|\left|\ln\frac{x}{y}\right|\right) = c$$

$$y\left|\ln\frac{x}{y}\right| = e^{c}$$

تبسيط الجواب (غير ضروري)

$$y\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \mp e^{c} = c_1 \Rightarrow \boxed{y\ln\left(\frac{x}{y}\right) = c_1}$$

ب

$$\underbrace{(3x^2y+e^y)}_{M}dx+(\underbrace{x^3+xe^y-2y}_{N})dy=0$$

إذاً المعادلة تامة $\quad \frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+e^y=\frac{\partial N}{\partial x}$ 2

معنى توجد دالة F في x و y بحيث يكون

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+e^y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=x^3+xe^y-2y$$

$$F=\int(3x^2y+e^y)dx=x^3y+xe^y+\phi(y)$$

3

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\cancel{x^3}+\cancel{xe^y}+\phi'(y)=\cancel{x^3}+\cancel{xe^y}-2y$$

$$\phi(y)=-y^2+c$$

إذاً حل المعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{F(x,y)=x^3y+xe^y-y^2+c=0}$$

أ

$$\begin{cases}(x+1)y'+(x+2)y=2xe^{-x}; & x>-1\\ y(0)=1\end{cases}$$

$$y'+\frac{x+1+1}{x+1}y=\frac{2x}{x+1}e^{-x}; \quad x>-1$$

$$y'+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)y=\frac{2x}{(x+1)}e^{-x}$$

2

$$\mu(x)=e^{\int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx}=e^{x+\ln(x+1)}=(x+1)e^x$$

$$y\,\mu(x)=(x+1)e^xy=\int\frac{2x}{\cancel{(x+1)}}\cancel{e^{-x}}\cdot\cancel{(x+1)}\cancel{e^x}\,dx$$

$$=\int 2x\,dx=x^2+C$$

2

إذاً الحل العام هو

$$\boxed{(x+1)e^xy=x^2+C}$$

وبتطبيق الشرط $y(0)=1$ نجد

$$(1+0)(1)(1)=0+C \Rightarrow C=1$$

1

إذاً حل المعادلة التفاضلية هو

$$\boxed{(x+1)e^xy=x^2+1}$$