س 2 : 36/37 العمل الأول

$f(x,y) = xy$, المنحنى $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$

طريقة 1 : باستعمال لاجرانج

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda 8x \\ x = \lambda 2y \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 8\lambda x \\ x = 2\lambda(8\lambda x) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 8\lambda x & (1) \\ x(1 - 16\lambda^2) = 0 & (2) \\ g(x,y) = 0 & (3) \end{cases}$$

في المعادلة 2 :

$$x(1 - 16\lambda^2) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{x = 0 \text{ أو } \lambda = \frac{1}{4} \text{ أو } \lambda = -\frac{1}{4}}$$

$\boxed{x=0}$

$y=0$ فإن

$g(0,0)=-4\neq 0$

وبالتالي $(0,0)$ ليست حل:

$\boxed{\lambda=\frac{1}{4}}$

$y=2x$ فإن

وبالتالي: $g(x,2x)=4x^2+(2x)^2-4=0$

$\Leftrightarrow 8x^2=4 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

فإنه لدينا النقاط: $\boxed{\lambda=\frac{1}{4},\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)}$

فإن $f(x,y)=1$ لهذه النقطتين

$\boxed{\lambda=-\frac{1}{4}} \Rightarrow y=-2x$ فإن

$g(x,-2x)=4x^2+(-2x)^2-4=0$ فإن

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

وبالتالي لدينا النقاط: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$ ، $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$

و $f(x,y)=-1$ لهذه النقطتين

(x,y)	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$
$f(x,y)$	1	1	-1	-1

فإن: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة f

حسب القيد $4x^2+y^2-4=0$

و $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)=-1$ هي القيمة الصغرى المطلقة

للدالة f حسب القيد $4x^2+y^2-4=0$

طريقة 2:

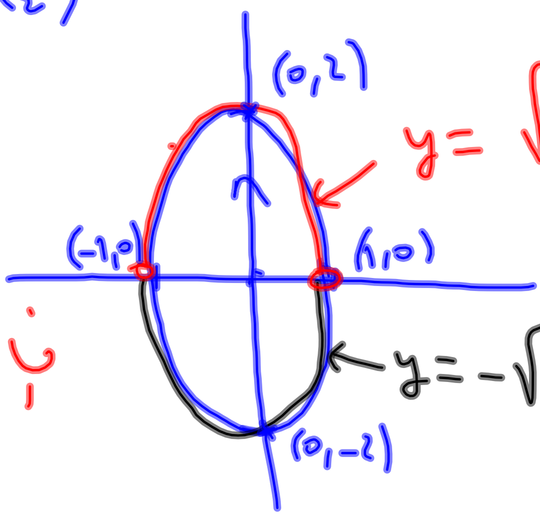
$g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

x	0	0	1	-1
y	2	-2	0	0

$y = 2\sqrt{1-x^2}$ [illegible]

$f(x,y) = 2x\sqrt{1-x^2}$ [illegible]



$y = \sqrt{4-4x^2} = 2\sqrt{1-x^2}$

$y = -\sqrt{4-4x^2} = -2\sqrt{1-x^2}$

(x,y)	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$
$f(x,y)$	1	1	0	0	0	-1	-1

$$I = \iint_R (4xy + 3y^2)\, dA$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (4xy + 3y^2)\, dy \right) dx$$

$$\left(= \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4xy + 3y^2)\, dx \right) dy \right)$$

$$= \int_0^2 2xy^2 + y^3 \Big]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(2x(2x)^2 + (2x)^3\right) - \left(2x(x^2)^2 + (x^2)^3\right) \right] dx$$

$$= \int_0^2 (\underbrace{8x^3 + 8x^3} - 2x^5 - x^6)\, dx$$

$$= 4x^4 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{x^7}{7} \Big]_0^2 = 64 - \frac{64}{3} - \frac{128}{7}$$

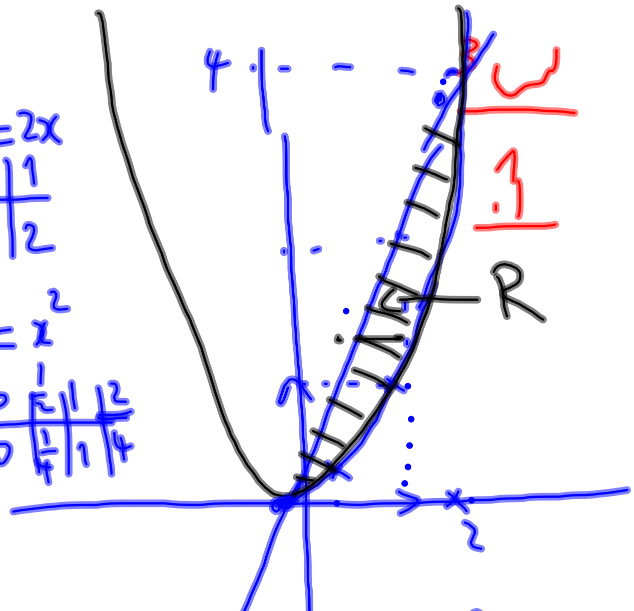
$$= \frac{512}{21}$$

$y = 2x$

x	0	1
y	0	2

$y = x^2$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	0	$\frac{1}{4}$	1	4



$y = 2x$

$$x^2 = 2x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \,;\; x = 2$$

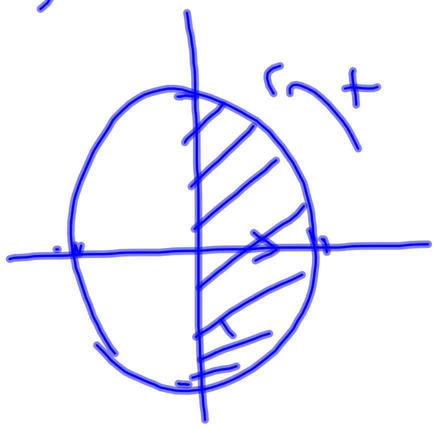
.2

$$I = \iint_R \frac{1}{x^2+y^2+2}\, dA$$

$$R = \{(x,y):\ x \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$R = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$x^2+y^2=4=2^2$



$$I = \iint_R \frac{1}{x^2+y^2+2}\, dA$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^2+2} 2r\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2r}{r^2+2}\, \theta \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2r}{r^2+2}\pi\, dr = \frac{\pi}{2} \ln(r^2+2)\Big]_0^2$$

$$I = \frac{\pi}{2}(\ln 6 - \ln(2)) = \frac{\pi}{2}\ln(3)$$

س1

$$f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 + 6y$$

(1) (x,y) نقطة حرجة للدالة f فإن

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(f دالة لها مشتقات أولى جزئية متصلة عند كل نقطة)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

فإن $(3,-3)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للدالة f .

.2

لدينا:
$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

إذن: $g(x,y)=\det H_f(x,y)=4>0$

إذن: $g(3,-3)=4>0$

و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-3)=2>0$

إذن: $f(3,-3)=-18$ هي القيمة الصغرى المحلية للدالة f عند النقطة $(3,-3)$.

.3
$$h(x,y)=f(x,y)-f(3,-3)=x^2-6x+y^2+6y-(-18)$$
$$=(x^2-6x+9)+(y^2+6y+9)=(x-3)^2+(y+3)^2$$

.4 لدينا $h(x,y)=(x-3)^2+(y+3)^2$

و $h(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2$

فإذن $a=3,\ b=-3$

.5 لدينا لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، $f(x,y)=h(x,y)+f(3,-3)$

إذن $f(x,y)=(x-3)^2+(y+3)^2-18$

و لدينا $(x-3)^2+(y+3)^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن: $f(x,y)\geqslant -18=f(3,-3)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن: $f(3,-3)=-18$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند النقطة $(3,-3)$.

س2: الفصل الاول 35/34

$$f(x,y) = x^4 + 2y^2 + 2x^2y - 2x^2 - 2y$$

1. بيان أن f دالة لها مشتقات أولى جزئية متصلة.

بيان النقاط الحرجة الوحيدة تحقق الشرط: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

بيان:

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy - 4x = 0 \\ 4y + 2x^2 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x(x^2 + y - 1) = 0 \\ x^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \text{ أو } x^2 + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x^2 + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

بيان $(1,0)$ و $(-1,0)$ و $(0,\frac{1}{2})$ هي النقاط الحرجة الوحيدة للدالة f

.2

بأن:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2+4y-4 & 4x \\ 4x & 4 \end{bmatrix}$$

$$g(x,y) = \det H_f(x,y) = 16\left[(3x^2+y-1)-x^2\right]$$
$$= 16(2x^2+y-1)$$

عند النقطة $(0,\frac{1}{2})$: لدينا : $g(0,\frac{1}{2}) = 16(-\frac{1}{2}) = -8 < 0$

بأن النقطة $(0,\frac{1}{2})$ هي نقطة سرجية للدالة f .

عند النقطة $(1,0)$ و $(-1,0)$ لدينا : $g(1,0) = g(-1,0) = 16 > 0$

ولدينا : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 8 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = 8$

بأن $f(1,0) = f(-1,0) = -1$ هي قيمة صغرى كلية للدالة f عند النقطتين $(1,0)$ و $(-1,0)$.

$$f(x,y)-f(1,0)=x^4+2y^2+2x^2y-2x^2-2y+1=h(x,y)$$ .3

.4 لنبين أن:

$$(x^2-1+y)^2+y^2=x^4+1+y^2-2x^2+2x^2y-2y+y^2$$

$$=x^4+2y^2+2x^2y-2x^2-2y+1=f(x,y)-f(1,0)=h(x,y)$$

بالتالي: لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $h(x,y)=f(x,y)-f(1,0)=(x^2-1+y)^2+y^2$

.5 لدينا: $(x^2-1+y)^2+y^2\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن $f(x,y)-f(1,0)\geq 0$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

و بالتالي $f(x,y)\geq f(1,0)$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن $f(1,0)=-1$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند $(1,0)$

نلاحظ: أن $h(x,y)=k(x,y)=f(x,y)-f(-1,0)$

و بالتالي $f(-1,0)=-1$ هي قيمة صغرى مطلقة للدالة f عند $(-1,0)$

أخيرا: القيم القصوى (صغرى) المحلية هي قيم قصوى (صغرى) مطلقة

نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x,0)=\lim_{x\to+\infty} x^4-2x^2=\lim_{x\to+\infty} x^4\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$

$=+\infty$

فإنه لا يوجد قيمة عظمى مطلقة للدالة f