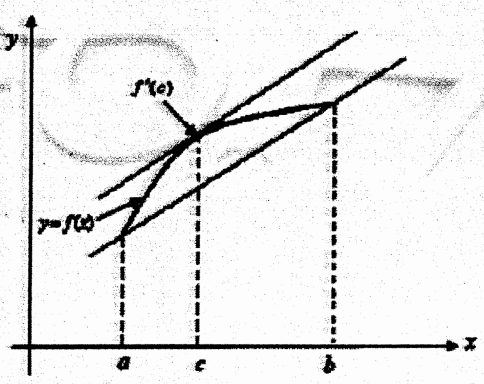
التحليل العددي



تأليف

أ.د. عيسى بن عبدالله السعيد

(٢,١٠) تمارين

Exercises

١- أثبت أن للمعادلة $\ln x - x + 1.5 = 0$ حل وحيد في الفترة $[2,3]$. ثم استخدم طريقة التنصيف لحساب التقريب الرابع، x_4، ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي حصلت عليه.

٢- استخدم طريقة التنصيف لإيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي $\sqrt[3]{16}$ بدقة 5×10^{-2}.

تلميح: ضع $f(x) = x^3 - 16$].

٣- استخدم طريقة التنصيف لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} لمعكوس العدد $\mu = 3$.

تلميح: ضع $f(x) = \frac{1}{x} - 3$].

٤- اعتبر استخدام طريقة التنصيف لإيجاد حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5} للمعادلة $x - 5^{-x} = 0$ على الفترة $[0,1]$ أوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على هذا الحل. قارن العدد الذي تحصل عليه مع العدد العملي (الفعلي) الذي تطلّب في تمرين ١ من قائمة تمارين الحاسب.

٥- اعتبر المعادلة الموجودة في مثال (١,٢) على الفترة $[1,3]$. اوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي بدقة 5×10^{-6}. ثم استخدم طريقة التنصيف لحساب هذا الحل. ماذا تلاحظ ؟ ماذا يمكنك أن تستنتج من هذا التمرين والتمرين ٤ ؟ .

٦- استخدم طريقة الوضع الخاطئ لإيجاد الحل التقريبي x_n للمعادلة $\ln x - x + 1.5 = 0$ في الفترة $[2,3]$ والذي يحقق $|f(x_n)| \le 10^{-2}$.

٧- أوجد قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} للجذر التكعيبي $\sqrt[3]{16}$ وذلك باستخدام طريقة الوضع الخاطئ قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٢.

٨- استخدم طريقة الوضع الخاطئ لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} لمعكوس العدد $\mu = 3$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٣.

٩- أحد الطرائق المطورة لطريقة الوضع الخاطئ هي ما تسمى بطريقة الوضع الخاطئ المعدلة و التي يمكن تلخيصها فيما يلي: لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بحيث إن $f(a)f(b)<0$. ضع $a_0 = a$ ، $b_0 = b$ ، $p = f(a_0)$ ، $q = f(b_0)$ و $x_0 = a_0$. من أجل $n = 0,1,2,\cdots$ حتى يتحقق المطلوب، عمل ما يلي:

احسب $$x_{n+1} = \frac{qa_n - pb_n}{q-p}$$

إذا كان $f(a_n)f(x_{n+1})<0$ ضع $a_{n+1} = a_n$ ، $b_{n+1} = x_{n+1}$ و $q = f(x_{n+1})$.

وإذا كان أيضاً $f(x_n)f(x_{n+1})>0$ فضع $p = \dfrac{p}{2}$.

وإلا فضع $a_{n+1} = x_{n+1}$ ، $b_{n+1} = b_n$ و $p = f(x_{n+1})$

وإذا كان أيضاً $f(x_n)f(x_{n+1})>0$ ، ضع $q = \dfrac{q}{2}$.

استخدم الطريقة الموضحة أعلاه لإيجاد حل للمعادلة $x^2 - x - 2 = 0$ في الفترة $[1.5,3]$ و يحقق الشرط $|x_{n+1} - x_n| < 5\times10^{-3}$. قارن النتائج التي تحصل عليها مع نتائج المثالين (٢,١) و (٢,٤).

١٠- لتكن $f(x) = (x-\sqrt{2})^5$ ، من الواضح أن العدد $\alpha = \sqrt{2}$ حلاً للمعادلة $f(x) = 0$. أثبت أنه لا يمكننا استخدام المتباينة $|f(x_n)| < 5\times10^{-5}$

كشرط لإيقاف حساب عناصر المتتالية $\{x_n\}$ والمعرفة بـ $x_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n}$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى الحل α.

١١- لتكن α حل للمعادلة $f(x) = 0$ و x_n حل تقريبي لهذه المعادلة. أثبت المتباينة (2.11).

١٢- للمعادلة $(x-\sqrt{2})^{\frac{1}{5}} = 0$ حل وحيد في الفترة $[1,2]$. وضح بالتفصيل أنه قد تنشأ بعض الصعوبات الناتجة من استخدام شرط الوقوف (2.8).

تلميح: استنتج أن $|f'(\eta)| >> 1$ لكل $\eta \in (\alpha, x_n)$].

١٣- أثبت أنه يوجد نقطة ثابتة وحيدة لكل من الدوال التالية في الفترة المشار إليها:

أ) $g(x) = \sqrt[4]{4x+2}$ ، $[1,2]$.

ب) $g(x) = \ln(\frac{1}{3}(5 - x(3-x)))$ ، $[0,1]$.

جـ) $g(x) = x^2 \ln(x)$ ، $[1,2]$.

١٤- لتكن $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}e^{-x} - 2$ و $g(x) = \sqrt{\frac{4-e^{-x}}{2}}$ من أجل $x \in [1,2]$. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد حلاً تقريبياً للمعادلة غير الخطية $x^2 + \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0$ بدقة 5×10^{-2}.

١٥- ليكن لدينا المعادلة غير الخطية $x^4 - 4x - 2 = 0$ اعتبر استخدام طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل هذه المعادلة في الفترة $[1,2]$.

أ) أوجد صيغة تكرارية مناسبة لحل هذه المسألة.

ب) استخدم الصيغة التكرارية التي أوجدتها في الفقرة (أ) لحساب الحل التقريبي x_3 وذلك بوضع $x_0 = 1$. ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بهذا التقريب.

١٦- للدالة $g(x) = 4 - 6/x^2$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة [3,4]. احسب عدد التكرارات اللازمة للحصول على قيمة تقريبية لهذه النقطة بدقة 5×10^{-5} وذلك بوضع $x_0 = 3$. قارن عدد التكرارات التي حسبتها والعدد الفعلي الذي نتج من حل المسألة في التمرين ٣ من تمارين الحاسب. ماذا تلاحظ ؟.

١٧- أثبت أنه يوجد نقطة ثابتة وحيدة للدالة $g(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ في الفترة [0.5,0.5-]، ولكننا لا نستطيع ضمان تقارب الصيغة التكرارية $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{x_n + 1}$، $n \ge 0$ إلى هذه النقطة.

١٨- يوجد للمعادلة $x^2 - 3x - e^x + 5 = 0$ حل وحيد في الفترة [1,2]. أثبت أنه لا يمكن ضمان تقارب الصيغة التكرارية $x_n = \sqrt{3x_{n-1} + e^{x_{n-1}} - 5}$، $n \ge 1$ إلى حل هذه المعادلة. اكتب صيغة تكرارية مناسبة لحل هذه المعادلة، ثم استخدمها لحساب التكرار الرابع. أوجد حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه.

١٩- اعتبر إيجاد حل للمعادلة $ax^2 - e^x = 0$، حيث إن $a > 0$ عدد حقيقي، في الفترة [3,4] وذلك باستخدام الصيغة التكرارية $x_{n+1} = \ln(ax_n^2)$، من أجل $n \ge 0$:

أ) أوجد أصغر قيمة لـ a بحيث إن الصيغة التكرارية المذكورة تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة.

ب) استخدم الصيغة التكرارية وقيمة a التي أوجدتها لحساب التكرار الثاني وذلك ابتداء من $x_0 = 3.5$، ثم احسب حدا أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه.

٢٠- اعتبر الصيغتين التكراريتين التاليتين:

$(i)\ \ x_n = 0.5\sqrt{8 - x_{n-1}^3}$ $\qquad$ $(ii)\ \ x_n = 2\sqrt{2/(4 + x_{n-1})}$

من أجل $n \geq 1$، لحل المعادلة $x^3 + 4x^2 - 8 = 0$ في الفترة $[1,1.5]$. حدد الصيغة الأفضل لحساب جذر هذه المعادلة. أسند إجابتك بالإثبات.

٢١- ادرس تقارب المتتاليتين التاليتين:

$$(i)\ x_{n+1} = x_n + 1 - \frac{x_n^2}{5} \qquad (ii)\ x_{n+1} = \frac{1}{3}[3x_n + 1 - \frac{x_n^2}{5}]$$

واللتان تتقاربان إلى العدد $\alpha = \sqrt{5}$. حدد أي الصيغتين يكون تقاربها أسرع.

٢٢- أثبت أن النظرية (٢,٢) تكون صحيحة إذا استبدلنا الشرط الثاني بالشرط $g'(x) < 1$.

٢٣- أثبت أن تقارب المتتالية المعرفة في نظرية النقطة الثابتة لا يكون مضمون إذا أُستبدِل الشرط الثاني بالشرط المذكور في التمرين ٢٢.

٢٤- أثبت النظرية (٢,٥).

تلميح: لإثبات ذلك لاحظ أنه من اتصال $g'(x)$ والشرط $|g'(\alpha)| < 1$ يكون لدينا: $|x - \alpha| \leq c \Rightarrow |g'(x) - g'(\alpha)| \leq \dfrac{1 - |g'(\alpha)|}{2}$ حيث إن $c > 0$.
ادرس الدالة $g(x)$ (وبالتحديد حجم $g'(x)$) على الفترة $[\alpha - c, \alpha + c]$].

٢٥- استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب التقريب الثاني x_2 لحل المعادلات التالية وذلك ابتداء من التقريب المرافق لكل حالة:

أ) $x^3 - x - 1 = 0$، ضع $x_0 = 1$.

ب) $e^x = 3$، ضع $x_0 = 3$.

٢٦- استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} لنقطة تقاطع المنحنيين $y = \ln(x+2)$ و $y = e^{-x}$.

٢٧- اثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن-رافسون لإيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب A يمكن أن تكتب بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}), \qquad n \geq 0$$

ثم استخدم هذه الصيغة لحساب التقريب الثاني، x_2، للجذر $\sqrt{2}$ وذلك بوضع $x_0 = 1$. ما هو الخطأ الفعلي للتقريب الذي تحصل عليه.

٢٨- اثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن-رافسون لإيجاد قيمة تقريبية للجذر $\sqrt[m]{A}$، $A > 0$ عدد حقيقي يمكن كتابته بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}[(m-1)x_n + \frac{A}{x_n^{m-1}}], \qquad n \geq 0$$

استخدم هذه الصيغة لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} للجذر $\sqrt[4]{2}$ وذلك بوضع $x_0 = 1$.

٢٩- أوجد صيغة تكرارية لإيجاد المعكوس الضربي لعدد ما μ، حيث إن $\mu \neq 0$، وذلك باستخدام طريقة نيوتن-رافسون. ثم أثبت أنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n(2 - \mu x_n), \; n \geq 0$$

تلميح: اعتبر $f(x) = \frac{1}{x} - \mu$.

٣٠- أثبت أن الصيغة التكرارية الموجودة في التمرين السابق تكون مضمونة التقارب لأي اختيار ابتدائي $x_0 \in (\frac{1}{2\mu}, \frac{3}{2\mu})$.

٣١- اعتبر الصيغة التكرارية $n \geq 0$، $x_{n+1} = \sqrt{\frac{4 - e^{-x_n}}{2}}$. أوجد المعادلة غير الخطية التي تمثلها هذه الصيغة ثم استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب حلاً عددياً لهذه المعادلة بدقة 5×10^{-2} وذلك ابتداء من $x_0 = 1$.

٣٢- استخدم طريقة القاطع لحساب التقريب x_3 لحل المعادلات التالية وذلك ابتداء من الحلين التقريبيين المرافقين لكل معادلة:

أ) $x^3 - x - 1 = 0$، ضع $x_0 = 0.5$، $x_1 = 1$.

ب) $e^x = 3$، ضع $x_0 = 3$، $x_1 = 2$.

٣٣- استخدم طريقة القاطع لإيجاد الحل التقريبي x_n للمعادلة $e^x - 3x^2 = 0$ والذي يحقق $|f(x_n)| < 10^{-2}$ وذلك بوضع $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$.

٣٤- اثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة القاطع لإيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب A يمكن أن تكتب بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{(x_n x_{n-1} + A)(x_n - x_{n-1})}{x_n^2 - x_{n-1}^2}, \qquad n \geq 1$$

ثم استخدم هذه الصيغة لحساب التقريب الثالث، x_2، للجذر $\sqrt{2}$ وذلك بوضع $x_0 = 1$. ما هو الخطأ الفعلي للتقريب الذي تحصل عليه.

٣٥- أثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة القاطع لتقريب الجذر $\sqrt[N]{C}$، حيث إن $C > 0$ عدد حقيقي، يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} x_n (x_{n+1}^{N-1} - x_n^{N-1}) + C(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1}^N - x_n^N}$$

من أجل $n \geq 0$.

٣٦- استخدم طريقة ستفنسن لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 10^{-5}$ للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$. قارن النتائج التي تحصل عليها بتلك الموجودة في المثالين (٢,١٧) و (٢,١٨).

٣٧- أثبت أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = \frac{1}{n^2}$، $n \geq 1$ تتقارب خطياً إلى الصفر.
ما هي قيمة n التي تحقق $|x_n - \alpha| \leq 5 \times 10^{-3}$.

٣٨- أثبت أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = 10^{-2^n}$، $n \geq 1$ تتقارب تربيعياً إلى الصفر.

٣٩- ما هو معدل التقارب للصيغة التكرارية $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى العدد $\alpha = 2$.

٤٠- أوجد معدل التقارب للصيغة التكرارية $x_n = \frac{1}{2}[x_{n-1} + \frac{C}{x_{n-1}}]$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى العدد $\sqrt{C}$ ، حيث إن C عدد حقيقي موجب.

٤١- اعتبر الصيغة التكرارية $x_{n+1} = 0.5cx_n + 4.5dx_n^{-1}$ ، $n \geq 0$ ، حيث إن c و d عدديين حقيقيين، والتي تتقارب إلى العدد $\alpha = 3$. أوجد قيم c و d التي تجعل معدل التقارب يكون تربيعياً.

٤٢- أثبت المعادلة (2.41).

٤٣- الصيغة التكرارية لطريقة هالي يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)[1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}]}$$

لكل $n \geq 0$. أثبت أنه يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة هالي لإيجاد الجذر التربيعي للعدد A ، حيث إن $A > 0$ عدد حقيقي، بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3Ax_n}{3x_n^2 + A}, \qquad n \geq 0$$

ثم أثبت أن معدل تقارب هذه الصيغة يكون أسرع من تربيعي. قارن هذه الصيغة مع صيغة نيوتن-رافسون.

٤٤- أوجد معدل التقارب لطريقة الوضع الخاطئ.

٤٥- ليكن لدينا المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ بحيث إن $f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) \neq 0$.

اعتبر الصيغة التكرارية $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ حيث إن $g(x) = x - h(x)f(x)$

و $h(x)$ دالة عشوائية. استخدم نظرية (٢,٨) لاستنتاج طريقة نيوتن-رافسون كطريقة تربيعة التقارب.

٤٦- أثبت أن $\alpha = 0$ جذر مكرر للمعادلة $x = \ln(x+1)$. ثم استخدم طريقة نيوتن- رافسون والصيغة التكرارية (2.36) لإيجاد حلاً تقريبياً لهذه المعادلة بدقة 5×10^{-2}، وذلك بوضع $x_0 = 1$. قارن النتائج العددية ماذا تلاحظ؟.

٤٧- أثبت أن $\alpha = 1$ جذر مكرر للمعادلة $x^3 - 3x + 2 = 0$. ثم استخدم طريقة نيوتن-رافسون و الصيغة التكرارية (2.37) لإيجاد حلاً تقريبياً لهذه المعادلة بدقة 5×10^{-2}، وذلك بوضع $x_0 = 1.5$. قارن النتائج العددية ماذا تلاحظ؟.

٤٨- أثبت النظرية (٢,١٠).

٤٩- ليكن α جذراً مكررا m مرة $(m > 1)$ للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. أثبت أن طريقة نيوتن-رافسون تكون خطية التقارب في هذه الحالة.

٥٠- ليكن $f(x) = (x-\alpha)^m q(x)$ حيث إن $\lim\limits_{x\to\alpha} q(x) \neq 0$ و α جذر مكرر m مرة للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. أثبت صحة المعادلة (2.44).

٥١- ليكن للدالة $f(x)$ جذر مكرر عند α. أثبت أن للدالة $h(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ جذر بسيط عند α. ومن ثم أثبت أن معدل تقارب الصيغة التكرارية (2.46) يكون تربيعياً.

٥٢- المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ والمعرفة بـ $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ ، $n \geq 0$ تتقارب خطياً إلى العدد $\alpha = 2$. استخدم طريقة إيتكن Δ^2 لإيجاد عناصر المتتالية $\{\hat{x}_n\}$. أوقف العمليات الحسابية إذا تحقق الشرط $\dfrac{|\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}|}{|\hat{x}_n|} \leq 10^{-3}$. قارن سرعة تقارب التي تحصل عليها مع تلك التي حصلنا عليها في مثال (٢,٢٦). هل هي أسرع؟ ولماذا؟.

تلميح: احسب الثابت s.

٥٣- استخدم طريقة هورنر لحساب $p(-1)$ و $p'(-1)$ حيث إن:

$$p(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$$

٥٤- استخدم طريقة هورنر لحساب $p(3)$، $p'(3)$ و $p''(3)$ إذا كانت:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x1 + 12$$

٥٥- استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} لجذر كثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 4x + 2$ الذي يقع بجوار العدد 1.5 وذلك باستخدام طريقة هورمر لحساب $p(x_n)$ و $p'(x_n)$ عند كل تكرار $n \geq 0$.

٥٦- اعتبر كثيرتي الحدود.

أ) $p(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x - 6$

ب) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

احسب التكرارين الأولين لطريقة برستو وذلك بوضع $r_0 = s_0 = 1$.

تمارين للحاسب

ح١ – استخدم الخوارزمية (٢,١) لكتابة برنامج للحاسب الآلي باللغة التي تريد، ثم استخدم هذا البرنامج لحل المعادلة $x - 5^{-x} = 0$ في الفترة $[0,1]$. احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5}.

ح٢ – استخدم الخوارزمية (٢,٢) لكتابة برنامج للحاسب الآلي باللغة التي تريد، ثم استخدم هذا البرنامج لحل المعادلة $x - 5^{-x} = 0$ في الفترة $[0,1]$. احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5}.

ح٣ – استخدم طريقة التنصيف لحل المسالة الواردة في التمرين ١٠ وذلك باستخدام الشرطين $|f(x_n)| < 5\times10^{-5}$ و $|x_n - x_{n-1}| < 5\times10^{-5}$ لوقف

الحسابات. أطبع كل من n، x_n، $f(x_x)$ و $|x_n - x_{n-1}|$. قارن عدد التكرارات اللازمة لكل حالة، ماذا تلاحظ؟.

ح٤ – أعد التمرين ٣ بالنسبة للمسألة الموجودة في التمرين ١٢.

ح٥ – استخدم الخوارزمية (٢,٣) لكتابة برنامج للحاسب الآلي باللغة التي تريد، ثم استخدم هذا البرنامج لحل المعادلة $x^3 - 4x^2 + 6 = 0$ وذلك باستخدام الصيغة التكرارية $x_{n+1} = 4 - 6/x_n^2$، $n \geq 0$ حيث إن $x_0 = 3$. احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5}.

ح٦ – للمعادلة $x^3 + 4x^2 - 8 = 0$ حل وحيد في الفترة $[1,2]$. أكتب ثلاث صيغ تكرارية لإيجاد هذا الحل، ثم استخدام طريقة تكرار النقطة الثابتة لحساب قيمة تقريبية للحل بدقة 5×10^{-5}. قارن النتائج التي تحصل عليها ثم اكتب ملاحظاتك.

ح٧ – استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب حلاً تقربياً بدقة $\varepsilon = 5\times10^{-6}$ للمعادلة غير الخطية $e^x - 3 = 0$ ذلك ابتداء من $x_0 = 3$. قارن القيمة الفعلية بالتقريبية حتى تسعة أرقام عشرية، أي احسب $|x_n - \alpha|$ لكل $n \geq 1$.

ح٨ – أعد التمرين السابق باستخدام طريقة القاطع وذلك بوضع $x_0 = 3$، $x_1 = 2$.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين السابق. ماذا تلاحظ؟.

ح٩ – استخدم طريقة هالي (انظر التمرين ٤٣) لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 5\times10^{-6}$ للمعادلة $e^x - 3 = 0$ وذلك ابتداء من $x_0 = 3$. احسب الخطأ $|x_n - \alpha|$ لكل $n \geq 1$.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها بحل التمرين ح٧. ماذا يمكن أن تستنتج من هذه المقارنة.

ح١٠ – استخدم طريقة نيوتن- رافسون مقرونة بطريقة هورنر لحساب $p(x_n)$ و $p'(x_n)$ من أجل $n \geq 0$ لحل كثيرة الحدود $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x1 + 12$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$. احسب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

ح١١ – استخدم طريقة برستو لحساب جذور كثيرة الحدود:

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 6$$

وذلك بوضع $r_0 = s_0 = 1$. أوقف الحسابات عندما تحصل على الدقة $\varepsilon \leq |r_{j+1} - r_j|$ و $\varepsilon \leq |r_{j+1} - r_j|$ من أجل $j \geq 0$ حيث إن $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$.

(٣,٨) تمارين

Exercises

١ - أوجد منقول المصفوفات التالية ثم حدد المصفوفات المتماثلة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&5\\0&2&3\\-7&-1&1\end{bmatrix}\text{ ، }\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&3\\4&0\\-6&7\end{bmatrix}\text{ و }\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

٢ - اعتبر المصفوفات التالية:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-4&1\\1&1&7\\-1&-3&0\end{bmatrix}\text{ ، }\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&-1&1\\2&3&0\\-2&-3&6\end{bmatrix}\text{ ، }\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\\-6&0\end{bmatrix}\text{ و}$$

$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$ ، احسب ما يلي: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ، $\mathbf{AB}$ ، $\mathbf{AC}$ و $\mathbf{Ax}$.

٣ - احسب محدد المصفوفة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-3&5\\1&2&3\\-1&-2&2\end{bmatrix}$$

بأسلوبين مختلفين.

٤ - حدد المصفوفة قطعية السيطرة والمصفوفة موجبة بالتحديد فيما يلي:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&5\\0&2&3\\-7&-1&1\end{bmatrix}\text{ ، }\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&-1&1\\2&3&0\\-2&-3&6\end{bmatrix}\text{ ،}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\\-6&0\end{bmatrix}\text{ و }\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

٥- حدد المصفوفة التي يمكن إعادة ترتيب بعض صفوفها لجعلها مصفوفة قطعية السيطرة فيما يلي:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\ 4 & -1 & -2\\ -3 & 7 & 2\end{bmatrix} ، \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$.\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{bmatrix} \text{ و}$$

٦- استخدم طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لحل الأنظمة الخطية التالية:

$$\begin{aligned}3x_1+x_2+x_3&=5\\ x_1+3x_2-x_3&=3\\ 3x_1+x_2-5x_3&=-1\end{aligned} \quad \text{(ii)} \qquad \begin{aligned}x_1+2x_2-x_3&=1\\ 2x_1+x_2&=0\\ -x_1+x_2+3x_3&=-1\end{aligned} \quad \text{(i)}$$

٧- استخدم طريقة الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=1\\ -3x_1+6x_2-9x_3&=-3\\ 2x_1-8x_2+8x_3&=2\end{aligned}$$

هل يوجد عدد لانهائي من الحلول أم لا يوجد حلاً على الإطلاق، ولماذا؟.

٨- اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned}4x_1\qquad+\beta x_3&=\delta\\ -x_1+4x_2-6x_3&=4\\ x_1-2x_2+2x_3&=1\end{aligned}$$

حيث إن β و δ عددين ثابتين. استخدم طريقة الحذف الجاوسي لإيجاد قيم β و δ التي تجعل للنظام الخطي عدد لانهائي من الحلول . ثم استخدم التعويض الخلفي لإيجاد حلاً يكون أحد عناصره مساوياً للصفر.

٩- لنفترض أننا نريد استخدام طريقة الحذف الجاوسي لحل النظامين الخطين المتكافئين:

$$\begin{bmatrix} 9.031 & 1.921 \\ 0.0342 & 1.342 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0.0342 & 1.342 \\ 9.031 & 1.921 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

أي الحلين تتوقع أن يكون أفضل ولماذا؟. [ملاحظة: لا تحاول حل النظامين].

١٠ – استخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$$

١١ - استخدم طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 8x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

هل يوجد عدد لانهائي من الحلول أم لا يوجد حلاً على الإطلاق، ولماذا؟.

١٢ – اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0.5 & \beta \\ -1 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حيث إن β عدد ثابت. استخدم طريقة الحذف الجاوسي والارتكاز الجزئي لإيجاد قيمة β التي تجعل للنظام الخطي عدد لانهائي من الحلول.

١٣- اكتب خوارزمية تتضمن الخطوات اللازمة لإنجاز الارتكاز السلمي.

١٤- حل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

باستخدام الطرائق التالية وحسابات تعتمد على أربعة أرقام عشرية:

أ) طريقة الحذف الجاوسي.

ب) طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي.

جـ) طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز السلمي.

والتعويض الخلفي. ماذا تلاحظ من النتائج التي تحصل عليها في الحالات الثلاث.

١٥- حلل المصفوفتين التاليتين:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إلى حاصل الضرب $\mathbf{LU}$ وذلك بوضع $l_{ii} = 1$ لكل $1 \le i \le 3$.

١٦- حلل المصفوفتين الموجودتين في التمرين السابق إلى حاصل الضرب $\mathbf{LU}$ ، وذلك بوضع $u_{ii} = 1$ من أجل $i = 1,2,3$.

١٧- استخدم التحليلين اللذين أوجدتهما في التمرين ١٥ لحل النظامين الخطيين التاليين:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

١٨- استخدم التحليلين اللذين أوجدتهما في التمرين ١٦ لحل النظامين الخطيين الموجودين في التمرين السابق. ماذا تلاحظ بالنسبة للمتجه $\mathbf{z}$ والحل $\mathbf{x}$ في الحالتين.

١٩- استخدم طريقة التحليل المثلثي مع وضع $l_{ii}=1$ لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 8x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ماذا تلاحظ بالنسبة لقطر المصفوفة المثلثية العليا $\mathbf{U}$ وعلى ماذا يدل ذلك.

٢٠- استخدم طريقة التحليل المثلثي مع وضع $u_{ii}=1$ لإثبات أنه لا يوجد حل وحيد للنظام الخطي الموجود في التمرين السابق. ماذا تلاحظ بالنسبة لقطر المصفوفة المثلثية الدنيا $\mathbf{L}$ وعلى ماذا يدل ذلك. ماذا تستنتج من هذا التمرين والتمرين السابق.

٢١- استخدم طريقة شولسكي لتحليل المصفوفة:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

٢٢- أثبت أن المعيار l_∞ يحقق الخواص الموجودة في تعريف (٣,١١).

٢٣- ليكن $\mathbf{x}=[-2,1,3,5]^T$ احسب $\|\mathbf{x}\|_\infty$ و $\|\mathbf{x}\|_2$.

٢٤- المتجه $\mathbf{x}=[1,10,27]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=5\\ 4x_1+8x_2-3x_3&=3\\ -2x_1+3x_2-x_3&=1 \end{aligned}$$

احسب الفرق $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ حيث إن $\tilde{\mathbf{x}}=[1.01,9.99,27.1]^T$ حل تقريبي لهذا النظام.

٢٥- أثبت أن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ والمعرفة بالتالي:

$$\mathbf{x}^{(k)}=[x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}]^T=[1+e^{-2k},\frac{1-k^2}{k},1-\cos^2\frac{5}{k}]^T$$

تتقارب إلى المتجه $\mathbf{x}=[1,-1,0]^T$ عندما k تؤول إلى ∞.

٢٦- أوجد $\|.\|_\infty$ للمصفوفتين التاليتين:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&2&-1&1\\2&8&-2&2\\-3&-10&-1&1\\2&11&4&3\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&-6\\4&4&-1\\-3&1&-7\end{bmatrix}$$

٢٧- احسب عدد الشرط للمصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix}3&1\\2&6\end{bmatrix}\text{،}\begin{bmatrix}3&1&-10\\2&6&9\\1&5&1\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}5&1&-7&1\\2&1&5&3\\11&5&1&4\end{bmatrix}.$$

٢٨- ليكن لدينا الحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}}=[1,0]^t$ للنظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ، حيث إن $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&4.0001\end{bmatrix}$ و $\mathbf{b}=[1,1.9999]^T$ فاحسب $\|\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه

الترسب للنظام الخطي بالنسبة للتقريب $\tilde{\mathbf{x}} = [1,0]^T$. ثم احسب حداً أعلى لكل من الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

٢٩- المتجه $\mathbf{x} = [1,10,27]^T$ هو لحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

احسب $\|\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه الترسب بالنسبة لهذا النظام والمتعلق بالحل التقريبي $\tilde{\mathbf{x}} = [1.01,10.01,27.1]^T$. احسب $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$. ما الذي يمكن أن تستنتجه من النتائج العددية.

٣٠- استخدم طريقة التصفية التكرارية لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 4.1110x_1 - 5.0781x_2 + 9.3452x_3 &= 7.4116 \\ 1.8565x_1 + 13.723x_2 - 11.743x_3 &= 19.416 \\ 2.6662x_1 + 4.2248x_2 + 1.8450x_3 &= 15.627 \end{aligned}$$

احسب التكرارين الأول والثاني فقط.

٣١- اعتبر النظام الخطي:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\quad &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 \qquad\quad + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$$

والتقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0.2,\frac{2}{3}]^t$.

أ) أثبت أن تقارب طريقة جاكوبي يكون مضمون.

ب) ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)}$ احسب التكرار الثاني $\mathbf{x}^{(2)}$.

جـ) احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب ليكن $\mathbf{x}^{(2)}$.

لنفترض أننا نريد استخدام طريقة جاكوبي لحساب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-4}. أوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على هذا التقريب.

٣٢- أعد حل التمرين ٣١ وذلك باستخدام طريقة جاوس-سيدال. قارن قيمة $\|\mathbf{T}_{GS}\|_\infty$ مع تلك لطريقة جاكوبي والتي حسبتها في التمرين ٣١. ماذا تلاحظ؟

٣٣- أعد التمرين ٣١ وذلك باستخدام طريقة الاسترخاء عندما يكون $\omega=1.1$.

قارن قيمة $\|\mathbf{T}_{SOR}\|_\infty$ مع تلك لطريقة جاكوبي والتي حسبتها في التمرين ٣١. ماذا تلاحظ؟.

٣٤- اعتبر النظام الخطي $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ وأن المصفوفة $\mathbf{A}=\mathbf{B}-\mathbf{C}$ حيث إن:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&5\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-2&-1&-2\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

والمتجه $\mathbf{b}\in\Re^3$.

أ) أثبت أن الصيغة التكرارية $\mathbf{x}^{(k-1)}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ، $k\geq1$ لحل هذا النظام تكون مضمونة التقارب.

ب) أثبت أن تقارب طريقة جاكوبي التكرارية يكون أسرع من الطريقة الموجودة في الفقرة (أ).

جـ) ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)}=[0,0,0]^t$ ، استخدم الصيغة التكرارية الموجودة في الفقرة (أ) لحل النظام الخطي عندما يكون $\mathbf{b}=[1,-1,0]^T$. احسب التقريب الثالث احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بهذا التقريب.

٣٥- استخدم المعادلات (3.63) لاستنتاج الصيغة التكرارية بالشكل المصفوفي لطريقة جاوس-سيدال.

٣٦- اعتبر النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ، حيث إن $\mathbf{b} = [0,0,1]^T$ ،

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ 2.5 & -1 & 0.5 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

أ) استخدم طريقة جاوس-سيدال التكرارية لحساب التقريب الثاني للحل المضبوط وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0.2,0]^t$.

ب) احسب $\|\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}$ هو متجه الترسب بالنسبة لهذا النظام والمتعلق بالحل التقريبي $\mathbf{x}^{(2)}$.

جـ) استخدم طريقة مباشرة لحساب الحل المضبوط لهذا النظام، ثم احسب الخطأ $\|\mathbf{x}^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$.

د) احسب حداً أعلى للخطأ $\|\mathbf{x}^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ بأسلوبين مختلفين.

٣٧- أثبت النظرية (٣,١٦).

٣٨- أثبت أنه إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة قطعية السيطرة فإن $\|\mathbf{T}_J\|_\infty < 1$.

٣٩- المتجه $\mathbf{x} = [1,1,1]^T$ هو الحل الوحيد للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + \quad x_3 &= 12 \\ x_1 + \quad x_2 + 10x_3 &= 12 \\ 10x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 12 \end{aligned}$$

استخدم كل من طريقتي جاكوبي وجاوس-سيدال لحساب التقريب الرابع $\mathbf{x}^{(4)}$ للحل وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$. ماذا يمكنك أن تلاحظ من خلال النتائج

العددية التي تحصل عليها؟ هل النتائج العددية توحي بأن متتالية المتجهات $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب أم تتباعد؟.

٤٠- أعد ترتيب المعادلات الموجودة في النظام الخطي الموجود في التمرين ٣٢ حيث إن طريقتي جاكوب وجاوس-سيدال تكونان مضمونتين التقارب لأي اختيار ابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} \in \Re^3$. ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$ احسب $\mathbf{x}^{(4)}$ وذلك بتطبيق كل من طريقتي جاكوبي وجاوس-سيدال على النظام الخطي بترتيبه الجديد. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٢٦. ماذا تلاحظ؟.

تمارين الحاسب

ح١- اكتب برامج للحاسب لتنفيذ العمليات التالية:

أ) حاصل الجمع $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

ب) حاصل الضرب $\mathbf{AB}$

جـ) حاصل الضرب $\mathbf{Ax}$.

ح٢- استخدم خوارزمية الحذف الجاوسي (٣,١) لكتابة برنامج للحاسب، ثم استخدمه لحل النظام الخطي:

$$\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 7\\
-3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 &= -5\\
x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 12\\
-5x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 8
\end{aligned}$$

ح٣- اكتب برنامج للحاسب يُنفذ طريقة الحذف الجاوسي مع الارتكاز الجزئي، ثم استخدمه لحل النظام الخطي الموجود في التمرين السابق.

ح٤- اكتب برنامج للحاسب لحساب:

أ) معيار القيمة العظمى للمتجه $\mathbf{x}$ ذو البعد n.

ب) معيار القيمة العظمى للمصفوفة $\mathbf{A}$ من النوع $n \times n$.

جـ) ثم استخدم هذا البرنامج لحساب $\|\mathbf{x}\|_\infty$ و $\|\mathbf{A}\|_\infty$، حيث إن:

$\mathbf{x} = [-3,4,0,1,9,-11,2]^T$ و

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & -2 & 2 & 11 \\ -3 & -10 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & 4 & 3 & 13 \\ 6 & 15 & 9 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ح٥- اعتبر النظام الخطي $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ حيث إن:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & -6 \\ 5 & 3 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

أ) احسب عدد الشرط للمصفوفة $\mathbf{A}$.

ب) استخدم طريقة التصفية التكرارية لحل النظام الخطي. احسب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-7}.

تلميح: يمكنك الاستعانة بالخوارزمية (٣,٥) لكتابة البرنامج المؤلف.

$$f(1.1) \approx s(1.1) = p_0(1.1) = 1.335198$$

و $f(1.45) \approx s(1.45) = p_2(1.45) = 2.014048$. وبالتالي فإن القيمة المطلقة للخطأ المرافق للتقريب $s(1.1)$ هي 0.00045 وتلك للخطأ المرافق للتقريب $s(1.45)$ هي 0.00022 . كما هو متوقع، فإن الأخطاء التي حصلنا عليها باستخدام دالة الشريحة الخماسية تكون أصغر من تلك التي تم الحصول عليها باستخدام دالة الشريحة التكعيبية.

(٤,٧) تمارين
Exercises

١- لتكن $f(x) = x^3$. أوجد كثيرة حدود برنستين ذات الدرجة الرابعة.

٢- لتكن $f(x) = \sin \pi x$. أوجد كثيرة حدود برنستين ذات الدرجة الخامسة.

٣- استخدم كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية لكتابة كثيرة الحدود $p(x)$ والتي تستكمل الدالة $f(x) = \sinh x$ عند الأعداد 2 ، 2.5 و 3.5 ثم استخدمها لإيجاد قيمة تقريبية لـ $f(x)$ عند $x = 3$. احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى لهذا الخطأ.

٤- لتكن $f(x) = \ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد المختلفة $x_j = j$ ، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,5$. استخدم كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية ذات الدرجة الثانية لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $\ln(6.5)$.

٥- اعتبر المعلومات التالية:

x	1.1	1.3	1.45	1.55
$f(x)$	3.64	3.08	2.76	2.58

استخدم كثيرة حدود لاغرانج الاستكمالية المناسبة لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.2)$.

٦- اعتبر المعلومات الموجودة في الجدول رقم (٤،١) والتي تتضمن أوزان الطفل الرضيع. استخدم كثيرة الحدود لاغرانج لكتابة كثيرة الحدود التربيعية والتي تعطينا أفضل قيمة تقريبية ممكنة لوزن الطفل عند شهره الخامس.

٧- اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.3	0.45	0.55	0.75	0.9
$f(x)$:	1.105	1.350	1.568	1.733	2.117	2.460

استخدم كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية لكتابة:

أ) كثيرة الحدود التربيعية التي تعطينا أفضل تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

ب) كثيرة الحدود التربيعية التي تعطينا أسوأ تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

٨- لتكن $f(x)$ دالة معرفة عند الأعداد 0 ، h و $2h$ حيث إن $h \neq 0$.

أثبت أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية $p(x)$ والتي توافق هذه الدالة عند الأعداد المذكورة بالشكل:

$$p(x)=\frac{1}{2h^2}[f(0)-2f(h)+f(2h)]x^2+\frac{1}{2h}[-3f(0)+4f(h)-f(2h)]x+f(0)$$

ثم اكتب حد الخطأ المرافق لها. استخدم كثيرة الحدود لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.25)$ وذلك عندما $f(x)=e^{-x}$ و $h=0.2$.

٩- لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود لاغرانج الاستكمالية والتي تستكمل الدالة $f(x)=x^3+x+1$ عند الأعداد $x_i=\beta+(i+1)h$ من أجل $i=0,1,2$ ، حيث إن β عدد حقيقي و $h>0$. أوجد قيمة h التي تجعل الخطأ المتعلق من تقريب $f(x)$ بكثيرة الحدود $p(x)$ عند $x=\beta$ محدود من الأعلى بالعدد 10^{-3}.

١٠- ليكن لدينا كثيرتي الحدود لاغرانج التربيعية $p_2(x)$ والتكعيبية $p_3(x)$

وأن $f(x)=p_2(x)+\frac{1}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f'''(\xi(x))$

حيث إن $x_0<\xi(x)<x_2$ و

$$f(x)=p_3(x)+\frac{1}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)f^{(4)}(\varsigma(x))$$

حيث إن $x_0<\varsigma(x)<x_3$.

أثبت أن $\frac{1}{3!}\frac{d}{dx}[f'''(\eta(x))]=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta(x))$ حيث إن $x_0<\eta(x)<x_2$.

١١- أثبت أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لاغرانج الخطية بالشكل:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

١٢- أثبت أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود لاغرانج التربيعية بالشكل:

$$p(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}(x-x_0)(x-x_1)$$

حيث إن $f[x_{i-1},x_i]$ فرق القسمة الأول للدالة f بالنسبة للمتغيرين x_{i-1} و x_i من أجل $i=1,2$.

١٣- لتكن الدالة $f(x)=\ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد $x_i=1+ih$ من أجل $i=0,1,2,3$. اكتب جدول فروق القسمة، ثم اكتب كثيرة الحدود الاستكمالية والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. استخدم كثيرة الحدود التي أوجدتها لحساب قيمة تقريبية لـ $\ln 3.5$، ثم احسب الخطأ المضبوط لهذا التقريب وحداً أعلى لهذا الخطأ.

١٤- اعتبر المعلومات في الجدول رقم (٤,١) والتي تتضمن أوزان الرضيع. استخدم صيغة فروق القسمة الاستكمالية لنيوتن لكتابة لحساب قيمة تقريبية لوزن الطفل عند شهره الخامس.

١٥- اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.3	0.45	0.55	0.75	0.9
$f(x)$:	1.105	1.350	1.568	1.733	2.117	2.460

أ) استخدم صيغة فروق القسمة لنيوتن لكتابة كثيرة الحدود التربيعية والتي تعطينا أفضل تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

ب) استخدم صيغة فروق القسمة لنيوتن لكتابة كثيرة الحدود التربيعية والتي تعطينا أسوأ تقريب ممكن لـ $f(0.4)$.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها بحل التمرين السابع، مع العلم أن $f(x) = e^x$. ماذا تلاحظ ؟.

١٦- اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.25	0.4	0.55
$f(x)$:	1.045	1.295	1.811	2.600

أ) استخدم صيغة فروق القسمة الأمامية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.15)$.

ب) استخدم صيغة فروق القسمة الخلفية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.5)$.

قارن القيم العددية التي تحصل عليها مع القيم المضبوطة حيث إن $f(x) = \cosh 3x$. ثم احسب حداً أعلى للخطأ في كل حالة.

١٧- ليكن لدينا الأعداد الثلاثة المختلفة x_0، x_1 و x_2 بحيث إن $h = x_{i+1} - x_i$ من أجل $i = 0,1$، ولتكن $f(x)$ دالة معرّفة عند هذه الأعداد. أثبت أن فرق القسمة الثاني يحقق:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - 2f[x_1] + f[x_0]}{2h^2}$$

١٨- لتكن $f(x) = e^{x-1}$ معرّفة عند الأعداد $x_i = ih$ من أجل $i = 0,1,2,3$. اكتب جدول الفروق الأمامية ثم استخدم صيغة الفروق الأمامية لنيوتن لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$. احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ.

١٩- لتكن $f(x) = e^{x-1}$ معرّفة عند الأعداد $x_i = ih$ من أجل $i = 0,1,2,3$. اكتب جدول الفروق الخلفية ثم استخدم صيغة الفروق الخلفية لنيوتن لحساب قيمة تقريبية لـ $e^{-0.5}$. احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ.

٢٠ – اعتبر المعلومات التالية:

x :	0.1	0.25	0.4	0.55
$f(x)$:	1.045	1.295	1.811	2.600

أ) استخدم صيغة الفروق الأمامية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.15)$.

ب) استخدم صيغة الفروق الخلفية لنيوتن لكتابة كثيرة حدود $p(x)$ والتي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة سابقاً، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(0.5)$.

جـ) احسب الأخطاء المضبوطة:

$|f(0.15) - p(0.15)|$ و $|f(0.15) - p(0.15)|$،

مع العلم أن $f(x)=\cosh 3x$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٦. ماذا تلاحظ ؟.

٢١- ليكن لدينا $p_5(x_i)=f(x_i)$ و $p_5'(x_i)=f'(x_i)$ من أجل $i=1,2$. استخدم كثيرة الحدود هيرميت $p_5(x)$ المعرفة في المعادلة (4.29) و تفاضلها $p_5'(x)$ الموجود في العلاقة (4.31) لإيجاد الخواص التي تحققها $H_i(x)$ و $\hat{H}_i(x)$ من أجل $i=0,1,2$.

٢٢- برهن صحة المعادلتين (4.39) و (4.40).

٢٣- استخدم الشرطين $\hat{H}_0(x_0)=0$ و $\hat{H}_0'(x_0)=1$ لإيجاد قيم الثابتين c و d الموجودين في المعادلة (4.42).

٢٤- استنتج المعادلتين (4.44) و (4.45).

٢٥- اعتبر المعلومات التالية:

x	1.0	1.5
$f(x)$:	1.17520	2.12928
$f'(x)$:	1.54308	2.35241

استخدم أسلوب هيرميت لكتابة كثيرة الحدود التي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لتقريب قيمة $f(1.2)$. إذا كانت $f(x)=\sinh x$ فاحسب الخطأ المضبوط بالتقريب الذي حصلت عليه واحسب حداً أعلى لهذا الخطأ.

٢٦- اعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ عند الأعداد 3، 3.5 و 4.5 . استخدم أسلوب هيرميت لكتابة كثيرة حدود استكمالية والتي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(4)$ واحسب الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب وكذلك حداً أعلى للخطأ. قارن النتائج التي تحصل

عليها مع تلك التي تم الحصول عليها في المثال (٤,٢) من حيث درجة كثيرة الحدود، الجهد الحسابي ودقة القيمة التقريبية.

٢٧- تحقق فيما إذا كانت الدوال التالية دوال شريحة أم لا، ثم حدد درجتها:

أ)
$$s(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 2x-1, & x\in[1,2] \\ -x+5, & x\in[2,3] \end{cases}$$

ب)
$$s(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1] \\ 2x-1, & x\in[1,2] \\ x^2-2x+3, & x\in[2,4] \end{cases}$$

جـ)
$$s(x)=\begin{cases} x^3+2x, & x\in[1,2] \\ 4x^2-4, & x\in[2,3] \\ x^3-6x+21, & x\in[3,4] \end{cases}$$

٢٨- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ والمعرفة عند الأعداد المختلفة 3، 3.5 و 4.5. أوجد دالة الشريحة الخطية التي تستكمل هذه الدالة عند الأعداد المذكورة. ثم استخدمها لحساب أفضل قيم تقريبية لـ $f(x)$ عندما $x=3.3$ و $x=4.0$. احسب الخطأ المضبوط للحالتين. بالنسبة للحالة الثانية قارن الخطأ الذي تحصل عليه مع ذلك الذي حصلنا عليه في المثال (٤,٢).

٢٩- لتكن الدالة $f(x)=\ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد $x_i=1+ih$ من أجل $i=0,1,2$. استخدم دالة الشريحة الخطية لكتابة كثيرة الحدود التي تستكمل الدالة $f(x)$ عند الأعداد المذكورة. ثم احسب قيمة تقريبية لـ $\ln 3.5$ واحسب الخطأ المضبوط. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٣.

٣٠- اعتبر المعلومات التالية:

x	1.0	1.5
$f(x)$:	1.54308	2.35241
$f'(x)$:	1.17520	2.12928

استخدم دالة الشريحة الخطية لكتابة كثيرة الحدود التي تستكمل الدالة $f(x)$: عند الأعداد المذكورة، ثم استخدمها لحساب قيمة تقريبية لـ $f(1.25)$. احسب المرافق لهذا التقريب حيث إن $f(x) = \cosh x$ ، ثم قارن ذلك مع الخطأ الذي حصلنا عليه في المثال (٤,٨).

٣١- اكتب الخوارزمية التي تتضمن الخطوات اللازمة لتنفيذ أسلوب دالة الشريحة التكعيبية والتي تمكننا من حساب قيماً تقريبية لعدة قيم مختلفة للدالة $f(x)$ في فترات صغيرة مختلفة.

٣٢- استخدم دالة الشريحة التكعيبية لحل المسائل الموجودة في:

أ) التمرين ٢٨.

ب) التمرين ٢٩.

جـ) التمرين ٣٠.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها بحل المسائل الموجودة في التمرين المعني لكل حالة.

٣٣- استنتج العلاقات الموجودة في المعادلة (4.72).

٣٤- استنتج المعادلات (4.74) و (4.75).

٣٥- استنتج المعادلة (4.77).

٣٦- استنتج المعادلتين (4.81) و (4.82).

٣٧- استنتج المعادلة (4.84).

٣٨- استخدم دالة الشريحة الخماسية لحل المسائل الموجودة في:

أ) التمرين ٢٨.

ب) التمرين ٢٩.

جـ) التمرين ٣٠.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها بحل المسائل الموجودة في التمرين المعني والتمرين ٣٢ لكل حالة.

تمارين الحاسب

ح١ – لتكن $f(x) = \ln(x+2)$ معرفة عند الأعداد المختلفة $x_j = j$، من أجل $j = 0,1,2,\ldots,5$. اكتب برنامج للحاسب لتنفيذ أسلوب كثيرة الحدود لاغرانج لحساب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$.

ح٢ – اكتب برنامج للحاسب لتنفيذ أسلوب فروق القسمة لنيوتن لحل المسألة الموجودة في التمرين ح١، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$. قارن هذه القيمة مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ح١.

ح٣ – اكتب برنامج للحاسب لتنفيذ أسلوب الفروق الخلفية لنيوتن لحل المسألة الموجودة في التمرين ح١، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $\ln(6.5)$. قارن هذه القيمة مع تلك التي حصلت عليها في التمرينين ح١ و ح٢.

ح٤ – اعتبر المعلومات الموجودة في الجدول رقم (٤,١). أوجد دالة الشريحة الخطية المناسبة، ثم استخدمها لحساب قيماً تقريبية لوزن الطفل عندما يكون عمره شهر ونصف وخمسة أشهر.

ح٥ – اعتبر المعلومات الموجودة في الجدول رقم (٤,١). أوجد دالة الشريحة التكعيبية الطبيعية المناسبة، ثم استخدمها لحساب قيماً تقريبية لوزن الطفل عندما يكون عمره شهر ونصف وخمسة أشهر. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ح٢. ماذا تلاحظ؟.

ح٦ – استخدم دالة الشريحة الخماسية التي ناقشناها في البند (٤,٦) لحساب قيمة تقريبية لـ ln(6.5) للمسألة الموجودة في التمرين ح١. ثم قارن ذلك بالقيمة التقريبية التي حصلت عليها في التمرينين ح١ و ح٢. ماذا تلاحظ؟.

مثال (٥,١٣)

نريد استخدام تكامل جاوس عندما $n=2$ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx$. بداية نعلم من المثال (٥,١٢) أن $\int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2} = 2\int_{-1}^1 \frac{dt}{(t+7)^2}$ وباستخدام الصيغة العددية (5.102) مع $n=2$ والثوابت a_0، a_1 و a_2 كما هي معرّفة في المعادلة (5.103) نحصل على:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t+7)^2} \approx G_2(f) = [\frac{5}{9(-\sqrt{3/5}+7)^2} + \frac{8}{9(7)^2} + \frac{5}{9(\sqrt{3/5}+7)^2}] = 0.0416666$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$I(f) = \int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2} \approx 2G_2(f) = 0.0833333$$

و الخطأ المضبوط المرافق لهذا التقريب هو: $|I(f)-G_2(f)| = 5.4\times10^{-8}$.

(٥,٨) تمارين

Exercises

١ - اعتبر المعلومات التالية:

x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$f(x)$	0.182322	0.336472	0.470004	0.587787	0.693147

أ) استخدم صيغ النقطتين لحساب جميع القيم الممكنة لـ $f'(2.2)$، $f'(2.6)$، $f'(2.7)$ و $f'(3)$. ثم قارن هذه القيم مع القيم المضبوطة $f'(2.2) = 0.8333333$ ، $f'(2.6) = 0.6250000$ ، $f'(2.7) = 0.5882353$ و $f'(3) = 0.5000000$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ؟

ب) استخدم صيغ الثلاث نقاط لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f'(2.2)$ ، $f'(2.6)$ ، $f'(2.7)$ و $f'(3)$ ثم قارن هذه القيم مع القيم المضبوطة الموجودة في الفقرة (أ). ماذا تلاحظ ؟

جـ) استخدم صيغ الخمس نقاط لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f'(2.2)$ ، $f'(2.6)$ ، $f'(2.7)$ و $f'(3)$. ثم قارن هذه القيم مع المضبوطة الموجودة في الفقرتين (أ) و (ب).

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها في الفقرات الثلاث ورتبها من ناحية الأفضلية. ماذا تلاحظ؟.

٢- اعتبر الدالة $f(x) = \sinh x$. استخدم صيغ التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f'(1)$ وذلك بوضع $h = 0.1$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه باستخدام صيغة الثلاث نقاط المركزية، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

٣- اعتبر المعلومات الموجودة في التمرين الأول. استخدم الصيغة العددية المركزية (5.29) لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f''(2.6)$. ثم قارن هذه القيم مع القيمة المضبوطة $f''(2.6) = -0.3906250$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ ؟.

٤- اعتبر المعلومات الموجودة في التمرين الأول. استخدم الصيغة العددية (5.34) لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f'''(2.6)$. ثم قارن هذه القيم مع القيمة المضبوطة $f'''(2.6) = 0.4882813$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ؟.

٥- اعتبر المعلومات الموجودة في التمرين الأول. استخدم الصيغة العددية الموجودة في الجدول رقم (٥,١) لحساب جميع القيم التقريبية الممكنة لـ $f^{(4)}(2.6)$. ثم قارن هذه القيم مع القيمة المضبوطة $f''(2.6) = -0.9155273$ (صحيحة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية). ماذا تلاحظ؟.

٦- اعتبر المعلومات الموجودة في المثال (٥,٢):

أ) استخدم الصيغة العددية (5.16) لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(0.4)$، ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى لهذا الخطأ.

ب) استخدم الصيغة العددية (5.17) لحساب قيمة تقريبية لـ $f'(0.5)$، ثم احسب الخطأ المضبوط و حداً أعلى لهذا الخطأ. قارن القيمة التقريبية التي تحصل عليها هنا مع القيم التقريبية التي تم الحصول عليها في المثال (٥,٢).

٧- استنتج الصيغة العددية (5.14).

٨- لتكن $f(x) \in C^3[x_0, x_0 + 2h]$ حيث إن $h \neq 0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج صيغة الثلاث نقاط (5.10).

٩- لتكن $f(x) \in C^5[x_0 - h, x_0 + 3h]$ حيث إن $h \neq 0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج صيغة الثلاث نقاط (5.16).

١٠- استخدم كثيرة الحدود لاغرانج المناسبة لاستنتاج صيغة الخمس نقاط المركزية (5.17).

١١- لنفترض أننا اعتبرنا أخطاء التدوير أثناء حساب القيمة التقريبية لـ $f'(x_0)$ وذلك باستخدام الصيغة العددية (5.13). أوجد الحد الأعلى للفرق بين القيم المحسوبة و المضبوطة في هذه الحالة.

١٢- اعتبر استخدام الصيغة (5.13) لحساب قيمة عددية لـ $f'(2)$ حيث إن $f(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $[1.9,2.1]$. أوجد القيمة المثلى لـ h لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $f'(2)$ وذلك باستخدام عمليات حسابية ترتكز على خمسة أرقام عشرية معنوية (أي أن $\delta = 5\times10^{-6}$).

١٣- اعتبر المعلومات التالية:

x	0.1	0.3	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0
$f(x)$	1.4	1.6	1.7	1.9	2.0	2.2	2.4

أ) استخدم صيغ الثلاث نقاط المناسبة لحساب أفضل تقريب ممكن لـ $f'(0.1)$، $f'(0.5)$ و $f'(1)$.

ب) احسب أفضل وأسوأ تقريب ممكن لـ $f'(0.6)$.

أذكر الأسباب التي جعلتك تعتقد أن القيم التي حسبتها هي الأفضل (الأسوأ) لكل حالة.

١٤- استنتج الصيغة العددية (5.29) باستخدام كثيرة الحدود لاغرانج المناسبة.

١٥- لتكن $f(x)\in C^6[x_0-2h,x_0+2h]$ حيث إن $h\neq 0$ عدد ثابت. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج الصيغة العددية:

$$f''(x_0)=\frac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h)+16f(x_0-h)-30f(x_0)+16f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$
$$+\frac{h^4}{90}f^{(4)}(\eta)$$

١٦- لتكن لدينا الأعداد x_0-2h، x_0-h، x_0، x_0+h و x_0+2h حيث إن $h\neq 0$ عدد ثابت وأن $f(x)\in C^5[x_0-2h,x_0+2h]$. استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج الصيغة العددية:

$$f'''(x_0)=\frac{1}{2h^3}[-f(x_0-2h)+2f(x_0-h)-2f(x_0+h)+f(x_0+2h)]-\frac{h^2}{4}f^{(5)}(\eta)$$

١٧- لتكن $f(x)\in C^6[x_0-2h,x_0+2h]$ حيث إن $h\neq 0$ عدد ثابت.
استخدم كثيرة الحدود تايلور المناسبة لاستنتاج الصيغة العددية:

$$f^{(4)}(x_0)=\frac{1}{h^4}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+6f(x_0)-4f(x_0+h)+f(x_0+2h)]$$
$$-\frac{h^2}{6}f^{(4)}(\eta)$$

حيث إن $\eta\in(x_0-2h,x_0+2h)$.

١٨- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\cosh x$. استخدم صيغ التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f''(1)$ وذلك عندما يكون $h=0.1$، $h=0.2$ و $h=0.4$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ عندما $h=0.2$ ، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

١٩- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\ln(x+1)$. استخدم صيغ التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f'''(1)$ وذلك عندما يكون $h=0.1$، $h=0.2$ و $h=0.4$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ عندما $h=0.2$ ، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

٢٠- ليكن لدينا الدالة $f(x)=\ln(x+1)$. استخدم صيغة التفاضل العددي الواردة في هذا الفصل لحساب قيماً تقريبية لـ $f^{(4)}(1)$ وذلك عندما يكون $h=0.1$، $h=0.2$ و $h=0.4$. احسب الأخطاء المضبوطة لكل حالة ثم قارن

النتائج. ماذا تلاحظ ؟. ثم احسب حداً أعلى للخطأ عندما $h = 0.2$ ، وقارنه مع الخطأ المضبوط لهذه الحالة.

٢١- عندما استخدمنا صيغة عددية لحساب القيم التقريبية لـ $f''(0)$ لدالة ما $f(x)$ حصلنا على النتائج العددية التالية:

h	$\lvert f''(0) - D_h^2(f(0)) \rvert$
0.1	0.000313
0.2	0.001258
0.4	0.005137

ما هي الرتبة التقاربية للصيغة المستخدمة. ولماذا؟.

٢٢- استخدم أسلوب ريشاردسون والمعرّف في المعادلة (5.40) لحساب قيم تقريبية لـ $f'(0.5)$ حيث إن $f(x) = \ln(x+1)$ وذلك بوضع $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ لحساب $D(h)$ ومن ثم وضع $h = 0.2, 0.1, 0.05$ لحساب $D_1(h)$.

٢٣- استنتج صيغة عددية لحساب قيماً تقريبية للتفاضل الأول للدالة f باستخدام أسلوب ريشاردسون والصيغة المركزية (5.13).

تلميح: ضع $f'(x_0) \approx \dfrac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] = D(h)$.

٢٤- استخدم الصيغة التي استنتجتها في التمرين السابق لحساب قيماً تقريبية لـ $f'(0.5)$ حيث إن $f(x) = \ln(x+1)$ وذلك بوضع $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ لحساب $D(h)$ ومن ثم وضع $h = 0.2, 0.1, 0.05$ لحساب $D_1(h)$.

٢٥- استخدم صيغ نيوتن كوتس المغلقة: شبه المنحرف، سمبسون، 3/8 سمبسون و تلك المعرّفة بالمعادلة (5.68) لحساب قيماً تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$.

ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه لكل حالة.

٢٦- استخدم صيغتي سمبسون و 3/8 سمبسون لتقريب التكامل $\int_1^2 \frac{x}{2x^2-1}dx$. ثم احسب الخطأ المضبوط لكل حالة. قارن النتائج العددية، ماذا تلاحظ ؟.

٢٧- استخدم النظرية (٥,١) لإيجاد حد الخطأ لطريقة شبه المنحرف.

٢٨- استخدم النظرية (٥,١) لإيجاد حد الخطأ لطريقة سمبسون.

٢٩- ليكن لدينا $G(x)=\int_{x_0}^{x}(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)dt$ ، أثبت أن $G(x)=\frac{1}{4}(x-x_0)^2(x-x_2)^2$.

٣٠- استنتج صيغة نقطة الوسط (5.72).

٣١- استنتج صيغة نيوتن كوتس المفتوحة (5.73).

٣٢- استخدم صيغ نيوتن كوتس المفتوحة والمعرّفة بالمعادلات (5.72)، (5.73) و (5.74) لحساب قيماً تقريبية للتكامل الموجود في التمرين السابق. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه لكل حالة. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٢٥. ماذا تلاحظ؟.

٣٣- استخدم طريقة شبه المنحرف المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$ وذلك بوضع $n=6$. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه.

٣٤- أعد التمرين السابق باستخدام طريقة سمبسون المركبة وذلك $n = 6$. هل النتائج العددية التي تحصل عليها هنا أفضل من تلك التي تحصل عليها في التمرين ٣٣ ولماذا؟.

٣٥- استنتج طريقة $\frac{3}{8}$ سمبسون المركبة.

٣٦- استخدم طريقة $\frac{3}{8}$ سمبسون المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$ وذلك بوضع $n = 6$. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها في التمرينين ٣٣ و ٣٤.

٣٧- استنتج طريقة نقطة الوسط المركبة.

٣٨- استخدم طريقة نقطة الوسط المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$ وذلك بوضع $n = 6$. ثم احسب الخطأ المضبوط وحداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك في التمرين ٣٣.

٣٩- اعتبر الدالة $f(x) = e^{1-x}$ عند الأعداد التالية:

$$x: \quad 1.0 \quad 1.1 \quad 1.4 \quad 1.6 \quad 1.7 \quad 2.0 \quad 2.1 \quad 2.3 \quad 2.6$$

أ) استخدم صيغة شبه المنحرف المركبة لحساب أفضل قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^{2.6} e^{1-x} dx$. ثم احسب الخطأ المضبوط.

ب) أعد الفقرة (أ) باستخدام صيغة سمبسون المركبة. ماذا تلاحظ؟.

٤٠- استخدم طريقة سمبسون المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ بدقة 5×10^{-3}.

٤١- استخدم طريقة رومبرغ لحساب قيماً تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$.

احسب قيم $R_{k,0}$ من أجل $k = 0,1,2$. ثم احسب الأخطاء $|I(f)-R_{k,0}|$، من أجل $k = 0,1,2$. ماذا تلاحظ؟.

٤٢- اعتبر القيم التقريبية $R_{0,0} = 0.75$، $R_{1,0} = 0.775$، $R_{2,0} = 0.78279$ للتكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ احسب القيم التقريبية $R_{1,1}$، $R_{2,1}$ و $R_{2,2}$، ثم احسب الأخطاء المرافقة لهذه القيم التقريبية.

٤٣- استنتج المعادلة (5.91).

٤٤- استخدم تكامل جاوس عندما $n = 1$ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$، ثم احسب الخطأ المرافق لهذا التقريب.

٤٥- استخدم تكامل جاوس عندما $n = 2$ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh\ x dx$، ثم احسب الخطأ المرافق لهذا التقريب. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمارين السابقة التي تم استخدام الطرائق الأخرى لحساب هذا التكامل.

تمارين الحاسب

ح١ - اعتبر الدالة $f(x)=\ln x$ استخدم الصيغة العددية (5.17) لحساب قيماً تقريبية لـ $f'(2)$ عندما $h=0.4$، $h=0.2$، $h=0.1$ و $h=0.05$. ثم احسب الأخطاء المرافقة لكل تقريب $|f'(2)-D_h(f)|$. ماذا تلاحظ؟ هل يمكن الاستدلال من هذه الأخطاء أن الرتبة التقاربية لهذه الصيغة هي الرابعة؟.

ح٢ - اعتبر الدالة $f(x)=\ln x$ استخدم الصيغة العددية الموجودة في الجدول رقم (٥,١) لحساب قيماً تقريبية لـ $f^{(4)}(2)$ عندما $h=0.4$، $h=0.2$، $h=0.1$ و $h=0.05$ حيث إن $f(x)=\ln x$، ثم احسب الأخطاء المرافقة لكل تقريب $|f^{(4)}(2)-D_h^{(4)}(f)|$. ماذا تلاحظ؟ هل يمكن الاستدلال من هذه الأخطاء على أن الرتبة التقاربية لهذه الصيغة هي الثانية؟.

ح٣- استخدم طريقة سمبسون المركبة لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ بدقة 5×10^{-5}.

ح٤ - استخدم طريقة رومبرغ لحساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \sinh x dx$ بدقة 5×10^{-8}.

(٦,٨) تمارين

Exercises

١ - استخدم طريقة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = y + e^t$$
$$y(1) = 2e$$

في الفترة $1 \le t \le 1.5$ وذلك بوضع $h = 0.1$. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\cdots,5$، ثم قارن حجم هذه الأخطاء عند كل i مع تلك المماثلة لها والموجودة في الجدول رقم (٦,١). ماذا تلاحظ؟

٢ - اعتبر مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -\frac{1}{t}y + 2$$
$$y(1) = 2$$

استخدم طريقة أويلر لحساب قيماً تقريبية لـ $y(1.6)$ وذلك عندما $h = 0.1$، $h = 0.2$ $h = 0.3$، بالتتالي. ثم احسب الخطأ المضبوط المتعلق بالتقريب الذي تحصل لـ $y(1.6)$ في كل حالة، علماً بأن الحل المضبوط لهذه المسألة هو $y(t) = \frac{1}{t} + t$.

قارن النتائج العددية. ماذا تلاحظ؟.

٣- استخدم طريقة نقطة الوسط لحل المسألة الموجودة في المثال (٦,٢) وذلك باستخدام طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية لحساب w_1. احسب القيم التقريبية الثلاث w_2، w_3 و w_4 فقط، ثم قارن حجم الأخطاء المتعلقة بهذه القيم مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٢). ماذا تلاحظ؟ ماذا تستطيع أن تستنتج من النتائج العددية لهذا التمرين والمثال (٦,٢).

٤- استخدم طريقة نقطة الوسط لحل المسألة الموجودة في التمرين ٢ ولنفس قيم h وذلك:

أ) بحساب w_1 باستخدام طريقة أويلر.

ب) بحساب w_1 باستخدام الحل المضبوط.

قارن النتائج العددية للحالتين. ماذا تلاحظ؟.

٥- استخدم طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٢ ولنفس قيم h. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٤. أي النتائج أفضل؟.

٦- استخدم طريقتي تايلور ذات الرتبة الثالثة والرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -\frac{1}{t}y + 2$$

$$y(0.4) = 2.9$$

وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب قيماً تقريبية لـ $y(1)$.

٧- استخدم طريقتي رنج-كوتا المعرفتين بالمعادلتين (6.64) و (6.66) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٥) ثم قارن النتائج الموجودة في الجدول رقم (٦,٥).

٨- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثانية والمعرفة بالمعادلة (6.62)
تسمى طريقة أويلر المعدّلة (المحسنة)
لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t(t+2)$$

$$y(0) = 1$$

وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب قيماً تقريبية لـ $y(0.4)$. احسب الأخطاء $|y_i - w_i|$ من اجل $i = 1,2$ حيث إن $y(t) = t^2 + e^{-t}$.

٩- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثالثة والمعرفة بالمعادلة (6.77) لحل مسألة القيمة الابتدائية التي تم حلها في المثال (٦,٦). احسب القيم التقريبية

الثلاث w_1، w_2 و w_3 فقط ، ثم قارن حجم الأخطاء المتعلقة بهذه القيم مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٦). ماذا تلاحظ؟

١٠- أوجد حدي الخطأ المحلي المقطوع لطريقتي رنج-كوتا المعرفتين في المعادلتين (6.76) و (6.77).

١١- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثالثة والمعرفة بالمعادلة (6.76) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨.

١٢- استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرينين ٨ و ١١.

١٣- اكتب خوارزمية لتنفيذ طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة التقاربية الرابعة (6.78).

١٤- استخدم طريقة شبه المنحرف لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٨.

١٥- استخدم طريقة سمبسون لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها عندما تم استخدام طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الرابعة في التمرين ١٢.

١٦- استخدم اسلوب متسلسلة تيلور لاستنتاج طريقة شبه المنحرف، ثم أوجد حد الخطأ المقطوع المرافق لها.

١٧- لتكن $p(t)$ كثيرة الحدود الوحيدة ذات الدرجة الثانية والتي تمر بالنقاط (t_i, f_i)، (t_{i+1}, f_{i+1}) و (t_{i+2}, f_{i+2}). استخدم أسلوب التكامل لاستنتاج طريقة سمبسون ثم أوجد حد الخطأ المقطوع المرافق لها.

١٨- لتكن $p(t)$ كثيرة الحدود الوحيدة ذات الدرجة الثانية والتي تمر بالنقاط (t_i, f_i)، (t_{i+1}, f_{i+1}) و (t_{i+2}, f_{i+2}). استخدم أسلوب التكامل لاستنتاج طريقة آدم-مولوتن

$$w_{i+2} = w_{i+1} + \frac{h}{12}[5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i]$$

ثم أوجد الخطأ المقطوع المرافق.

١٩- استخدم طريقة آدم-مولوتن الموجودة في التمرين السابق لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك التي تحصل عليها عندم تم استخدام طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الثالثة في التمرين ١١.

٢٠- استنتج صيغة مباشرة ذات الثلاث خطوات تكون رتبتها أعلى ما يمكن بحيث تحتوي على وسيط حر وليكن λ. ثم أوجد الخطأ المحلي المقطوع المرافق لها.

تلميح: ضع $\alpha_0 = \lambda$.

٢١- استنتج صيغة ضمنية ذات خطوتين تكون رتبتها أعلى ما يمكن بحيث تحتوي على وسيط حر وليكن λ. ثم أوجد الخطأ المحلي المقطوع المرافق لها.

تلميح: ضع $\alpha_0 = \lambda$.

٢٢- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات:

$$w_{i+2} = w_{i+1} + \frac{h}{12}[5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i]$$

مستقرة صفرياً.

٢٣- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات:

$$w_{i+2} + 4w_{i+1} - 5w_i = \frac{h}{2}[8f_{i+1} + 4f_i]$$

غير مستقرة صفرياً.

٢٤- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات:

$$w_{i+2} + w_{i+1} - 2w_i = \frac{h}{2}[5f_{i+1} + f_i]$$

متوافقة ولكنها غير مستقرة صفرياً.

٢٥- أثبت أن صيغة متعددة الخطوات التالية:

$$w_{i+3} - w_{i+2} = \frac{h}{24}[9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i]$$

متقاربة.

٢٦- استخدم طريقة التنبؤ والتصحيح وذلك بجعل طريقة أويلر للتنبؤ وطريقة شبه المنحرف للتصحيح لحساب قيمة تقريبية لـ $y(0.4)$ حيث إن $y(x)$ هو الحل المضبوط لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = -y + t(t+2)$$
$$y(0) = 1$$

وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب الخطأ المضبوط عند كل خطوة حيث إن $y(t) = t^2 + e^{-t}$.

٢٧- حل المسألة الموجودة في المثال السابق باستخدام أسلوب التنبؤ والتصحيح وذلك بجعل طريقة آدم- باشفورث للتنبؤ و آدم-مولتن للتصحيح. احسب الخطأ عند كل خطوة.

تمارين الحاسب

ح١ – استخدم طريقة نقطة الوسط (و طريقة تايلور ذات الرتبة الثانية لحساب w_1) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٢). احسب $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$ ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٢).

ح٢ – استخدم طريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨ وذلك بوضع $h = 0.1$. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$.

ح٣- استخدم طريقة سمبسون لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨ وذلك بوضع $h = 0.1$ وحساب w_1 باستخدام طريقة تايلور ذات الرتبة الرابعة. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$. قارن النتائج العددية مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ح٢. أعد حل المسألة بوضع $w_1 = y(t_1)$ ثم قارن النتائج العددية. ماذا تلاحظ ؟.

ح٤ – استخدم طريقتي رنج-كوتا ذات الرتبة الثانية و المعرفتين في المعادلتين (6.64) و (6.66) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في المثال (٦,٥). احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$، ثم قارن النتائج التي العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٦,٥).

ح٥ – استخدم طريقة رنج-كوتا ذات الرتبة الرابعة لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. احسب الخطأ $|y_i - w_i|$ من أجل $i = 1,2,\ldots,10$، ثم قارن النتائج التي العددية التي تحصل عليها مع تلك التي تحصل عليها في التمرينين ح٢ وح٣.

ح٦ – استخدم طريقة التنبؤ والتصحيح المعرفة بالمعادلتين (6.108) و (6.109) لحل مسألة القيمة الابتدائية الموجودة في التمرين ٨. يمكن حساب w_i ، $i = 1,2,3$ باستخدام طريقة تايلور أو رنج-كوتا ذات الرتبة التقاربية الرابعة.

يمكن للقارئ مقارنة نتائج المثالين (٧,٥) و (٧,٦) مع تلك التي يحصل عليها بحل التمرينين ٤ و ح٢ و ذلك باستخدام طريقة نيوتن.

الجدول رقم (٧,٤). النتائج العددية للمثال (٧,٦).

k	x_1	x_2	$\lvert f_1 \rvert$	$\lvert f_2 \rvert$
0	1.500000	1.500000	0.250000	1.875000
1	1.220780	1.490261	0.000095	0.329070
2	1.157802	1.469229	0.000830	0.082370
3	1.136492	1.461752	0.000227	0.006154
4	1.134755	1.461083	0.000008	0.000105
5	1.134724	1.461069	0.000000	0.000001

(٧,٤) تمارين

Exercises

١ - اعتبر استخدام طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$

$$x_1^3 - x_2 = 0$$

والمعرف على المجموعة $D = \{[x_1, x_2]^T \mid 1 \le x_1 \le 2,\ 1 \le x_2 \le 2\}$.

وذلك باستخدام الصيغتين التكراريتين:

أ) $$g_1(\mathbf{x}) = x_2^2 - 1$$
$$g_2(\mathbf{x}) = x_1^3$$

ب) $$g_1(\mathbf{x}) = x_2^{1/3}$$
$$g_2(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1 + 1}$$

أي الصيغتين أفضل. ولماذا؟ ثم استخدم الصيغة الأفضل لحساب التقريب الثاني وذلك ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}=[1.5,1.5]^T$. احسب الخطأ المضبوط $\|\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{r}\|_\infty$ حيث إن $\mathbf{r}=[1.13472414,1.46106952]^T$ هو الحل المضبوط صحيح حتى تسعة أرقام عشرية معنوية، ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق للحل العددي الذي تحصل عليه.

٢- ليكن لدينا النظام غير الخطي:

$$2x_1 - e^{x_2} = -1$$
$$2x_1^2 + e^{-x_2} = 4$$

المعرف على المجموعة $D=\{(x_1,x_2)\,|\,1\le x_1\le 2,\ 1\le x_2\le 2\}$.

أ) أوجد صيغة تكرارية مناسبة لحل هذا النظام.

ب) ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}=[1.5,1.5]^T$، استخدم الصيغة التكرارية التي أوجدتها في الفقرة (أ) لحساب التكرار الثاني.

جـ) احسب حداً أعلى لخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه في الفقرة (ب).

د) احسب عدد التكرارات اللازمة، K، للحصول على حل تقريبي بدقة 5×10^{-5}.

٣- استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$5x_1 - \sin x_2 + e^{-x_3} - 1 = 0$$
$$x_1^2 - 16x_2^2 + \cos x_3 + 1 = 0$$
$$e^{-x_1x_2} - 15x_3 = 0$$

والمعرف على المجموعة $D=\{[x_1,x_2,x_3]^T\,|\,-1\le x_i\le 1,\ i=1,2,3\}$.

أ) أوجد صيغة تكرارية مناسبة.

ب) استخدم الصيغة التكرارية التي أوجدتها في الفقرة (أ) لحساب التكرار الثاني وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

جـ) احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب $\mathbf{x}^{(4)}$.

٤- استخدم طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^3 - x_2 = 0$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5,1.5]^T$ لحساب التقريب الثاني، احسب الخطأ المضبوط. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها أثناء حل التمرين ١. ماذا تلاحظ ؟.

٥- استخدم طريقة نيوتن لحساب التقريب الثاني لحل النظام غير الخطي الموجود في التمرين ٣ وذلك ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

٦- استخدم طريقة نيوتن بالفرق المنتهي لحساب التقريب الثاني للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٤) و ذلك ابتداء من التقريب الابتدائي الموجود في المثال. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في المثال (٧,٤).

٧- استخدم طريقة نيوتن بالفرق المنتهي لحساب التقريب الثاني للنظام غير الخطيَ الموجود في المثال (٧,٥) و ذلك بتقريب التفاضلات الجزئية باستخدام الصيغة العددية المركزية (5.13) والموجودة في الفصل الخامس. قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في المثال (٧,٥).

٨- استخدم طريقة برويدن لحل النظام غير الخطي:

$$x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0$$
$$x_1^4 - x_2 = 0$$

وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [1.3,1.5]^T$. احسب التقريب الثاني، ثم قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في المثال (٧,٤).

٩- لعل أبسط تعديل لطريقة نيوتن هو عدم حساب مصفوفة جاكوبي عند كل تكرار وإنما حسابها عند تكرارات محدودة، يمكن وصف هذا الأسلوب كما يلي: لنفترض أنه تم حساب مصفوفة جاكوبي عند كل تكرار k، فإنه يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن بالشكل:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(lk)})\mathbf{y}^{(lk+j)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(lk+j)})$$
$$\mathbf{x}^{(lk+j+1)} = \mathbf{x}^{(lk+j)} + \mathbf{y}^{(lk+j)}$$

من أجل $j = 0,1,2,\dots,k-1$ و $l = 0,1,2,\dots$. استخدم هذه الطريقة لحل المسألة: الموجودة في المثال (٧,٥) وذلك بحساب مصفوفة جاكوبي عند كل ثلاثة تكرارات، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في المثال.

١٠- إحدى المشاكل التي تواجهنا عند استخدام طريقة نيوتن هي اختيار التقريب الابتدائي $\mathbf{x}^{(0)}$؛ حيث إن الطريقة تتطلب أن يكون هذا المتجه قريب (نسبياً) إلى الحل المضبوط $\mathbf{r}$ من أجل ضمان التقارب. الطريقة المعدّلة لطريقة نيوتن والتي تعالج هذه المشكلة يمكن طرحها كالتالي:

اعتبر طريقة نيوتن بالشكل التالي:

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{y}^{(k)}$$

حيث إن $0 < \theta$ عدد ما. لاحظ أنه عندما تكون $\theta = 1$ فإن هذه الصيغة تصبح طريقة نيوتن وأن هذه القيمة لـ θ قد لا تكون الأفضل. بالمقابل، يمكن اختيار θ التي تُصغّر المعيار:

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{y}^{(k)}) \|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} [f_i(\mathbf{x}^{(k)} + \theta\mathbf{y}^{(k)})]^2$$

استخدم هذه الطريقة لحل المسألة الموجودة في المثال (٧,٥). ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها مع تلك الموجودة في المثال.

[**تلميح:** لحساب قيمة θ سيكون لديك عند كل تكرار كثيرة حدود بالمتغير θ، ولتكن $P(\theta)$، بالتالي يمكن حساب القيمة المطلوبة لـ θ بحل المعادلة غير الخطية $P'(\theta) = 0$ باستخدام طريقة نيوتن. لمزيد من المعلومات حول هذه الطريقة راجع كتاب Dennis and Schnabel]

تمارين الحاسب

ح١– استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$2x_1 - e^{x_2} = -1$$
$$2x_1^2 + e^{-x_2} = 4$$

احسب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5, 1.5]^T$.

تلميح: يمكنك استخدام الصيغة التكرارية المناسبة التي أوجدتها في التمرين ٢.

ح٢ – استخدم طريقة نيوتن لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-6} للنظام غير الخطي الموجود في التمرين ٤.

ح٣ – استخدم طريقة نيوتن بالفرق المنتهي لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٤). قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٧,٤).

ح٤ – استخدم طريقة برويدن لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} للنظام غير الخطي الموجود في المثال (٧,٤). قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٧,٤).

ح٥ – استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل النظام غير الخطي:

$$5x_1 - \sin x_2 + e^{-x_3} - 1 = 0$$
$$x_1^2 - 16x_2^2 + \cos x_3 + 1 = 0$$
$$e^{-x_1 x_2} - 15x_3 = 0$$

احسب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} وذلك ابتداء من $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.

تلميح: يمكنك الاستفادة من الصيغة التكرارية المناسبة التي أوجدتها في التمرين ٣.

ح٦ – استخدم طريقة نيوتن لحساب حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} للنظام غير الخطي:

$$2x_1 - x_2 + \frac{1}{128}(x_1 + 1.125)^3 = 0$$
$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} + \frac{1}{128}(x_i + 1 + \frac{1}{8}i)^3 = 0, \qquad i = 2,3\ldots,6$$
$$-x_6 + 2x_7 + \frac{1}{128}(x_7 + 1.875)^3 = 0$$

وذلك بوضع $\mathbf{x}^{(0)} = [-0.1,-0.1,-0.1,-0.1,-0.1,-0.1,-0.1]^T$.

احسب $F(i) = f(x(i))s(i) + g(x(i))$

الخطوة ١٠: من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$ احسب:

$$a(i,0) = s(i)$$

$$a(i,1) = \frac{1}{h}[s(i+1) - s(i)] - \frac{h}{6}[F(i+1) + 2F(i)]$$

$$a(i,2) = \frac{1}{2}F(i)$$

$$a(i,3) = \frac{1}{6h}[F(i+1) - F(i)]$$

الخطوة ١١: من أجل $i = 1,2,\ldots,N$ اطبع $a(i,3)$ $a(i,2)$ $a(i,1)$ $a(i,0)$ i

(٨,٧) تمارين

Exercises

١- استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = 4y + 4\cosh 1$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

وذلك بوضع $N = 3$. احسب الأخطاء $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1,2,3$ حيث إن $y(x) = \cosh(2x-1) - \cosh 1$ هو الحل المضبوط.

٢- استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = y + 2e^{x-1}$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

وذلك بوضع $N = 4$. قارن الحل العددي الذي تحصل عليه مع الحل المضبوط $y(x) = xe^{x-1}$ عند العقد x_i، من أجل $i = 1,2,3,4$.

٣- استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = -(1+x)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}$$
$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{3}$. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|\, y(x_i) - w_i \,|$ من أجل $i = 1,2$، حيث إن $y(x) = (x-1)e^{-x}$ هو الحل المضبوط.

٤- استخدم طريقة نيمروف Numerov لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين١. احسب الأخطاء المضبوطة $|\, y(x_i) - w_i \,|$ من أجل $i = 1,2,3$، ثم قارِن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١.

٥- استخدم طريقة نيمروف Numerov لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٢. احسب الأخطاء المضبوطة $|\, y(x_i) - w_i \,|$ من أجل $i = 1,2,3,4$، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٢.

٦- اعتبر الدالة $y(x) = u(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$. استخدم هذه الدالة لكتابة المعادلة التفاضلية:

$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ بالشكل $u'' = f(x)u + g(x)$.

٧- استخدم طريقة نيمروف Numerov لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٣. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|\, y(x_i) - w_i \,|$ من أجل $i = 1,2$، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت في التمرين ٣.

٨- اكتب متسلسلة تايلور ذات الدرجة الخامسة للدالتين $u(x_{i-1})$ و $u(x_{i+1})$ ومتسلسلة تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالتين $u''(x_{i-1})$ و $u''(x_{i+1})$ ثم عوّض عن ذلك في المعادلة (8.23) لإثبات أن $t_i = -\frac{1}{240}h^6 u^{(6)}(\eta_i) + O(h^8)$.

٩- اكتب خوارزمية لتنفيذ طريقة الفروق المنتهية لحل مسألة القيم الحدية (8.28).

١٠- استخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة التقاربية الثانية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = 4y + 4\cosh 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\frac{1}{2}) = 0$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{4}$. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1,2,3$، حيث إن $y(x) = \cosh(2x-1) - \cosh 1$ هو الحل المضبوط.

١١- استخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة التقاربية الثانية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = y + e^{x-1}$$

$$y'(0) = e^{-1}, \quad y'(1) = 2$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{4}$. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1,2,3$، حيث إن $y(x) = xe^{x-1}$ هو الحل المضبوط.

١٢- استخدم صيغة النقطتين التي درسناها في الفصل الخامس لتقريب التفاضلين $y'(a)$ و $y'(b)$ الموجودين في الشروط الحدية (8.28b)، ثم استنتج الطريقة العددية لحل مسألة القيم الحدية (8.28). ماهي رتبة التقارب للطريقة التي أوجدتها ؟.

١٣- استخدم الطريقة العددية التي أوجدتها في التمرين السابق لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١٠ ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٠.

١٤- استخدم الطريقة العددية التي أوجدتها في التمرين ١٢ لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٦) وذلك بوضع $N = 3$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة

وقارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٨,٦).

١٥- استخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية:

$$y'' = y^3$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

وذلك بوضع $N = 3$. احسب التكرار الثاني في طريقة نيوتن، أي $\mathbf{w}^{(2)}$. ثم احسب الخطأ $| y(x_i) - w_i^{(2)} |$ من أجل $i = 1,2,3$ حيث إن $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

١٦- اعتبر استخدام طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية (8.55) اكتب عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$ والطرف الأيمن $\mathbf{b}$ في المعادلة (8.63).

١٧- استخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٨) وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب الحل التقريبي عندما $x = 0.1$ و $x = 0.25$ ثم احسب الخطأ المرافق لكل تقريب وقارن ذلك بالنتائج التي حصلنا في المثال (٨,٧). ماذا تلاحظ؟

١٨- استخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0,1,2,3$. أكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1,2,3,4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $| y(x_i) - W_3(x_i) |$ حيث إن:

$y(x) = \cosh(2x - 1) - \cosh 1$.

١٩- أعد حل التمرين السابق وذلك باختيار دوال القاعدة $\varphi_0(x) = 0$ و $\varphi_j(x) = x^j(1-x)$ من أجل $j = 1,2,3$. احسب قيم تقريبية للحل عند

$x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1,2,3,4$ ثم قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين السابق.

٢٠- استخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٢ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0,1,2,3$. اكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1,2,3,4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن $y(x) = xe^{x-1}$.

٢١- اعتبر استخدام طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية (8.55) اكتب عناصر المصفوفة $\mathbf{A}$ والطرف الأيمن $\mathbf{b}$ في المعادلة (8.63).

٢٢- أوجد التكاملات الموجودة في المعادلتين (8.71) و (8.72) ثم احسب قيم الثابتين c_2 و c_3 .

٢٣- استخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٩) وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب الحل التقريبي عندما $x = 0.1$ و $x = 0.25$ ثم احسب الخطأ المرافق لكل تقريب وقارن ذلك بالنتائج التي حصلنا في المثال (٨,٧). ماذا تلاحظ؟.

٢٤- استخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0,1,2,3$. اكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1,2,3,4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن:

$y(x) = \cosh(2x-1) - \cosh 1$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٨.

٢٥- استخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٢ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0,1,2,3$. اكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1,2,3,4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن: $y(x) = \cosh(2x-1) - \cosh 1$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٢٠.

٢٦- اكتب متسلسلة تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالتين $y(x_{i-1})$ و $y(x_{i+1})$ ومتسلسلة تايلور ذات الدرجة الأولى للدالتين $y''(x_{i-1})$ و $y''(x_{i+1})$ ثم عوّض عن ذلك في المعادلة $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{h^2}{6}[y''_{i-1} + 4y''_i + y''_{i+1}] + t_i$ لإثبات أن الخطأ المحلي المقطوع لمعادلة الفروق (8.81) هو:

$$t_i = -\frac{1}{12}h^4 y^{(4)}(\eta_i) + O(h^6).$$

٢٧- استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = y + 1$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

وذلك بوضع $N = 1$ ، ثم استخدم حل دالة الشريحة الذي تحصل عليه لحساب قيماً تقريبية للحل المضبوط $y(x)$ وتفاضليه $y'(x)$ و $y''(x)$ عندما $x = 0.25$ $x = 0.5$ ، و $x = 0.75$. قارن هذه القيم مع القيم المضبوطة علماً بأن الحل المضبوط هو: $y(x) = \frac{\sinh x + \sinh(1-x)}{\sinh 1} - 1$.

٢٨- استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,١٠) وذلك بوضع $N = 2$. احسب قيماً تقريبية للحل وتفاضليه الأول والثاني عند $x = 0.75$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٨,٩).

٢٩- استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٤) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند العقد x_i ، $i = 1,2,3$ قارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٨,٥). ماذا تلاحظ؟.

٣٠- استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند العقد x_i ، $i = 1,2,3$ قارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في هذا المثال.

٣١- استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٨) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند $x = 0.1$ و $x = 0.25$ وقارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في المثالين (٨,٧) و(٨,٨).

٣٢- استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل وتفاضليه الأول والثاني عند العقد x_i ، $i = 1,2,3$. ثم قارن القيم التقريبية للحل عند هذه العقد مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١. ماذا تلاحظ ؟.

٣٣- اعتبر دالة الشريحة التربيعية $s(x) = Q_i(x)$ لكل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ من أجل:

$i = 0,1,2,\ldots,N$ ، حيث إن x_i كما هي معرفة في المعادلة (8.7) و

$$Q_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i1}(x - x_i)^2 \qquad (8.87)$$

من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$ ، حيث إن a_{i0} ، a_{i1} و a_{i2} من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$ ثوابت حقيقية. بالتالي يكون لدينا $s(x) \in C^2[a,b]$. ولتكن s_i قيمة تقريبية لـلحل $y(x)$ عند $x = x_i$ تم الحصول عليها بواسطة كثيرة الحدود $Q_i(x)$ والتي تمر خلال النقطتين (x_i, s_i) و (x_{i+1}, s_{i+1}) . استخدم العلاقات:

$$Q_i(x_i) = s_i, \qquad Q_i(x_{i+1}) = s_{i+1}$$
$$Q_i''(x_i) = \frac{1}{2}[F_i + F_{i+1}]$$

لكتابة الثوابت a_{i0}، a_{i1} و a_{i2} كدوال بـ s_i، s_{i+1}، F_i و F_{i+1}. ثم استخدم خاصية الاتصال $Q'_{i-1}(x_i) = Q'_i(x_i)$ لإثبات أن:

$$s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1} = \frac{h^2}{6}[F_{i-1} + 4F_i + F_{i+1}]$$

من أجل $i = 1,2,\ldots,N$، حيث إن $F_j = f_j s_j + g_j$. بناء عليه فإنه بحل هذا النظام الخطي (إذا كانت المسألة خطية) يمكن معرفة قيم الثوابت a_{i0}، a_{i1} و a_{i2} وبالتالي حل دالة الشريحة (8.87) من أجل $i = 0,1,2,\ldots,N$. أوجد الخطأ المحلي المقطوع لهذه الطريقة. ما هي رتبتها التقاربية؟.

٣٤- استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية الموضحة في التمرين السابق لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٢٧. ثم استخدم حل دالة الشريحة الذي تحصل عليه لحساب قيماً تقريبية للحل المضبوط $y(x)$ وتفاضله $y'(x)$ عندما $x = 0.25$، $x = 0.5$ و $x = 0.75$. احسب الأخطاء $|y(x) - s(x)|$ و $|y'(x) - s'(x)|$ عند هذه القيم لـ x. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٢٧.

٣٥- استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند العقد x_i ، $i = 1,23$ قارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في هذا المثال.

٣٦- استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٨) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند $x = 0.1$ و $x = 0.25$ وقارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في المثالين (٨,٧) و(٨,٨).

تمارين الحاسب

ح١ – استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية (8.12) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ و ذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟. هل يمكن الاستنتاج من النتائج العددية أن معدل تقارب الطريقة يكون تربيعياً؟.

ملاحظة:

راجع البندين (٥,٢ و ٥,٣) وتمارين الفصل الخامس.

ح٢ – استخدم طريقة نيوميروف (8.23) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ و ذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟. هل يمكن الاستنتاج من النتائج العددية أن معدل تقارب الطريقة يكون رباعياً ؟.

ح٣ – استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية (8.12) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١١ و ذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟.

ح٤ – استخدم طريقة نيوميروف (8.23) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١١ و ذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟. هل يمكنك استخدام صيغة عددية ذات رتبة تقاربية رابعة لتقريب التفاضل الأول الموجود في الشروط الحدية. تلميح: راجع الصيغ العددية الموجودة في الفصل الخامس.

ح٥ – استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{20}$، بالتتالي. ثم احسب $\max_i |y^{(m)}(x_i)-s^{(m)}(x_i)|$، من أجل $m=0,1,2$. ماذا تلاحظ؟.

ح٦ – استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{16}$. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة (فقط عند العقد x_i ، $i=1,2,\dots,N$).

ح٧ – استخدم طريقة دالة الشريحة التكعيبية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{16}$. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة (فقط عند العقد x_i ، $i=1,2,\dots,N$).

ح٨ – استخدم طريقة نيوميروف لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{1}{16}$. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة.

* بالنسبة للتمارين ح٦ – ح٨ قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في المثال (٨,٧). ماذا تلاحظ؟.