تمثيل هيزنبرج في ميكانيكا الكم
Heisenberg approach of quantum mechanics
أو التمثيل المصفوفي في ميكانيكا الكم
or Matrix formulation of quantum mechanics

أولاً: مقدمة:

يمكن الحصول على نفس النتائج التى تعطيها نظرية شرودنجر باستخدام نظرية اخرى تسمى نظرية هيزنبرج لاتستخدم الدوال الموجبة على الاطلاق بالرغم من تطابق النتائج النهائية لكلتا النظريتين وهذا يعتبر تأييداً لما سبق ذكره وهو أن الدالة الموجبة في نظرية شرودنجر ما هي إلا مجرد أداة رياضية لدراسة الأنظمة الكمية.

فى نظرية هيزنبرج تمثل الكميات الديناميكية مثل المسافة وكمية الحركة وطاقة الحركة بمصفوفات. وتصاغ هذه الكميات فى الصورة الكمية بإستخدام قاعدة عدم التحديد لهيزنبرج فى صورة علاقات مبادلة بين المصفوفات. ولما كانت قاعدة عدم التحديد وفروض دى برولى متكافئة فإن نتائج نظريتى شرودنجر وهيزنبرج متكافئتان.

ومن الناحية التاريخية فإن نظرية هيزنبرج والتي أسسها كل من هيزنبرج وبورن وجوردن سابقة لنظرية شرودنجر. وقد برهن شرودنجر عام 1926 علي تكافؤ الصورة الموجية والصورة المصفوفية.

ويشترط بالطالب أن يكون على معرفة مسبقة بالجبر الخطي "جبر المصفوفات" ولذلك سنسرد أولاً مراجعة سريعة لأهم النقاط لتي نحتاجها هنا من المصفوفات.

ثانياً: جبر المصفوفات:

I- المصفوفة "Matrix":

المصفوفة A عبارة عن تنظيم عددي "ترتيب من مجموعة أعداد قد تكون حقيقية أو مركبة" مؤلف من $m\times n$ عنصراً مرتبة في جدول مستطيل مكون من m صفاً، n عموداً حيث $m, \ n$ عددان طبيعيان، وتكون رتبة المصفوفة في تلك الحالة هي $m\times n$. وتتبع المصفوفات قواعد جبرية خاصة بها. ونرمز للمصفوفة بحرف كبير A مثلاً وقد تكتب رتبة

المصفوفة كترميز سفلي مثل $A_{m\times n}$، بينما نرمز للعنصر الموجود في الصف j والعمود k بالرمز a_{jk}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{jk} \right]$$

II– العمليات الجبرية علي المصفوفات:

1– التساوي:

المصفوفتان A ,B تكونان متساويتين إذا كانتا من نفس الرتبة " النوع " وكان كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره بالمصفوفة B أي أن:

$$A_{mn} = B_{mn} \quad \leftrightarrow \; a_{ij} = \; b_{ij} \; \forall \; i \, , j$$

2– الجمع والطرح:

جمع وطرح المصفوفات معرف للمصفوفات التي من نفس الرتبة فقط. فالمصفوفتان B, A يمكن جمعهما أو طرحهما إذا كانتا من نفس الرتبة وتكون المحصلة C من نفس الرتبة أيضاً حيث:

$$C_{mn} \; = \; A_{mn} \pm \; B_{mn} \quad ; \; c_{ij} = a_{ij} \; \pm \; \; b_{ij}$$

خواص عملية الجمع:

i- إبدالية: $A+B = B+A$.

ii- دامجة: $A+(B+C) = (A+B)+C$.

iii- يوجد عنصر محايد O "مصفوفة صفرية من نفس الرتبة": $A+O = A$.

iv- لكل مصفوفة A يوجد مصفوفة $(-A)$ معكوس جمعي لها: $A+(-A) = O$.

3– الضرب في عدد λ:

يعرف حاصل ضرب مصفوفة A في عدد λ بأنه المصفوفة الناتجة من ضرب جميع عناصر A في العدد λ.

خواص عملية الضرب في عدد:

i- $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$

ii- $(\lambda+\gamma)A = \lambda A+\gamma A$

iii- $\lambda(\gamma A) = (\lambda\gamma)A$

iv- $\lambda A=O \Leftrightarrow \lambda = 0 \;\; or \;\; A = O$

v- $\lambda A = \lambda B \;\; ; \lambda \neq 0 \Rightarrow A = B$

vi- $1A=A$

4– ضرب مصفوفتين:

الضرب AB للمصفوفتين A, B يكون معرفاً فقط إذا كانت عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B. فإذا كانت A من النوع $m\times n$ وكانت B من النوع $n\times\ell$ فإن حاصل ضربهما C مصفوفة من النوع $m\times\ell$ حيث:

$$C_{m\times\ell} = A_{m\times n} \; B_{n\times\ell}$$

حيث العنصر c_{ij} نحصل عليه بضرب عناصر الصف i من المصفوفه A في عناصر العمود j من المصفوفة B كل في نظيره ثم جمع حواصل الضرب الناتجة أي أن:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj}$$

خواص عملية ضرب مصفوفتين:

i- بوجه عام عملية ضرب مصفوفتين عملية غير إبداليه. فقد يكون الضرب $A_{m\times n}\; B_{n\times\ell}$ معرف في حين الضرب $B_{n\times\ell} A_{m\times n}$ غير معرف. وحتي لو أن $A_{m\times n}\;\; B_{n\times m}$ معرف والضرب $B_{n\times m}\; A_{m\times n}$ معرف أيضاً فإن الناتج في الحالتين مختلف، ففي الحالة الأولي مصفوقة $C_{m\times m}$ وفي الحالة الثانية مصفوفة $D_{n\times n}$.

وكحالة خاصة فإن خاصية الإبدال تكون محققة لعملية ضرب المصفوفتين القطريتين، ويكون ناتج الضرب هو ضرب عناصر القطرين.

بالرغم من أن عملية ضرب مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة عملية غير إبدالية بوجه عام إلا أن:

$$Trace\ AB = Trace\ BA$$

ii- خاصية توزيع الضرب بالنسبة للجمع محققة حيث:

$$(A_{mn} + B_{mn})C_{n\ell} = A_{mn}\,C_{n\ell} + B_{mn}\,C_{n\ell}$$

$$A_{mn}(B_{n\ell} + C_{n\ell}) = A_{mn}\,B_{n\ell} + A_{mn}\,C_{n\ell}$$

iii- قانون الدمج لضرب مصفوفتين محقق:

$$A_{m\ell}(B_{\ell r}\,C_{rn}) = (A_{m\ell}\,B_{\ell r})\,C_{rn} = D_{mn}$$

iv- في حالة المصفوفات المربعة توجد مصفوفة الوحدة I كعنصر محايد لعملية ضرب المصفوفات:

$$A\,I = I\,A = A$$

v- يوجد نظير ضربي A^{-1} للمصفوفة المربعة A بحيث:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

vi- علي عكس ضرب الأعداد الحقيقية من الممكن ضرب مصفوفتين غير صفريتين ويكون الناتج مصفوفة صفرية مثل:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5- تدوير المصفوفة "مدور المصفوفة" "Transposed":

مدور المصفوفة هو تبديل الصفوف إلي أعمدة والأعمدة إلي صفوف ويرمز له بالرمز $\tilde{A}$. ملاحظة: بعض الكتب ترمز لمدور المصفوفة بالرمز A^T أو الرمز $\grave{A}$.

خواص عملية تدوير المصفوفة:

i- $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii- $(kA)^T = k\,A^T$

iii- $(AB)^T = B^T\,A^T$

iv- $(A^T)^T = A$

6- محدد المصفوفة:

هو القيمة العددية للمصفوفة وتعرف قيمة المحدد Δ بأنها مجموع حاصل ضرب عناصر صف "عمود" في العامل المرافق للعنصر A_{jk}:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, A_{jk}$$

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \left| \text{minor of the element } a_{jk} \right|$$

7- مقلوب المصفوفة "معكوس المصفوفة":

إذا كانت المصفوفة المربعة A مصفوفة غير شاذة "محددها Δ لايساوي الصفر" فإنه يوجد لها معكوس "مقلوب أو نظير ضربي" A^{-1} يحقق العلاقة:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

ويمكن حساب معكوس المصفوفة A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{\Delta}$$

خواص عملية معكوس المصفوفة:

i- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ii- $(A^{-1})^{-1} = A$

iii- معكوس المصفوفة القطرية هو مصفوفة قطرية أيضاً عناصرها الغير صفريه هي مقلوب العنصر المقابل له أي أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

8- المصفوفة المميزة والمعادلة المميزة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة رتبتها $n\times n$ وكانت I مصفوفة الوحدة من نفس الرتبة فإن المصفوفة B:

$$B = A - \lambda I$$

تسمي بالمصفوفة المميزة للمصفوفة A حيث λ بارامتر. وتسمي المعادلة:

$$|B| = |A - \lambda I| = 0$$

بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وتكون بوجه عام معادلة من الدرجة n في λ وتسمي جذور هذه المعادلة بالجذور المميزة.

المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة وبذلك يمكن الحصول علي مقلوب المصفوفة A^{-1} وذلك بإيجاد المعادلة المميزة وحلها بعد التعويض عن λ=A.

III- أنواع المصفوفات:

1- المصفوفة المستطيلة "Rectangular Matrix":

إذا كانت $m \neq n$ يقال أن المصفوفة A مصفوفة مستطيلة.

2- المصفوفة الصف "Row Matrix":

إذا كانت $m = 1$ تسمي المصفوفة A صف.

3- المصفوفة العمود "Column Matrix":

إذا كانت $n = 1$ تسمي المصفوفة A عمود.

4- المصفوفة الصفرية "Zero or Null Matrix":

هي مصفوفة من أي رتبة $m \times n$ جميع عناصرها أصفاراً.

5- المصفوفة المربعة "Square Matrix":

إذا كانت $m = n$ تسمي المصفوفة A مصفوفة مربعة. وعناصرها a_{ii} تسمي بعناصر القطر الأساسي "أو عناصر القطر الرئيسى". ومجموع عناصر القطر الأساسي للمصفوفة المربعة يسمي ***أثر*** أو ***مسار*** ***"Trace or Spur"*** أي أن:

$$Trace\ A_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

6- المصفوفة القطرية "Diagonal Matrix":

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا القطر الأساسى فيكون أحد عناصره علي الأقل مغايراً للصفر. "ملاحظة: ضرب المصفوفات القطرية يتبع خاصية الإبدال".

7- المصفوفة القطرية البسيطة "Simple Diagonal Matrix":

هي مصفوفة قطرية يكون فيها جميع عناصر القطر الأساسى متساويه.

8- مصفوفة الوحدة "Unit Matrix":

هي مصفوفة قطرية يكون فيها كل عناصر القطر الأساسى مساويه للواحد الصحيح.

9- المصفوفة المتماثلة "Symmetric Matrix":

هي مصفوفة مربعة تساوي مدورها "المصفوفة البديلة" أي أن:

$$A = \tilde{A}$$

وواضح أن عناصرها تكون متماثلة بالنسبة للقطر الرئيسى.

10- المصفوفة شبه المتماثلة "Skew Symmetric Matrix":

هي مصفوفة مربعة تساوي سالب مدورها "المصفوفة البديلة" أي أن:

$$A = -\tilde{A}$$

وواضح أن عناصر القطر الأساسي في المصفوفة شبه المتماثلة تكون كلها أصفاراً.

11- المصفوفة المرافقة "Complex Conjugate Matrix":

المصفوفة A^* تسمي بالمصفوفة المرافقه للمصفوفة A إذا استبدلنا كل عنصر a_{jk} في المصفوفة A بمرافقه a^*_{jk}.

12- المصفوفة الهيرميتية "Hermitian or Self-adjoint Matrix":

هي مصفوفة مربعة تساوي مرافق مدورها "أو مدور مرافقها" أي أن:

$$A = \tilde{A}^*$$

أو بمعني آخر، فإن المصفوفة الهيرميتيه هي مصفوفة مربعة يكون مرافقها مساوياً لمدورها أي أن:

$$A^* = \tilde{A}$$

وواضح أن عناصر القطر الأساسي في المصفوفة الهيرميتية تكون كلها أعداد حقيقية.

وواضح أن أي مصفوفة متماثلة لاتحتوي علي أعداد مركبة هي مصفوفة هيرميتية.

13- المصفوفة الهيرميتية المتخالفة "Anti Hermitian Matrix":

هي مصفوفة مربعة تساوي سالب مرافق مدورها "أوسالب مدور مرافقها" أي أن:

$$A = -\tilde{A}^*$$

أو بمعني آخر، فإن المصفوفة الهيرميتيه المتخالفة هي مصفوفة مربعة يكون مرافقها مساوياً لسالب مدورها أي أن:

$$A^* = -\tilde{A}$$

وواضح أن عناصر القطر الأساسي في المصفوفة الهيرميتية المتخالفة تكون كلها أصفاراً.

وواضح أن أي مصفوفة شبه متماثلة لاتحتوي على أعداد مركبة هي مصفوفة هيرميتية متخالفة.

14- المصفوفة المتعامدة "Orthogonal Matrix":

هي مصفوفة مربعة معكوسها يساوي مدورها أي أن:

$$A^{-1} = \tilde{A}$$

أو بمعني آخر، فإن حاصل ضرب المصفوفة المتعامدة في مدورها يساوي مصفوفة الوحدة:

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = I$$

15- المصفوفة الوحدوية "Unitary Matrix":

هي مصفوفة مربعة معكوسها يساوي مدور مرافقها أي أن:

$$A^{-1} = \tilde{A}^*$$

أو بمعني آخر، فإن حاصل ضرب المصفوفة الوحدوية في مرافق مدورها يساوي مصفوفة الوحدة:

$$A\,\tilde{A}^* = \tilde{A}^*\,A = I$$

وواضح أن المصفوفة الوحدوية الحقيقية "كل عناصرها أعداد حقيقية" هي مصفوفة متعامدة.

16- مصفوفة العوامل المرافقة "Cofactors Matrix":

المصفوفة $[A_{ij}]$ الناشئة من استبدال كل عنصر في المصفوفة A بالعامل المرافق له. والعامل المرافق A_{ij} للعنصر a_{ij} هو قيمة المحدد الناشئ من حذف الصف i والعمود j من محدد المصفوفة مع أخذ الإشارة المناسبة من القاعدة $(-1)^{i+j}$. واضح أن رتبة مصفوفة العوامل المرافقة تساوي رتبة المصفوفة الأصلية.

17- المصفوفة المرتبطة "Adjoint Matrix":

المصفوفة المرتبطة $adj\ A$ للمصفوفة A هي مدور مصفوفة العوامل المرافقة لها.

18- المصفوفة الشاذة "Singular Matrix":
هي مصفوفة مربعة قيمة محددها Δ تساوي صفراً.

ثالثاً: تمثيل هيزنبرج "التمثيل بالمصفوفات":
كما سبق وأن ذكرنا في المقدمة أنه يمكن دراسة ميكانيكا الكم من خلال تمثيلين أحدهما ميكانيكا شرودنجر من خلال المعادلة التفاضلية المسماه بمعادلة شرودنجر التفاضلية، والآخر من خلال ميكانيكا هيزنبرج التي تكافئ تمثيل شرودينجر ولكن بلغة المصفوفات، تمثل الدالة الموجية "دالة الحالة $\psi(x)$" في هذا التمثيل بمصفوفة ذات عمود واحد ،وتوصف الدالة الموجية المرافقة $\psi^*(x)$ بمصفوفة ذات صف واحد،ويمثل المؤثر بمصفوفة مربعة تتوافق مع عدد عناصر المصفوفة ذات العمود وذات الصف المذكورين أعلاه.

وبالرغم من أن نظرية هيزنبرج تسبق نظرية شرودنجر لكن في هذا الشرح وللسهولة سوف نستنتج نظرية هيزنبرج من خلال نظرية شرودنجر.

يمكن تحويل مسألة القيم الذاتية "eigenvalue problem" مثل معادلة شرودنجر إلي مسألة لحل مجموعة خطية من المعادلات. فلوفرضنا أن معادلة القيم الذاتية هي:

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n \tag{1}$$

حيث: $\hat{H}$ هو مؤثر شرودنجر التفاضلي، ψ_n هي مجموعة الدوال الذاتية، E_n مجموعة القيم الذاتية. وحيث أن الدالة ψ_n يمكن وصفها كمتسلسلة للأساس Φ_j "Φ_j مجموعة متكاملة ومتعامدة ومسواة complete orthonormal set"، حيث الأساس Φ_j هو مجموعة لانهائية تمثل الدوال الذاتية لمؤثر تفاضلي آخر $\hat{A}$ قيمه الذاتية هي a_j أي أن:

$$\hat{A}\Phi_j = a_j\Phi_j \tag{2}$$

وبالتالي تكون صورة ψ_n في الأساس Φ_j كالآتي:

$$\Psi_n = \sum_j c_{nj}\Phi_j \tag{3}$$

بالتعويض من (3) في (1) نحصل علي:

$$\sum_j c_{nj}\hat{H}\Phi_j = E_n\sum_j c_{nj}\Phi_j \tag{4}$$

بضرب العلاقة (4) من اليسار في $\boldsymbol{\Phi_i^*}$ ثم إجراء التكامل علي كل الفراغ نحصل علي:

$$\sum_j c_{nj}\int \Phi_i^*\,\hat{H}\,\Phi_j\,d\tau = E_n \sum_j c_{nj}\int \Phi_i^*\,\Phi_j\,d\tau \tag{5}$$

وبتطبيق شرط التعامد والمسواة لدوال الأساس $\boldsymbol{\Phi_j}$ نحصل علي:

$$\sum_j c_{nj}\,H_{ij} = E_n\,c_{ni} \tag{6}$$

حيث:

$$H_{ij} = \int \Phi_i^*\,\hat{H}\,\Phi_j\,d\tau \tag{7}$$

والعلاقة (6) صحيحة لكل قيم $\boldsymbol{i}$ وهي تمثل مجموعة معادلات خطية علي الصورة:

$$\begin{matrix} H_{11}c_{n1} + H_{12}c_{n2} + H_{13}c_{n3} + \cdots = E_n c_{n1} \\ H_{21}c_{n1} + H_{22}c_{n2} + H_{23}c_{n3} + \cdots = E_n c_{n2} \\ H_{31}c_{n1} + H_{32}c_{n2} + H_{33}c_{n3} + \cdots = E_n c_{n3} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots = \quad \vdots \end{matrix} \tag{8}$$

ومجموعة المعادلات (8) لانهائية ويمكن تمثيلها بالمصفوفات كالآتي:

$$\mathscr{H}\,\psi_n = E_n\,\psi_n \tag{9}$$

حيث:

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \cdots \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \left[\,H_{ij}\,\right]$$

$$\psi_n = \begin{bmatrix} c_{n1} \\ c_{n2} \\ c_{n3} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

مجموعة المعادلات (9) لها حل غير صفري فقط وإذا كان فقط محدد المصفوفة المميزة للمصفوفة $\mathscr{H}$ مساوياً للصفر. ولتعيين القيم المميزة E_n للمؤثر المصفوفة $\mathscr{H}$ نحل المعادلة المميزة للمصفوفة $\mathscr{H}$ والتي علي الصورة:

$$\left|\mathscr{H} - E\, I\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} H_{11}-E & H_{12} & H_{13} & \cdots \\ H_{21} & H_{22}-E & H_{23} & \cdots \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-E & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

ولكل قيمة من القيم الذاتية يكون للعلاقة (9) حلاً يمثل الدالة الذاتية لتلك القيمة.

ولنفهم ذلك بوضوح دعنا نضرب مثال مبسط.

مثال:

إذا كان المؤثر $\hat{H}$ في تمثيل هيزنبرج هو المصفوفة $\mathscr{H}$ حيث:

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أولاً أن المؤثر $\hat{H}$ مؤثر هيرميتي لأن المصفوفة $\mathscr{H}$ مصفوفة هيرميتية حيث:

$$\mathscr{H} = \tilde{\mathscr{H}}^*$$

ولتعيين كل من القيم الذاتية والدوال الذاتية لهذا المؤثر، نبدأ بحل المعادلة المميزة لمصفوفة المؤثر $\mathscr{H}$:

$$\left|\mathscr{H} - E\, I\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -E & 1 \\ 1 & -E \end{vmatrix} = E^2 - 1 = 0$$

$$E = \pm 1$$

أي أن المؤثر $\mathscr{H}$ لـه قيمتـان ذاتيتـان همـا: $E_1 = 1\ ,\ E_2 = -1$ ،وللحصـول علـي الدالـة الذاتيـة المقابلة للقيمة الذاتية $E_1 = 1$ نعوض عن كل من $\psi_1, E_1, \mathscr{H}$ في العلاقة (9):

$$\mathscr{H}\,\psi_1 = E_1\,\psi_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \psi_1 = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولتعيين قيمة c نستخدم شرط تعامد الدالة ψ_1:

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1 \quad \rightarrow \quad c\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2c^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1/\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \psi_1 = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالمثل للحصول علي الدالة الذاتية ψ_2 المقابلة للقيمة الذاتية $E_2 = -1$ نعوض عن كل من $\psi_2,$ $E_2, \mathscr{H}$ في العلاقة (9):

$$\mathscr{H}\,\psi_2 = E_2\,\psi_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \psi_2 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ولتعيين قيمة c نستخدم شرط تعامد الدالة ψ_2:

$$\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1 \quad \rightarrow \quad c\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2c^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1/\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \psi_2 = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن كل من ψ_1 ، ψ_2 متعامدتان ومسوتان حيث:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$