جامعة الملك سعود King Saud University كلية العلوم - قسم الرياضيات	الإختبار النهائي للمقرر 151 ريض الفصل الثاني 1437/1436هـ الزمن: 3ساعات

السؤال الأول:(6 درجات)

(أ) اثبت أن: $\neg p \vee (q \to r) \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$. (3 درجات)

(ب) أثبت أن $(u \wedge w) \to [v \to (u \wedge v \wedge w)]$ مصدوقة. (3 درجات)

السؤال الثاني:(5 درجات)

(أ) استخدم المكافئ العكسي لإثبات ما يلي:

" إذا كان $4n^2+n-3$ عددًا زوجيا فإن n عدد فردي". (درجتان)

(ب) أثبت أن: العدد 3 يقسم $[n(n+1)(n+2)]$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$. (3 درجات)

السؤال الثالث:(9 درجات)

(أ) لتكن R علاقة معرفة على $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,....\}$ كما يلي:

$m\ R\ n \Leftrightarrow m\ n$ يقبل القسمة على 6 .

بيّن فيما إذا كانت R انعكاسية, تناظرية, تخالفية, متعدية. (4 درجات)

(ب) لتكن S علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ كما يلي :

$aS\ b \Leftrightarrow a-b$ عدد صحيح زوجي.

(i) أثبت أن S علاقة تكافؤ. (3 درجات)

(ii) أثبت أن $[0]=[m]$ لكل عدد صحيح زوجي m و أن $[1]=[n]$ لكل عدد صحيح فردي n. (درجتان)

السؤال الرابع:(8 درجات)

لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy		1	1	1
xy'		1	1	1
$x'y'$				1
$x'y$				

(i) اكتب f على شكل CSP. (درجة واحدة)

(ii) اكتب f على شكل MSP. (درجتان)

(iii) اكتب f على شكل MPS. (درجتان)

(iv) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها الدالة f . (درجة واحدة)

(v) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي العطف فقط. (درجة واحدة)

(vi) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة f باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة واحدة)

السؤال الخامس :(12 درجة)

(أ) هل يوجد رسم درجات رؤوسه $0,1,1,2,3,4,5,5$ ؟ لماذا ؟ (درجة واحدة)

(ب) هل يوجد رسم بسيط درجات رؤوسه $1,2,3,3,5,6$ ؟ لماذا ؟ (درجة واحدة)

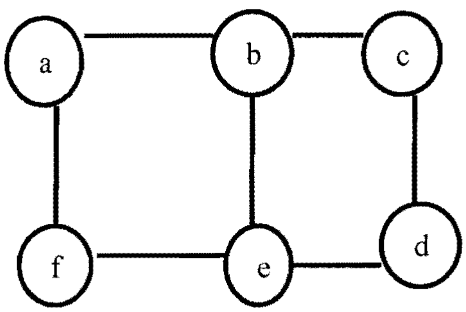
(ج) ليكن G رسما بسيطا ممثلا بمصفوفة التجاور أدناه :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

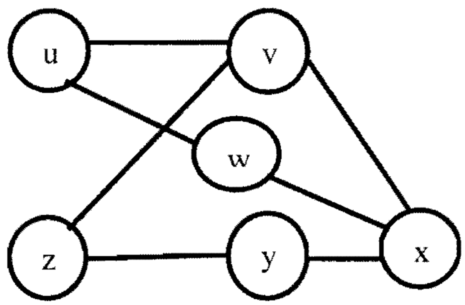
(i) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\overline{G}$ لـ G. (درجتان)

(ii) هل G ذاتي التتميم ؟ لماذا ؟ (درجة واحدة)

(د) بيّن فيما إذا كان الرسمان التاليان G,H متماثلين أم لا. (درجتان)



G

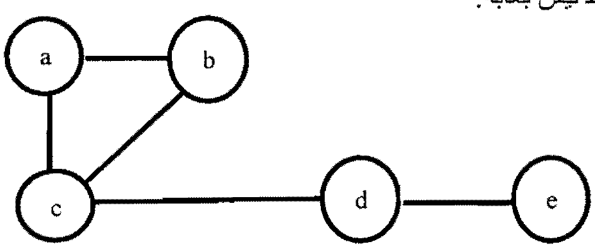


H

(هـ) إذا كان عدد رؤوس $K_{n,n}$ يساوي عدد أضلاعه, فأوجد n . (درجة واحدة)

(و) إعط مثالاً عن رسم بسيط ليس بغابة. (درجة واحدة)

(ز) للرسم المقابل:



(i) أوجد شجرة تقصي عرضي جذرها d . (درجة و نصف)

(ii) أوجد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها d . (درجة و نصف)

تصحيح الاختبار الثاني ١٥١ ريض للفصل الثاني ١٤٣٦/١٤٣٧هـ

السؤال الأول (6 درجات)

(أ)

$$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$$
$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee r \vee r$$
$$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$$
$$\equiv \neg p \vee (q \to r)$$

(3 درجات)

(ب)

$$(u \wedge w) \to [v \to (u \wedge v \wedge w)] \equiv$$
$$(u \wedge w) \to [\neg v \vee (u \wedge v \wedge w)] \equiv$$
$$\neg(u \wedge w) \vee [\neg v \vee ((u \wedge w) \wedge v)] \equiv$$
$$\neg(u \wedge w) \vee [(\neg v \vee (u \wedge w)) \wedge \underbrace{(\neg v \vee v)}_{T}] \equiv$$
$$\neg(u \wedge w) \vee [(\neg v \vee (u \wedge w)] \equiv$$
$$\underbrace{\neg(u \wedge w) \vee (u \wedge w)}_{} \vee \neg v \equiv$$
$$T \vee \neg v \equiv T \quad (\text{صدوقة})$$

(3pts)

السؤال الثاني (5 درجات)

(أ) المكافئ العكسي هو " إذا كان n عدداً زوجياً فإن $(4n^2+n-3)$ هو فردي" (1)

الإثبات: بما أن n زوجياً إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $n=2k$

عندئذ

$$4n^2+n-3 = 4(2k)^2+2k-3$$
$$= 16k^2+2k-4+1$$
$$= 2\underbrace{[8k^2+k-2]}+1$$
$$= 2m+1$$

(1)

يعني $(4n^2+n-3)$ هو فردي.

(ب) نفرض $P(n) : 3 \mid [n(n+1)(n+2)]$

• خطوة الأساسية: $n=1$; $3 \overset{?}{\mid} 1(1+1)(1+2)=6$ صح إذن $P(1)$ صائب.

(1) • خطوة الاستقراء: لنأخذ $k \geq 1$. فلنفترض أن $P(k)$ صائب

(يعني $3 \mid k(k+1)(k+2) \iff$ يوجد عدد صحيح c بحيث $k(k+1)(k+2)=3c$)

ولنثبت صحة $P(k+1)$. ($3 \overset{?}{\mid} (k+1)(k+2)(k+3)$)

(2) $$((k+1)(k+2))(k+3) = \underbrace{k(k+1)(k+2)} + 3(k+1)(k+2)$$

$$= 3c + 3(k+1)$$

$$= 3(c+k+1) = 3L$$

إذاً $3 \mid (k+1)(k+2)(k+3)$ يعني $P(k+1)$ صائب

باستخدام المبدأ الأول للاستقراء نستنتج أن $P(n)$ صائب لكل $n \geq 1$.

السؤال الثالث (9 درجات)

(أ) • R ليست انعكاسية لأنها لا تحتوي على العلاقة القطرية مثلاً $1 \not R 1$.

(1) • R تناظرية لأن عندما نأخذ $m,n \in \mathbb{Z}^+$ ونفترض أن mRn

(1) عندئذ $6 \mid m.n \iff 6 \mid n.m \implies nRm$.

(1) • R ليست تخالفية لأن $4R3$ و $3R4$ لكن $3 \neq 4$.

(1) • R ليست متعدية لأن $3R4$ و $4R9$ لكن $3 \not R 9$.

(ب) (i). S انعكاسية على $\mathbb{Q}$ لأن عندما نأخذ $a \in \mathbb{Q}$ لدينا $a-a=0$ وهو عدد زوجي

(1) إذن aSa.

• S تناظرية على $\mathbb{Q}$ لأن عندما نأخذ $a,b \in \mathbb{Q}$ ونفترض أن aSb

عندئذ $a-b=2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ فإن $b-a=2(-k)$ هو أيضاً عدد زوجي.

(1) يعني bSa.

• S متعدية على $\mathbb{Q}$ لأن عندما نأخذ $a,b,c\in\mathbb{Q}$ ونفترض أن

aSb و bSc فان $a-b=2k$ و $b-c=2l$ بالجمع $a-c=2(k+l)$ هو أيضا زوجي (1)

إذا aSc

← بما أن S انعكاسية، تناظرية ومتعدية على $\mathbb{Q}$ فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Q}$.

(ii)

$$[0]=\{a\in\mathbb{Q} \mid aS0\}$$

(1) $[0]=\{a\in\mathbb{Q} \mid$ هو عدد زوجي $a\}$

$[0]=[m]$ لكل m عدد زوجي لدينا

$$[1]=\{a\in\mathbb{Q} \mid aS1\}$$

(1) $=\{a\in\mathbb{Q} \mid (a-1)$ هو زوجي $\}$

$[1]=\{a\in\mathbb{Q} \mid$ هو فردي $a\}=[n]$ لكل n عدد فردي

السؤال الرابع (8 درجات)

(i)

(1) $$CSP(f)=xyzw'+xyz'w'+xyz'w+xy'zw'+xy'z'w'+xy'z'w+x'y'z'w.$$

(ii)

(2) $$\boxed{MSP(f)=xw'+xz'+y'z'w}$$

(iii)

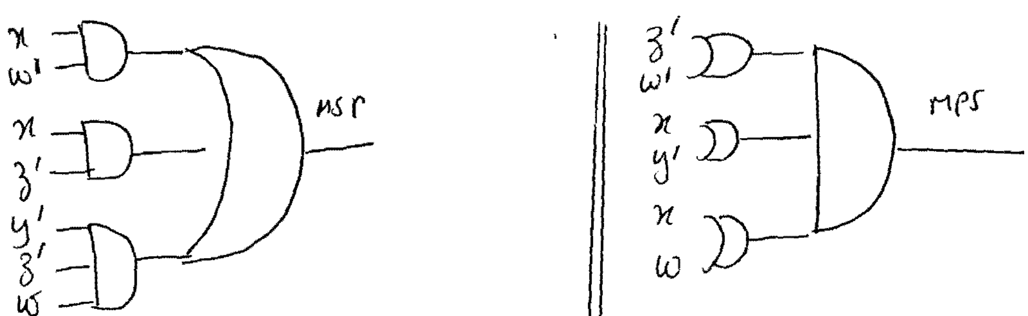
$$MPS(f)=(MSP(f'))'$$

$$MSP(f')=zw+x'y+x'w'.$$

(2) $$\boxed{MPS(f)=(z'+w')(x+y')(x+w)}$$

(iv)

(1)

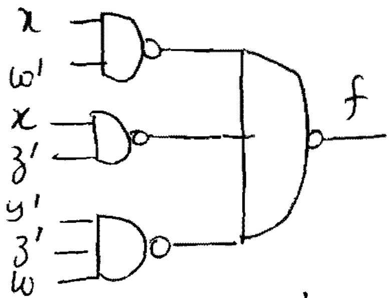


كلاهما تحتوي على 4 بوابات فصل ووصل إذن كلاهما تعتبر

(v)

$$MSP(f) = xw' + xz' + y'z'w$$
$$\equiv \left[(xw' + xz' + y'z'w)'\right]'$$
$$= \left[(xw')' \cdot (xz')' \cdot (y'z'w)'\right]'$$

1

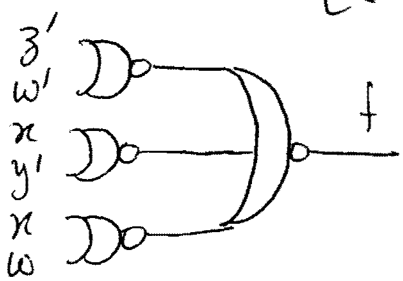


شبكة نفي العطف مخرجها f

(vi)

$$MPS(f) = (z'+w')(x+y')(x+w)$$
$$= \left[((z'+w')(x+y')(x+w))'\right]'$$
$$= \left[(z'+w')' + (x+y')' + (x+w)'\right]'$$

1



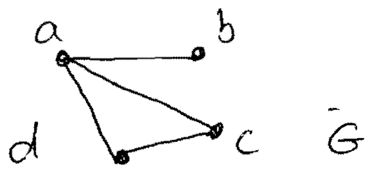
شبكة نفي الفصل مخرجها f

السؤال الخامس (12 درجة)

1 (أ) لا يوجد رسم بمثل المواصفات لأن $\sum_{x \in V(G)} \deg x = 21 \neq 2|E|$

1 (ب) لا يوجد رسم بسيط لأنه إن وجد: لدينا 6 رؤوس فإن درجة رؤوسه لابد أن يكون أقل أو يساوي 5 وليس 6.

(ج) G له 4 رؤوس و 4 أضلاع



2

(د) $G \cup \bar{G} = K_4$ فإن $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |K_4|$

$$4 + |E(\bar{G})| = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

فإن عدد أضلاع الرسم المتمم G هو 2.

(هـ) لا، G ليس ذاتي التتمم لأن $\bar{G} \not\cong G$ (اختلاف في عدد الأضلاع)

1

(ه) نعم $G \simeq H$ لأنه يوجد تطبيق تماثلي f :

2

$x \in V(G)$	a	b	c	d	e	f
$f(x) \in V(H)$	u	v	z	y	x	w

(ط) $K_{n,n}$ عدد رؤوسه $2n$ ، عدد أضلاعه n^2

بما أن عدد رؤوس $K_{n,n}$ يساوي عدد أضلاعه إذا

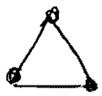
1

$$n^2 = 2n$$

$$n^2 - 2n = n(n-2) = 0$$

$n = 0$ ↯ $\boxed{n = 2}$

(و) غابة هو رسم لا يحتوي على دورات . هذا مثلا

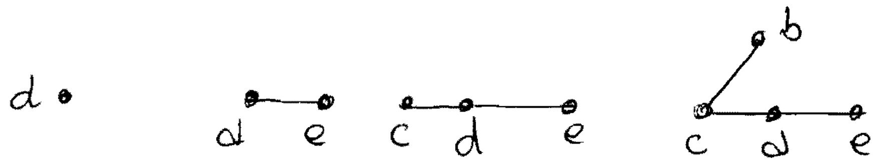


هو رسم بسيط و ليس بغابة .

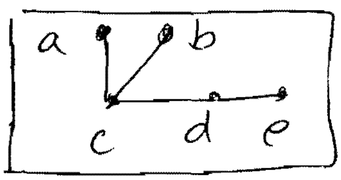
1

(ي)

(i)

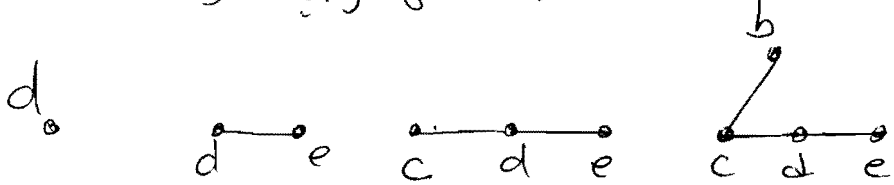


1,5

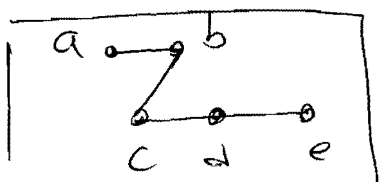


شجرة تقصي عرضي جذرها a.

(ii)



1,5



شجرة تقصي عمقي جذرها a .