King Saud University
جامعة الملك سعود

الاسم: ....................

رقم الجامعي: الإجابة النموذجية

الشعبة: ....................

**الواجب الأول للمقرر 209 ريض للفصل الأول 1443 هـ**

## السؤال الأول (4 درجات)

اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

أ) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{16n^2-2n}}\right\}$ (درجة)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{16n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n\sqrt{1-\frac{2n}{16n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+1/n)}{4\cancel{n}\sqrt{1-\frac{1}{8n}}}$$

1

$$=\frac{1}{4}$$

ب) $\left\{\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right\}$ (درجة و نصف)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(1/n)-1}{\sin(1/n)}=\frac{0}{0}$$

0,5

نضع $t=1/n$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\cos t-1}{\sin t}\overset{\text{قاعدة لوبيتال}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{-\sin t}{\cos t}=\frac{0}{1}=0$$

1

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(1/n)-1}{\sin(1/n)}=0$$

ج) $\left\{\frac{3+\sin n}{e^{3n}}\right\}$ (درجة و نصف)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3+\sin n}{e^{3n}}\right|\le\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{e^{3n}}=0$$

1,5

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\sin n}{e^{3n}}=0$

**السؤال الثاني (4 درجات)**

بيّن ان المتسلسلة التالية متقاربة وجد مجموعها $\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n^2-1}+\frac{3}{5^{n-2}}]$

• باستخدام اختبار نهاية المقارنة $\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\right)$ مع $\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة

1

• $\left(\sum_{n=2}^{\infty}3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right)$ متسلسلة هندسية $-1<r=\frac{1}{5}<1$ متقاربة

وبالتالي $\sum_{n=2}\left[\frac{1}{n^2-1}+\frac{3}{5^{n-2}}\right]$ متقاربة.

لكل $n\neq 1$ $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]$

• $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{N+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N-1}\right)\right]$

$=-\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}-\frac{3}{2}\right]=\frac{3}{4}$

1

• $\sum_{n=2}^{\infty}3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}=3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}=3\frac{1}{1-1/5}=\frac{15}{4}$ 1

فنستنتج أن مجموع $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2-1}+\frac{3}{5^{n-2}}\right]$ هو $9/2$

1

**السؤال الثالث (درجتان)**

اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

ندرس $\sum_{n}\frac{|\tan^{-1}n|}{n^2+1}$ متسلسلة موجبة

نستخدم اختبار المقارنة $\frac{|\tan^{-1}n|}{n^2+1}\leq\frac{\pi/2}{n^2}=b_n$ لكل $n$

وبما أن $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\pi/2}{n^2}=\frac{\pi}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ متقاربة (متسلسلة p حيث $p=2>1$)

2

فإن $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$ متقاربة تقاربا مطلقا

طريقة ثانية ممكن أن نستخدم اختبار التكامل للمتسلسلة.