جامعة الملك سعود
King Saud University

الاسم: ..........................................

الرقم الجامعي: ..........................................

الشعبة: ..........................................

**الاختبار القصير الثاني للمقرر ٢٠٩ ريض للفصل الدراسي الأول ١٤٤٣هـ**

**السؤال الأول (٤ درجات)**

أوجد متسلسلة فورييه للدالة $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

$f$ معرفة على $[-\pi,\pi)$ و متصلة على $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$

إذن تعطى بمتسلسلة فورية لكل $-\pi<x<\pi$ و $x\neq 0$

1 $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

حيث

$$\bullet\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

1 $$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\,dx=\frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi}=1$$

لكل $n\geq 1$

$$\bullet\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$$

1 $$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=0$$

$$\bullet\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{-1}{n\pi}\left[\cos(n\pi)-1\right]$$

1 $$b_n=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

وبالتالي لكل $-\pi<x<0$ ؛ $0=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin(nx)$

ولكل $0<x<\pi$ ؛ $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin(nx)$

**السؤال الثاني (درجتان)**

إذا علمت أنه لكل $-1 \le x \le 1$ ، لدينا متسلسلة فورييه التالية $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$ ،

فاستنتج مجموع المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

بتعويض قيمة $x=0$ في الصيغة $x^2 = 1/3 + \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)\right)$

$$0^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

2

$$-\frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

وبالتالي

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}$$

**السؤال الثالث (٤ درجات)**

أوجد متسلسلة جيب التمام لفورييه (متسلسلة فورييه cosine) للدالة $f$ على الفترة $(0,\pi)$، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}.$$

لكل $x \in (0,\pi)\setminus\{\pi/2\}$

1

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} -1\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 2\,dx\right]$$

1

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[-x\right]_0^{\pi/2} + \left[2x\right]_{\pi/2}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\pi/2 + 2\pi - \pi\right] = 1$$

ولكل $n \ge 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} -\cos(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 2\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi/2}}{n} + \frac{2}{n}\left[\sin(nx)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

2

$$a_n = \frac{-2\sin(n\pi/2)}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left(0 - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{-6}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k; & n = 2k+1 \\ 0; & n = 2k \end{cases}$$

لكل $0 < x < \pi$ و $x \neq \pi/2$

$$f(x) = 1/2 - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\cos(nx)$$