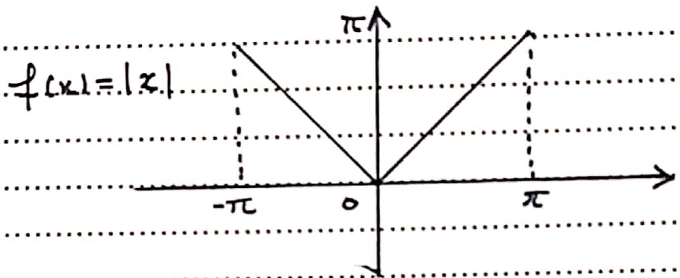
الاسم: .... رقم الجامعي: .... الشعبة:	جامعة الملك سعود King Saud University

الواجب الثاني للمقرر 209 ريض للفصل الثاني 1443 هـ

السؤال الأول (6 درجات)

(1) أوجد متسلسلة فورية للدالة $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ على الفترة $[-\pi, \pi]$.



$T = \pi$

الدالة $f(x)=|x|$ هي دالة زوجية متصلة على $[-\pi,\pi]$ فانها تحظى بمفكوك فورية لكل $-\pi \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

حيث

(1) $$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

ولكل $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x \sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx\right]$$

$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(nx) \quad v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

(2) $$a_n = \left(\frac{+2}{\pi n^2}\right) \cdot \left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2 \pi}$$

وبالتالي لكل $-\pi \le x \le \pi$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx)$$

يعني لكل $-\pi \le x \le \pi$ لدينا :

(1) $$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$$

(2) من خلال الفقرة (1) جد قيمة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

بتعويض x بـ صفر في المتطابقة

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)\right)$$

2

نجد

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

وبالتالي

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

السؤال الثاني (4 درجات)

لتكن $f(x) = 1$ فجد متسلسلة جيب فورية(Fourier sine) للدالة f على الفترة $(0,2)$.

الدالة $f(x)=1$ متصلة على $(0,2)$ فهي تحظى بمتسلسلة جيب فورية

$T=2$

لكل $0<x<2$

1

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

حيث لكل $n\geq 1$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

2

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

وبالتالي لكل $0<x<2$ ،

1

$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} x\right)$$

⚠ عندما $x=1$ ،

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$