تمارين مقرر ٤٨٧ ريض - فصل ١ - ١٤٤٢هـ
الفصل الثاني

١) أوجد صورة المربع الذي رؤوسه $(0,1)$، $(1,1)$، $(1,0)$، $(0,0)$ تحت تأثير كل من الدالتين: (أ) $f(z)=z^2$ (ب) $f(z)=\frac{1}{z+1}$

٢) أوجد قيم z: (أ) $e^{4z}=i$ (ب) $e^{3z}=1$

٣) أثبت أن جذور المعادلة: $\sin(z)=a$ حقيقية حيث $-1\le a\le 1$

٤) أوجد جميع القيم: (أ) $\log(-4)$ (ب) $\log(\sqrt{3}-i)$

٥) أوجد جميع القيم: (أ) $\sin^{-1}(2)$ (ب) $\cos^{-1}(i)$
(ج) $\cosh^{-1}(i)$ (د) $(1+i)^i$ (هـ) $1^{\sqrt{2}}$ (و) $\cosh\left(\frac{\pi i}{2}\right)$

٦) أحسب النهايتين: $\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1}$ ، $\lim_{z\to 1+i}\left[\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right]^2$

٧) أوجد نقاط عدم الاتصال لكل دالة:
(أ) $f(z)=\frac{2z-3}{z^2+2z+2}$ (ب) $f(z)=\cot(z)$
(جـ) $f(z)=\frac{\tanh z}{z^2+1}$

٨) أثبت أن المعادلة: $\tan(z)=(z)$ لها فقط جذور حقيقية.

٩) أثبت أن جميع المقادير $(1-i)^{\sqrt{2}i}$ تقع على خط مستقيم.

الفصل الثاني (عالم) الدوال الأولية

(أ) $e^{4z} = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \Rightarrow 4z = i(\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$ (ج)

$\Rightarrow z = i\cdot(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})$

(ب) $e^{3z} = 1 = e^{i(2k\pi)} \Rightarrow 3z = i\cdot 2k\pi \Rightarrow z = \frac{i\cdot 2k\pi}{3}$

$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = a \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz} = 2ia \Rightarrow e^{2iz}-2iae^{iz}-1=0$ (ب)

$(e^{iz})^2 - 2i\cdot a\, e^{iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = \frac{2ia \pm \sqrt{(2ia)^2-4(-1)}}{2}$

$e^{iz} = \frac{2ia \pm \sqrt{4-4a^2}}{2} = \frac{2ia \pm 2\sqrt{1-a^2}}{2} = ia \pm \sqrt{1-a^2} = e^{i\cdot(\theta+2k\pi)}$ $0\le\theta\le\pi$

$x=\sqrt{1-a^2},\ y=a$ $iz = i\cdot(\theta+2k\pi) \Rightarrow z = \theta+2k\pi \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow -\pi\le\theta\le 0$

(أ) $\log(-4) = \mathrm{Log}(4) + i\arg(-4) = \ln(4) + i\cdot(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$ (د)

(ب) $\log(\sqrt{3}-i) = \ln(2) + i\cdot(-\frac{\pi}{6}+2k\pi) = \ln 2 + i\cdot(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)$

(أ) $\sin^{-1}(2) = \frac{1}{i}\log(2i+\sqrt{1-2^2}) = -i\cdot\log((2+\sqrt{3})i)$ (ه)

$= -i[\ln(2+\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)] = (\frac{\pi}{2}+2k\pi) \pm \ln(2+\sqrt{3})i$

(ب) $\cos^{-1}(i) = \frac{1}{i}\log(i+\sqrt{i^2-1}) = -i\log(i+\sqrt{2}i) = -i\log((1+\sqrt{2})i)$

$= -i[\ln(1+\sqrt{2}) + i\cdot(\frac{\pi}{2}+2k\pi)] = (\frac{\pi}{2}+2k\pi) - \ln(1+\sqrt{2})i$

(ج) $\cosh^{-1}(i) = \log(i+\sqrt{i^2-1}) = \log((\sqrt{2}+1)i) = \cdots$

(د) $(1+i)^i = e^{i\cdot\log(1+i)} = e^{i[\ln\sqrt{2} + i\cdot(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]} = \cdots$

(ه) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(1)} = \cdots$

(و) $\cosh(i\pi/2) = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}+e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2} = \frac{i-i}{2} = 0$

(ب) $f(z) = \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \Rightarrow \sin(z)=0 \Rightarrow z = n\pi$ (٧)

(ج) $\tanh(z) \Rightarrow \cosh(z)=0 \Rightarrow z = (\frac{\pi}{2}+k\pi)i,\ k\in\mathbb{Z}$

$z^2+1=0 \Rightarrow z = i, -i$