① أثبت أن: $\lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{n!}=0$ لكل $z\in\mathbb{C}$

① $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ converges $\forall z\in\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{n!}=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$

---

② أوجد متسلسلة لوران للدالة $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ في كل من الحالات التالية:

(أ) $|z|<1$ (ب) $1<|z|<2$

(ج) $|z|>2$

② (أ) $|z|<1$:

$$=\left(-z+\frac{z}{2}\right)+\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2-z^2\right)+\left(\left(\frac{z}{2}\right)^3-z^3\right)+\cdots$$

(ب) $1<|z|<2$:

$$1+\frac{1}{z}+\left(\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{z^3}\right)+\left(\left(\frac{z}{2}\right)^3+\frac{1}{z^4}\right)+\cdots$$

(ج) $|z|>2$:

$$-\frac{2}{z}+\frac{1}{z}+\left(-\left(\frac{2}{z}\right)^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(-\left(\frac{2}{z}\right)^2+\frac{1}{z^3}\right)+\left(-\left(\frac{2}{z}\right)^4+\frac{1}{z^4}\right)+\cdots$$

س) حدد وصنف كل النقاط الشاذة لكل دالة مما يلي:

أ) $f(z) = \dfrac{1}{(2\sin z - 1)^2}$

ب) $f(z) = \dfrac{z}{e^{1/z} - 1}$

ج) $f(z) = \cos(z^2 + z^{-2})$

د) $f(z) = \tan^{-1}(z^2 + 2z + 2)$

هـ) $f(z) = \dfrac{z}{e^{z} - 1}$

س) أ) $2\sin(z) - 1 = 0 \Rightarrow \sin(z) = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$

$z = -\frac{\pi}{6} + (2n+1)\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}$

قطب من الرتبة الثانية

ب) $i/2m\pi$ ، $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ أقطاب بسيطة

$z = 0$ قابلة للإزالة.

ج) $z = 0$ حتمية (أساسية)

هـ) $2m\pi i$ ، $m \in \mathbb{Z}$ أقطاب بسيطة

$z = 0$ قابلة للإزالة

---

٤) لتكن $f(z)=\frac{\tan^{-1}(z)}{z^4}$:

أ) اكتب متسلسلة لوران للدالة $f(z)$.

ب) حدد منطقة تقارب المتسلسلة في (أ).

ج) أحسب التكامل $\oint_C f(z)dz$ حيث C المربع الذي رؤوسه $2\pm 2i, -2\pm 2i$

٤) أ) $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3z}+\frac{z}{5}-\frac{z^3}{7}+\cdots$

قانون :

$$\tan^{-1}(z)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

$|z|<1$

ب) $|z|>0$

ج) $-\frac{1}{3}$

حل :

$$a_{-1}=\oint_C \frac{f(z)}{(z-0)^{-1+1}}dz$$

$\frac{1}{z-0}$ معامل a_{-1}

$-\frac{1}{3}=$

قانون :

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

$n=0,\pm 1,\pm 2\cdots$

a جوا C

---

⑥ أوجد مجموع المتسلسلة : $1+\cos(\theta)+\dfrac{\cos(2\theta)}{2!}+\dfrac{\cos(3\theta)}{3!}+\dots$

(5) $e^{im\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(im\theta)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n\cdot m^n\theta^n}{n!}$ $\quad i^n=\begin{cases}1, & n=4k\\ +i, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+2\\ -i, & n=4k+3\end{cases}$

$\cos(m\theta)+i\sin(m\theta)=1+i\dfrac{m\theta}{1!}-1\dfrac{m^2\theta^2}{2!}-i\dfrac{m^3\theta^3}{3!}+\dfrac{m^4\theta^4}{4!}+i\dfrac{m^5\theta^5}{5!}-\dfrac{m^6\theta^6}{6!}-i\dfrac{m^7\theta^7}{7!}+\dots$

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$

Consider $e^{e^{i\theta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(e^{i\theta})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{in\theta}}{n!}$

$\Rightarrow e^{\cos\theta+i\sin\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{\cos(n\theta)}{n!}+i\dfrac{\sin(n\theta)}{n!}\right]$

$e^{\cos\theta}\cdot e^{i\sin\theta}=\sum\dfrac{\cos(n\theta)}{n!}+i\sum\dfrac{\sin(n\theta)}{n!}$

$e^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)\right)=\sum\dfrac{\cos(n\theta)}{n!}+i\sum\dfrac{\sin(n\theta)}{n!}$

الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي (للطرفين)

$e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)=\sum\dfrac{\cos(n\theta)}{n!}$

$e^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta)\right)=1+\dfrac{\cos(\theta)}{1}+\dfrac{\cos(2\theta)}{2!}+\dfrac{\cos(3\theta)}{3!}+\dots$

---

① لكل دالة ، حدد الأقطاب والرواسب عند كل قطب:

أ) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$ ب) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ جـ) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$

جـ1: (أ) $z=-1 \leftarrow \frac{1}{3}$ ، $z=2 \leftarrow \frac{5}{3}$

(ب) $z=1$ ، الراسب : 4

(جـ) $z=0$ ، الراسب : 1

(أ) $\dfrac{2z+1}{(z-2)(z+1)} = \dfrac{\left(\frac{2z+1}{z+1}\right)}{z-2}$ ، $\phi(z) =$ بسيط رتبة ، $\phi(2) \neq 0$ و 2 ، -1

$$Res(f,2) = \frac{2(2)+1}{2+1} = \frac{5}{3}$$

$$\phi(z) = \frac{2z+1}{z-2}$$

$$Res(f,-1) = \frac{2(-1)+1}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

(ب) $\phi(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$ ، قطب رتبة ، $\phi(1) \neq 0$ و 1

$m=2$

$$\phi'(z) = 2(z+1) \Rightarrow Res(f,1) = \frac{2(1+1)}{0!} = 4$$

(جـ) $\dfrac{\sin z}{z^2} = \dfrac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^2}$

$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!}$$

$$\Rightarrow m = 1$$